ÜBER PERIODISCHE APPROXIMATIONEN ALGEBRAISCHER ZAHLEN

VON

HERMANN MINKOWSKI

IN ZÜRICH.

Abel sagt an einer Stelle (Oeuvres, t. II, p. 217) mit Bezug auf das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen: »Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible». Eben diese Weisung befolgend, können wir auch einer anderen, noch unerledigten Aufgabe auf dem mannigfaltigen Gebiete der Auflösung der Gleichungen näherzutreten versuchen. Wir wollen hier die Frage behandeln:

Welche algebraische Zahlen besitzen analoge periodische Approximationen, wie sie die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades vermöge der Periodicität ihrer Entwicklungen in gewöhnliche Kettenbrüche aufweisen.

§ 1. *Periodische Substitutionenketten.*

1. Es sei α eine beliebige Grösse und es werde $l = 1$ oder $= 2$ gesetzt, je nachdem α reell oder complex ist. Wenn α eine *algebraische Zahl n^{ten} Grades,* d. h. eine Wurzel einer im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades ist, so kann der Ausdruck

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n$$

für ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nicht sämmtlich Null sind, niemals verschwinden, aber, wofern $n > l$ ist, wohl dem Werthe Null beliebig nahe kommen. Wir machen hier stets die Annahme $n > l$. Über die Annäherungen dieser Form ξ an Null gelten dann, wie ich in dem Aufsatze »*Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen*» (Göttinger Nachrichten v. 11. Febr. 1899) gezeigt habe, die folgenden Sätze:

Wir können zur Zahl α in Bezug auf jede beliebige reelle Grösse $r \geqq 1$ stets eine Substitution

$$\text{S)} \qquad x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + \dots + s_h^{(n)} y_n \qquad (h=1,2,\dots n)$$

mit folgenden Eigenschaften construiren:

1° *Alle Coefficienten $s_h^{(k)}$ sind ganze rationale Zahlen, und gehen die Quotienten $\frac{s_h^{(k)}}{r}$ dem Betrage nach nicht über eine gewisse, von r unabhängige Grösse hinaus.*

2° *Die Determinante von S ist $\neq 0$ und liegt dem Betrage nach unter einer gewissen, von r nicht abhängigen Grenze.*

3° *Geht ξ durch S in*

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \dots + \rho_n y_n$$

über, so liegen die Beträge von

$$\rho_1 r^{\frac{n-l}{l}}, \rho_2 r^{\frac{n-l}{l}}, \dots \rho_n r^{\frac{n-l}{l}}$$

sämmtlich unter einer gewissen, von r nicht abhängigen Grenze.

4° *Für die Verhältnisse $\rho_1 : \rho_2 : \dots : \rho_n$ kommen von vorn herein nur eine endliche Anzahl verschiedener Systeme in Betracht, die von r nicht abhängen.*

Diesen Bedingungen wird z. B., wie in jener Arbeit ausgeführt ist, stets genügt, wenn wir S unter allen denjenigen Substitutionen, für welche die Coefficienten $s_h^{(k)}$ lauter Zahlen aus der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm [r]$ sind und die Determinante $\neq 0$ ist, derart auswählen, dass dabei zunächst $|\rho_1|$, nächstdem $|\rho_2|, \dots$ endlich $|\rho_n|$ möglichst klein werden. Dabei fällt dann die Determinante von S dem Betrage nach sicher stets $\leqq \underline{|n}$ aus.

Durch die Substitution S erlangen wir zugleich gewisse rationale Approximationen für alle Zahlen des Körpers von α, wenn α reell ist, bez., wenn α complex ist, für alle reellen Zahlen *des* Körpers, der aus dem Körper von α und dem dazu conjugirt imaginären Körper zusammengesetzt ist.

Umgekehrt gilt der Satz: *Die Grösse α ist, ($n > l$ angenommen), nothwendig eine algebraische Zahl n^{ten} Grades, wenn für sie in Bezug auf jede reelle Grösse $r \geqq 1$ stets eine den Bedingungen 1°, 2°, 3°, 4° entsprechende Substitution S hergestellt werden kann.*

2. Wir denken uns weiterhin α stets als eine algebraische Zahl n^{ten} Grades und $n > l$. Nehmen wir nun eine unbegrenzte Reihe wachsender Zahlen $r_1 \geqq 1$, r_2, r_3, ... an und construiren wir in der eben erörterten Weise zu diesen Zahlen Substitutionen S_1, S_2, S_3, ... *Eine derartige Substitutionenkette für die Zahl α soll periodisch heissen, wenn die daraus vermöge der Compositionsformeln*

$$S_2 = S_1 Q_1, \qquad S_3 = S_2 Q_2, \quad \ldots \quad S_{j+1} = S_j Q_j, \quad \ldots$$

hergeleitete Reihe von Substitutionen Q_1, Q_2, Q_3, ..., abgesehen von einer endlichen Anzahl von Gliedern am Anfange, in periodischer Wiederholung ein und derselben endlichen Folge von Substitutionen besteht, wenn also ein Index j_0 und eine positive Zahl p_0 angebbar sind, sodass für jeden beliebigen Index $j \geqq j_0$ stets $Q_j = Q_{j+p_0}$ ist.

Wir fragen nach dem Charakter derjenigen algebraischen Zahlen α, für welche periodische Substitutionenketten existiren.

3. Ist die Kette S_1, S_2, S_3, ... für α periodisch, so erhalten wir mit den soeben eingeführten Bezeichnungen

$$Q_j = S_j^{-1} S_{j+1}; \qquad S_j^{-1} S_{j+1} = S_{j+p_0}^{-1} S_{j+p_0+1}, \; j \geqq j_0,$$

also

$$S_{j+p_0} S_j^{-1} = S_{j+p_0+1} S_{j+1}^{-1},$$

wenn $j \geqq j_0$ ist. Setzen wir $S_{j_0+p_0} S_{j_0}^{-1} = P_0$, so folgt daraus allgemein

$$S_{j+p_0} = P_0 S_j, \qquad S_{j+fp_0} = P_0^f S_j$$

für jeden Index $j \geqq j_0$ und jeden Exponenten $f = 1, 2, 3, \ldots$.

Es bedeute φ_j die Linearform, in welche ξ durch S_j übergeht. Unter den unendlich vielen Substitutionen $S_{j_0+fp_0}$ für $f = 0, 1, 2, \ldots$ werden wir, da nach 2° für ihre Determinanten und weiter nach 4° für die Verhältnisse der Coefficienten $\rho_1 : \rho_2 : \ldots : \rho_n$ in den zugehörigen Formen $\varphi_{j_0+fp_0}$ nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen in Betracht kommen, jedenfalls irgend zwei Substitutionen $S_{j_0+cp_0} = S$ und $S_{j_0+dp_0} = T$ $(d > c)$ in solcher Weise auffinden können, *dass erstens* $TS^{-1} = P = P_0^{d-c}$ *eine ganzzahlige Substitution mit der Determinante* 1 *wird und zudem zweitens in den beiden Formen* $\varphi_{j_0+cp_0} = \varphi$ *und* $\varphi_{j_0+dp_0} = \psi$ *die* n *Coefficienten jedesmal genau dieselben Verhältnisse besitzen,* dass also $\psi = \vartheta\varphi$ gilt, wo ϑ ein constanter Factor ist. (Die erstere Forderung wird z. B. gewiss erfüllt sein, wenn wir S und T derart auswählen, dass ihre Determinanten gleichen Werth haben und zudem in ihnen nach dieser Determinante als Modul je zwei entsprechende Coefficienten immer gleichrestig sind.) Der Factor ϑ wird als Quotient der Coefficienten in ψ und φ wie diese Zahlen im Körper von α liegen. Setzen wir $(d-c)p_0 = p$, so gehen aus $T = PS$, $\psi = \vartheta\varphi$ vermöge $Q_j = Q_{j+p}$ $(j \geqq j_0)$ die Beziehungen

$$S_{j+p} = PS_j, \qquad \varphi_{j+p} = \vartheta\varphi_j$$

für jeden Index $j \geqq j_0$ hervor. Wir erhalten sodann allgemeiner

$$S_{j+fp} = P^f S_j, \qquad \varphi_{j+fp} = \vartheta^f \varphi_j \qquad (j \geqq j_0)$$

für $f = 1, 2, 3, \ldots$. Da in den Formen φ_j mit wachsendem Index j die Beträge der Coefficienten jedenfalls nach Null abnehmen, muss $|\vartheta| < 1$ sein.

4. Wenn α complex ist, bedeute α^0 die zu α conjugirt imaginäre Grösse. Die $n-l$ Wurzeln der irreducibeln Gleichung für α ausser α, bez. ausser α und α^0 mögen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-l)}$ heissen. Ferner bezeichnen wir die zu einer Zahl ϑ oder einer Form ξ des Körpers von α conjugirten Zahlen oder Formen in den Körpern von $(\alpha^0), \alpha', \ldots \alpha^{(n-l)}$ analog durch Hinzufügung oberer Indices $(0), 1, \ldots n-l$. Durch die Substitution $P = S_{j_0+p}S_{j_0}^{-1}$ geht ξ in $\vartheta\xi$ und gehen daher wegen der Irreducibilität der Gleichung n^{ten} Grades für α weiter $(\xi^0), \xi', \ldots \xi^{(n-l)}$ in $(\vartheta^0\xi^0), \vartheta'\xi', \ldots \vartheta^{(n-l)}\xi^{(n-l)}$ über. Bedeutet nun t einen unbestimmten Parameter, E die identische Substitution, so gehen $\xi, \ldots \xi^{(n-l)}$ durch die Substitution $tE-P$ in $(t-\vartheta)\xi, \ldots (t-\vartheta^{(n-l)})\xi^{(n-l)}$ über und ist infolgedessen $|tE-P|$, d. h. die *Determinante* von $tE-P$, gleich dem Producte $(t-\vartheta)\ldots(t-\vartheta^{(n-l)})$. Diese in t identisch erfüllte Beziehung zeigt, dass ϑ der Gleichung $|tE-P| = 0$

genügt. Indem P eine ganzzahlige Substitution und ihre Determinante 1 ist, erweist sich dadurch ϑ als eine *ganze Zahl* und als eine *Einheit* im Körper von α.

5. Es sei nun a_0 eine solche ganze rationale Zahl, dass $a_0\alpha$ eine *ganze* algebraische Zahl wird, so hat das Product $a_0^{n-1}\xi$ als Coefficienten lauter *ganze* algebraische Zahlen und *sind* daher auch *in jeder einzelnen Form $a_0^{n-1}\varphi_j$ die bezüglichen n Coefficienten $a_0^{n-1}\rho_k (k = 1, 2, \ldots n)$ stets lauter von Null verschiedene ganze algebraische Zahlen, also deren Normen im Körper von α stets dem Betrage nach $\geqq 1$.* Wegen der Eigenschaft $1°$ der Substitutionen S_j liegt dabei jeder Betrag

$$\frac{|\rho_k^{(h)}|}{r_j} \qquad (h=1,\ldots,n-l;\ k=1,2,\ldots,n)$$

nicht über einer gewissen von j unabhängigen Grenze. Verwenden wir nun die hierdurch gegebenen Ungleichungen für alle Indices $h = 1, \ldots n-l$ mit Ausnahme eines beliebigen Index g dieser Reihe und berücksichtigen wir ausserdem die Eigenschaft $3°$ für S_j und, falls $l = 2$ ist, noch die Beziehung $|\rho_k| = |\rho_k^0|$, so gewinnen wir aus der Ungleichung

$$|Nm\, a_0^{n-1}\rho_k| \geqq 1$$

eine gewisse, von r_j unabhängige, *positive untere* Grenze für den einen darin übrig bleibenden Factor $\frac{|\rho_k^{(g)}|}{r_j}$. *Danach befinden sich nun alle Beträge $\frac{|\rho_k^{(g)}|}{r_j}$ in Bezug auf die Form φ_j zwischen zwei bestimmten endlichen positiven, von r_j unabhängigen Grenzen,* und werden infolgedessen weiter auch *die Quotienten aus irgend zwei der je $n-l$ conjugirten Werthe*

$$\rho_k', \rho_k'', \ldots \rho_k^{(n-l)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bei sämmtlichen Formen φ_j stets absolut genommen zwischen zwei, unabhängig von den Werthen r_j feststehenden positiven endlichen Grenzen liegen. Beachten wir nun die Relationen $\varphi_{j+fp} = \vartheta^f\varphi_j$ für $f = 1, 2, 3, \ldots$, so zeigt sich schliesslich, dass auch die Beträge der Quotienten aus irgend zwei der je $n-l$ Grössen

$$\vartheta'^f, \vartheta''^f, \ldots (\vartheta^{(n-l)})^f$$

zwischen gewissen zwei festen positiven endlichen Grenzen liegen müssen, *und zwar gelten diese Grenzen für alle Werthe* $f = 1, 2, 3, \ldots$ *auf einmal.* Danach kann die Einheit ϑ nicht anders beschaffen sein, als dass für sie die Gleichungen

$$|\vartheta'| = |\vartheta''| = \ldots = |\vartheta^{(n-l)}|$$

statthaben. Bezeichnen wir den gemeinsamen Werth dieser letzten Beträge mit η und setzen $|\vartheta| = \varepsilon$, womit im Falle $l = 2$ noch $|\vartheta^0|$ zusammenfällt, so geht die Gleichung $Nm\,\vartheta = 1$ in $\varepsilon^l \eta^{n-l} = 1$ über, und wegen $\varepsilon < 1$ folgt $\eta > 1$. Wir gelangen auf diese Weise zu dem Satze:

Damit eine algebraische Zahl n^{ten} Grades α eine periodische Substitutionenkette besitze, muss es im Körper von α eine Einheit ϑ von einem Betrage < 1 geben, für welche die conjugirten Zahlen in den conjugirten Körpern (abgesehen von der Zahl ϑ^0 in dem Körper der conjugirt imaginären Zahl α^0, falls α complex ist) sämmtlich unter einander gleichen Betrag haben.

6. *Die hier gefundene Bedingung ist zugleich hinreichend für das Vorhandensein einer periodischen Substitutionenkette zur Zahl α.* Denn nehmen wir an, es existire im Körper von α eine Einheit ϑ_0 von dem fraglichen Charakter. Es bedeute dann P_0 diejenige lineare Substitution, durch welche die n Formen $\xi, (\xi^0), \ldots \xi^{(n-l)}$ in die Formen $\vartheta_0\xi, (\vartheta_0^0\xi^0), \ldots \vartheta_0^{(n-l)}\xi^{(n-l)}$ übergehen; diese Substitution hat lauter *rationale* Coefficienten und eine *Determinante* $= \pm 1$. Durch P_0^f, wenn f eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ bedeutet, gehen dann $\xi, \ldots \xi^{(n-l)}$ in $\vartheta_0^f\xi, \ldots (\vartheta_0^{(n-l)})^f\xi^{(n-l)}$ über. Da diese Potenzen ϑ_0^f lauter *ganze* algebraische Zahlen sind, werden, wie leicht zu sehen ist, in allen jenen Substitutionen P_0^f die Coefficienten solche ganze rationale Zahlen sein, dass ihre Nenner nicht über eine gewisse, durch die Grösse α bestimmte, aber von den Exponenten f unabhängige Zahl hinausgehen, während zugleich ihre Determinanten durchweg $= \pm 1$ sind. Wir werden infolgedessen unter jenen unendlich vielen Substitutionen P_0^f gewiss irgend zwei solche, P_0^c und P_0^d $(d > c)$, finden können, dass $P_0^d(P_0^c)^{-1} = P$ eine Substitution mit *ganzzahligen* Coefficienten wird. Setzen wir dann $\vartheta_0^{d-c} = \vartheta$, $|\vartheta|^{-\frac{l}{n-l}} = \eta$, so haben wir in der Reihe

$$S_1 = E, \qquad S_2 = P, \qquad S_3 = P^2,$$

eine periodische Substitutionenkette für die Zahl α mit den in 1. und 2. angegebenen Eigenschaften, wenn wir noch für die zugeordneten Grössen r_j die Festsetzung $r_j = \eta^{j-1} (j = 1, 2, 3, \ldots)$ treffen.

§ 2. *Einheiten von besonderem Charakter.*

7. Wir wollen jetzt die Forderung der Existenz der besonderen Einheit ϑ im Körper von α weiter verfolgen. Die ganze Function n^{ten} Grades in t:

$$F(t) = (t - \vartheta) \ldots (t - \vartheta^{(n-l)})$$

hat *rationale ganze* Coefficienten; unter ihren Wurzeln haben l den Betrag $\varepsilon < 1$ und $n - l$ den Betrag $\eta > 1$. Jeder im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible Factor dieser Function $F(t)$ verschwindet für wenigstens eine der Zahlen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-l)}$ und muss daher, wegen der Irreducibilität der Gleichung mit den Wurzeln $\alpha, \ldots \alpha^{(n-l)}$, jedesmal für alle diese Zahlen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-l)}$ verschwinden; infolgedessen ist $F(t)$ nothwendig eine Potenz einer einzigen irreducibeln Function. Wegen der Beträge der Wurzeln sind nun offenbar nur diese beiden Fälle möglich: *Entweder* ist $F(t)$ selbst irreducibel und bestimmt alsdann ϑ bereits den Körper von α, *oder* es ist α complex, $l = 2$, aber $\vartheta = \vartheta'$ reell und $F(t)$ das Quadrat einer irreducibeln Function; in letzterem Falle bestimmt ϑ einen reellen Unterkörper vom $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grade des complexen Körpers von α. Wir bemerken noch, dass jede Potenz $\vartheta^2, \vartheta^3, \ldots$ denselben Bedingungen genügt, wie sie hier für ϑ vorausgesetzt werden.

8. Nach einem Satze von Dirichlet giebt es in dem Körper der Zahl α, wenn nur $n > l$ ist, gewiss eine solche Einheit, deren Betrag < 1 ist. Daraus ersehen wir bereits, dass im Körper von α eine Einheit ϑ der hier verlangten Art sich gewiss in folgenden Fällen vorfindet:

1° *wenn α reell und $n = 2$ ist,* 2° *wenn α reell ist, $n = 3$ und der Körper von α zwei complexe conjugirte Körper besitzt,*

3° *wenn α complex und $n = 3$ ist,* 4° *wenn α complex ist, $n = 4$ und der Körper von α lauter complexe conjugirte Körper besitzt.*

Denn in diesen Fällen besteht die Reihe $\vartheta', \ldots \vartheta^{(n-l)}$ entweder in einer einzigen reellen Zahl oder zwei conjugirt imaginären, im Speciellen auch zwei gleichen reellen Zahlen. Weiter haben wir im Körper von α eine Einheit ϑ der verlangten Art jedenfalls auch in folgenden Fällen:

5° *wenn* α *complex ist,* $n = 4$ *und der Körper von* α *einen reellen Unterkörper zweiten Grades hat,* 6° *wenn* α *complex ist,* $n = 6$ *und der Körper von* α *einen reellen Unterkörper dritten Grades besitzt, dessen zwei conjugirte Körper complex sind.*

Denn in diesen Fällen können wir für ϑ eine reelle Einheit von einem Betrage < 1 in dem betreffenden Unterkörper von α wählen, alsdann ist $\vartheta^0 = \vartheta$ und die Reihe $\vartheta', \ldots \vartheta^{(n-l)}$ besteht aus zwei gleichen reellen bez. zwei gleichen Paaren conjugirt imaginärer Zahlen. Wir können jetzt den Satz beweisen:

Die hier aufgezählten sechs Fälle sind die einzigen, in denen der Körper von α *eine Einheit* ϑ *der fraglichen Art aufweist, also die einzigen Fälle, in denen die Zahl* α *periodische Substitutionenketten besitzt.*

9. Wir discutiren zuerst den Fall *einer reellen Zahl* α; hier ist $l = 1$, $\vartheta = \pm\varepsilon$, $\varepsilon\eta^{n-1} = 1$. Wir haben folgende Möglichkeiten in's Auge zu fassen:

1) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ finden sich *wenigstens zwei reelle,* etwa $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Dann sind auch $\vartheta^{(h)}$ und $\vartheta^{(k)}$ reell, und da diese Zahlen nicht einander gleich sein können, aber denselben Betrag haben, müsste $\vartheta^{(h)} = -\vartheta^{(k)}$ und daher $(\vartheta^{(h)})^2 = (\vartheta^{(k)})^2$ sein. Aber die Zahl $\vartheta^2 = \varepsilon^2$ ist von ihren $n-1$ conjugirten Zahlen verschieden, sie genügt daher ebenfalls einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades, und müssten daher ihre $n-1$ conjugirten Zahlen auch unter einander durchweg verschieden sein. Danach ist dieser Fall unmöglich.

2) Unter der Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ kommt *nur eine reelle* Zahl, $\alpha^{(g)}$, vor. Für $n = 2$ liegt dann der oben unter 1° aufgeführte Fall vor. Ist $n > 2$, so haben wir unter jenen Zahlen weiter wenigstens ein Paar conjugirt imaginärer Zahlen, etwa $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Die Zahl $\vartheta^2 = \varepsilon^2$ genügt einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades; unter den Wurzeln dieser Gleichung ist weiter eine $= (\vartheta^{(g)})^2 = \eta^2$ und sind die $n-2$ übrigen dem Betrage nach $= \eta^2$. Nun können wir eine Gleichung mit rationalen Coefficienten vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ angeben, welche die Producte aus je zwei verschiedenen der n

Grössen $\vartheta, \vartheta', \ldots \vartheta^{(n-1)}$ zu Wurzeln hat. Diese Gleichung besitzt $n - 1$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln von Betrage η^2, darunter insbesondere die Wurzel $\vartheta^{(h)}\vartheta^{(k)} = \eta^2$, sie müsste also auch alle anderen Wurzeln jener irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades für η^2 besitzen; sie hätte aber, da $\varepsilon < 1 < \eta$ ist, gewiss nicht die Wurzel ε^2. Danach ist dieser Fall für $n > 2$ unmöglich.

3) Die Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ sind *sämmtlich complex*, sie zerfallen dann in $\frac{n-1}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen. Für $n = 3$ liegt der oben unter 2° aufgeführte Fall vor. Jetzt sei $n > 3$. Wir bilden die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten, welche als Wurzeln die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta^{-n+1}, \vartheta'^{-n+1}, \ldots (\vartheta^{(n-1)})^{-n+1}$ hat. Diese Gleichung besitzt $n - 1$ Wurzeln vom Betrage $(\varepsilon\eta)^{-n+1} = \eta^{(n-1)(n-2)}$ und im Übrigen lauter Wurzeln vom Betrage $\eta^{-2(n-1)} = \varepsilon^2$, darunter $\frac{n-1}{2}$ Wurzeln $= \varepsilon^2 = \vartheta^2$; sie müsste daher auch alle die Grössen $\vartheta'^2, \ldots (\vartheta^{n-1)})^2$ vom Betrage η^2 zu Wurzeln besitzen, es müsste also $\eta^2 = \eta^{(n-1)(n-2)}$, d. h. $n = 3$ sein. Für $n > 3$ ist danach dieser Fall unmöglich.

10. Wir behandeln jetzt weiter den *Fall einer complexen Zahl* α; hier ist $l = 2$, $\varepsilon^2\eta^{n-2} = 1$.

Machen wir zunächst die Annahme, dass $\vartheta = \vartheta^0$, *also reell ist.* Die Grösse ϑ ist dann Wurzel einer irreducibeln Gleichung $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades. Der Körper von α besitzt also einen reellen Unterkörper von Grade $\frac{n}{2}$, und in diesem soll ϑ eine Einheit von einem Betrage < 1 sein, für welche die conjugirten Zahlen in den conjugirten Körpern sämmtlich unter einander gleiche Beträge haben. Wir können daher die in 9. gemachten Ausführungen verwenden, und es muss entweder $\frac{n}{2} = 2$ sein oder aber $\frac{n}{2} = 3$ und dabei der Körper von ϑ zwei complexe conjugirte Körper aufweisen. Wir kommen damit auf die oben unter 5° und 6° aufgezählten Umstände für den Körper von α.

Wir nehmen jetzt andererseits an, dass $\vartheta \neq \vartheta^0$ *sei.* Alsdann genügt ϑ einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades und bestimmt bereits völlig den Körper von α. Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

1) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ sind *wenigstens zwei reelle* vorhanden, $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Dann sind auch $\vartheta^{(h)}$ und $\vartheta^{(k)}$ reell, und da sie gleichen Betrag haben, aber verschieden sind, kann nur $\vartheta^{(h)} = -\vartheta^{(k)}$ sein. Alsdann ist $(\vartheta^{(h)})^2 = (\vartheta^{(k)})^2$. Die rationale Gleichung n^{ten} Grades mit den Wurzeln $\vartheta^2, \ldots (\vartheta^{(n-2)})^2$ hat daher lauter Doppelwurzeln und muss infolgedessen $\vartheta^2 = (\vartheta^0)^2$ sein. Die Potenz ϑ^2 bestimmt somit einen reellen Unterkörper $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades für den Körper von α, und da überdies $(\vartheta^{(h)})^2$ reell ist, kann nach dem vorhin Bemerkten hier nur der unter 5° aufgeführte Fall mit $n = 4$ vorliegen.

2) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ ist *nur eine reelle* Zahl, $\alpha^{(g)}$, vorhanden. Für $n = 3$ liegt der unter 3° genannte Fall vor. Ist $n > 3$, so haben wir unter jenen Zahlen noch $\frac{n-3}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen. Es ist $\vartheta^{(g)} = \pm \eta$; da $-\vartheta^{(g)}$ hier nicht derselben Gleichung mit rationalen Coefficienten wie $\vartheta^{(g)}$ genügt, muss nothwendig auch $\vartheta^0 \neq -\vartheta$, also $(\vartheta^0)^2 \neq \vartheta^2$ und daher $\vartheta^2, \neq \varepsilon^2(\vartheta^0)^2 \neq \varepsilon^2$ sein. Danach ist die rationale Gleichung n^{ten} Grades mit den Wurzeln $\vartheta^2, \ldots (\vartheta^{(n-2)})^2$ irreducibel und unter den Wurzeln dieser Gleichung sind zwei nicht reelle Wurzeln vom Betrage ε^2 und ist ferner eine Wurzel $= \eta^2$ vorhanden. Bilden wir nun die rationale Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, welche die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-2)}$ zu Wurzeln hat, so besitzt diese Gleichung eine Wurzel $= \varepsilon^2$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln vom Betrage η^2 und darunter $\frac{n-3}{2}$ Wurzeln $= \eta^2$. Wegen der letzteren Wurzeln müsste sie aber alle Wurzeln jener irreducibeln Gleichung für η^2 besitzen. Danach ist dieser Fall für $n > 3$ unmöglich.

3) Die Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ sind *sämmtlich complex,* zerfallen also in $\frac{n-2}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen; n ist hier gerade. Für $n = 4$ liegt der oben unter 4° aufgeführte Fall vor. Jetzt sei $n \geqq 6$. Bilden wir die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, welche die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-2)}$ zu Wurzeln hat, so besitzt diese Gleichung mit rationalen Coefficienten eine Wurzel $= \varepsilon^2$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln vom Betrage η^2, darunter $\frac{n-2}{2}$ gleich η^2. Bilden

wir andererseits die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln die $-\frac{n-2}{2}^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln dieser letzten Gleichung sind, so hat diese neue Gleichung mit rationalen Coefficienten eine Wurzel $= \varepsilon^{-(n-2)} = \eta^{\frac{(n-2)^2}{2}}$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $(\varepsilon\eta)^{\frac{-(n-2)}{2}} = \eta^{\frac{(n-2)(n-4)}{4}}$, die übrigen Wurzeln vom Betrage $\eta^{-(n-2)} = \varepsilon^2$, darunter $\frac{n-2}{2}$ gleich ε^2. Diese zweite Gleichung besitzt nun keine Wurzel vom Betrage $\varepsilon\eta$, und wenn wir uns zuerst $n > 6$ denken, auch keine Wurzel vom Betrage η^2. Im Falle $n > 6$ könnte daher der gemeinsame Factor der beiden eben gebildeten Gleichungen nur die eine Wurzel ε^2 besitzen, es müsste dann also $\varepsilon^2 = \vartheta\vartheta^0$ rational sein; nun wäre aber ε^2 ebenso wie ϑ eine Einheit, eine algebraische Zahl von der Norm ± 1, es müsste daher nothwendig $\varepsilon^2 = 1$ sein, was gegen die Voraussetzung $\varepsilon < 1$ wäre. Also ist die Annahme $n > 6$ hier unzulässig.

Im Falle $n = 6$ endlich hat die zuerst erwähnte Gleichung eine Wurzel $= \varepsilon^2$, 8 Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, 6 vom Betrage η^2, die an zweiter Stelle gebildete Gleichung eine Wurzel $= \eta^8$, 8 Wurzeln vom Betrage η^2, 6 vom Betrage ε^2, darunter 2 gleich ε^2. Die im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible Gleichung mit ε^2 als Wurzel kann danach, da sie in diesen beiden Gleichungen als Factor eingeht, ausser ε^2 nur Wurzeln vom Betrage η^2 enthalten, und sie wird wegen $\varepsilon^2\eta^4 = 1$ und da $\varepsilon^2 = \vartheta\vartheta^0$ jedenfalls eine Einheit vorstellt, im ganzen zwei solcher Wurzeln enthalten; diese zwei Wurzeln können dann einander weder gleich noch entgegengesetzt, also auch nicht reell $= \pm\eta^2$ sein, sie müssen complex und zu einander conjugirt imaginär sein. Nehmen wir an, dass hier ϑ' mit ϑ'' und ϑ''' mit $\vartheta^{(4)}$ conjugirt imaginär sind, so können wir annehmen, indem wir noch die Bezeichnungen von ϑ''' und $\vartheta^{(4)}$ vertauschen dürfen, die Wurzeln jener Gleichung für ε^2 seien $\vartheta\vartheta^0$, $\vartheta'\vartheta'''$, $\vartheta''\vartheta^{(4)}$.

Die Grösse ε^2 bestimmt danach einen cubischen Körper, dessen zwei conjugirte Körper complex sind. Denken wir uns jetzt die im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible ganze Function $F(t)$, welche für $t = \vartheta$ verschwindet, im Körper von ε^2 in irreducible Factoren zerlegt, und es sei $G(t)$ derjenige Factor darunter, welcher die Wurzel $t = \vartheta$ erhält. Da ε^2 reell ist, bekommt $G(t)$ ebenfalls lauter reelle Coefficienten und wird daher mit der Wurzel ϑ auch die conjugirt imaginäre Grösse $\vartheta^0 = \frac{\varepsilon^2}{\vartheta}$ als Wurzel besitzen, sodass auch $G\left(\frac{\varepsilon^2}{\vartheta}\right) = 0$ ist. Alsdann muss die Gleichung $G\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right) = 0$ überhaupt für jede Wurzel der im Körper von ε^2 irreducibeln Gleichung $G(t) = 0$ bestehen. Die Grössen $\frac{\varepsilon^2}{\vartheta'}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta''}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta'''}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta^{(4)}}$ aber besitzen sämmtlich den Betrag $\frac{\varepsilon^2}{\eta} \neq \eta$ und $\neq \varepsilon$ und sind daher nicht Wurzeln von $F(t) = 0$, also auch nicht Wurzeln von $G(t) = 0$, daher kann $G(t)$ auch keine der Grössen $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \vartheta^{(4)}$ als Wurzel haben; somit können wir einfach $G(t) = (t - \vartheta)(t - \vartheta^0)$ schreiben. Danach ist ϑ Wurzel einer quadratischen Gleichung im Körper von ε^2 und besitzt der Körper sechsten Grades von ϑ, d. i. der Körper von α, in dem Körper von ε^2 einen reellen Unterkörper dritten Grades, dessen zwei conjugirte Körper complex sind. Wir kommen also auf den oben unter 6° aufgezählten Fall.

Wir können die Bildungsweise des Körpers von α unter den hier angenommenen Umständen noch genauer festlegen. Die zu $G(t)$ conjugirten Functionen in den Körpern von $\vartheta'\vartheta'''$ und $\vartheta''\vartheta^{(4)}$ werden $(t - \vartheta')(t - \vartheta''')$ und $(t - \vartheta'')(t - \vartheta^{(4)})$ sein. Da $|\vartheta'| = |\vartheta'''|$ ist, wird $\frac{\vartheta' - \vartheta'''}{\vartheta' + \vartheta'''}$ rein imaginär, also $\left(\frac{\vartheta' - \vartheta'''}{\vartheta' + \vartheta'''}\right)^2$ eine negative reelle Grösse sein. Diese Grösse liegt wie $\vartheta' + \vartheta'''$ und $\vartheta'\vartheta'''$ in dem Körper von $\vartheta'\vartheta'''$; da sie nun reell ist, wird sie identisch mit ihrer conjugirten Grösse in dem conjugirt imaginären Körper von $\vartheta''\vartheta^{(4)}$ und muss daher rational sein und daher gleichzeitig auch gleich der conjugirten Grösse $\left(\frac{\vartheta - \vartheta^0}{\vartheta + \vartheta^0}\right)^2$ im Körper von $\vartheta\vartheta^0$. Danach ist $\frac{\vartheta}{\vartheta^0}$ entweder $= \frac{\vartheta'}{\vartheta'''}$ oder $= \frac{\vartheta'''}{\vartheta'}$. Da wir die Bezeichnung der Paare ϑ', ϑ'' und $\vartheta''', \vartheta^{(4)}$ vertauschen dürfen, können wir annehmen, es sei $\frac{\vartheta}{\vartheta^0} = \frac{\vartheta'}{\vartheta'''}$; letzterer Werth ist weiter $= \frac{\vartheta^{(4)}}{\vartheta''}$. Setzen wir $\frac{\vartheta}{\vartheta^0} = \delta$, so ist $\delta = \frac{\vartheta^2}{\vartheta\vartheta^0}$ und sind die conjugirten Zahlen dazu $\frac{\vartheta'^2}{\vartheta'\vartheta'''} = \delta, \frac{(\vartheta^{(4)})^2}{\vartheta''\vartheta^{(4)}} = \delta$ und die drei hierzu reciproken Werthe $= \frac{1}{\delta}$. Dabei hat δ den Betrag 1 und ist wie ϑ eine Einheit; danach ist entweder $\delta = -1$, oder es ist δ eine solche Einheitswurzel, die einen Körper zweiten Grades bestimmt. Im ersteren Falle ist $\vartheta^0 = -\vartheta$, $\vartheta = \pm i\varepsilon$, $\vartheta^2 = (\vartheta^0)^2$. Im zweiten Falle kämen für δ zunächst die dritten, vierten, sechsten Einheitswurzeln in Betracht. Nun folgt $\vartheta = \delta^{\frac{1}{2}}\varepsilon$, $\vartheta^0 = \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\varepsilon$ und weiter unter Verwendung von $\varepsilon\eta^2 = \varepsilon\vartheta'\vartheta'' = 1$ die Beziehung

$$Nm(\vartheta + \vartheta^0) = (\vartheta + \vartheta^0)(\vartheta' + \vartheta''')(\vartheta'' + \vartheta^{(4)}) = \frac{\delta + 1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(1 + \delta).$$

Danach muss noch $\frac{\delta + 1}{\delta^{\frac{1}{2}}}$ rational sein, und solches trifft nur zu, wenn δ eine *dritte* Einheitswurzel vorstellt, $\delta^3 = 1$ ist. Dann folgt endlich $\vartheta = \pm\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\vartheta^0 = \pm\,\delta\varepsilon$, $\vartheta^3 = (\vartheta^0)^3$ und $\vartheta + \vartheta^0 = \mp\,\varepsilon$, sodass der Körper von ε^2 auch die Grösse ε selbst enthält, und der Körper von α aus dem Körper dritten Grades von ε und dem Körper zweiten Grades von $\delta = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ zusammengesetzt ist.

§ 3. *Die complexen cubischen Irrationalzahlen.*

11. *In den Fällen, wo für die algebraische Zahl α periodische Substitutionenketten möglich sind, entsteht nun die Aufgabe, eine solche Kette für α bereits herzustellen, wenn allein α seinem Werthe nach gegeben ist, die conjugirten algebraischen Zahlen von α indess noch unbekannt sind.* Bei den reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades wird gerade durch die periodische Entwickelung in einen gewöhnlichen Kettenbruch das hier Verlangte geleistet. Wir wollen nun zeigen, dass auch noch in einem anderen Falle, nämlich, wenn es sich um *eine complexe Grösse α* handelt, *welche Wurzel einer irreducibeln Gleichung dritten Grades sein soll*, der hier gestellten Forderung entsprochen werden kann, und *wir kommen dadurch zu einem völlig analogen Kriterium für die complexen algebraischen Zahlen dritten Grades, wie es durch* LAGRANGE *für die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades in der Periodicität der Kettenbruchentwickelung nachgewiesen worden ist.*

Es sei jetzt α eine complexe Grösse, welche einer im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibeln Gleichung dritten Grades genügt, so ist mit α ohne Weiteres auch die conjugirt imaginäre Grösse α^0 gegeben; dagegen haben wir uns der Kenntniss der dritten reellen Wurzel α' jener Gleichung vorläufig zu entschlagen. Wir setzen

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3.$$

Zu jeder ganzen rationalen Zahl $r \geqq 1$ bestimmen wir eine Substitution S:

$$x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 \qquad (h=1,2,3),$$

wobei jeder der Coefficienten $s_h^{(k)}$ aus den Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm r$ entnommen und die Determinante $\neq 0$ sein soll, derart, dass dabei in der Form

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3,$$

in welche ξ durch S übergeht, zunächst $|\rho_1|$ möglichst klein, nächstdem $|\rho_2|$ möglichst klein, endlich $|\rho_3|$ möglichst klein ausfällt. Bei den einzelnen Systemen $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}$ haben wir immer die Wahl unter Paaren entgegengesetzter Systeme x_1, x_2, x_3 und $-x_1, -x_2, -x_3$, und wir wollen die zusätzliche Annahme machen, dass in jeder Verticalreihe $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}$ von S die letzte von Null verschiedene Zahl stets > 0 ist. *Alsdann ist die betreffende Substitution S durch die Zahl r vollkommen eindeutig bestimmt.* Wir können nämlich niemals für zwei Systeme x_1, x_2, x_3, die $\neq 0, 0, 0$, von einander verschieden und auch nicht einander entgegengesetzt sind, $\xi = \rho$, $\xi = \sigma$ und dabei $|\rho| = |\sigma|$ finden. Denn alsdann wäre $\frac{\rho\rho^0}{\sigma\sigma^0} = 1$ und würde die Betrachtung der Norm von $\frac{\rho}{\sigma}$ in Bezug auf den Körper von α dazu führen, dass die zu $\frac{\rho}{\sigma}$ conjugirte Zahl im Körper von α' rational wäre. Dann aber wäre auch $\frac{\rho}{\sigma}$ selbst rational, also nothwendig $= \pm 1$, und müssten die vorausgesetzten zwei Systeme x_1, x_2, x_3 eben entweder gleich oder entgegengesetzt sein. Die in dieser Weise durch r völlig bestimmte Substitution S entspricht, wie bereits in 1. erwähnt wurde, den dort aufgezählten Umständen; wir wollen von dieser Substitution S sagen, sie *gehöre* zur Zahl r.

Wir setzen jetzt $r_1 = 1$ und ermitteln die zu r_1 gehörende Substitution S_1, diese Substitution kann auch noch zu $r = 2, 3, \ldots$ gehören, es sei $r_2 - 1$ die grösste ganze Zahl, zu der sie gehört; sodann sei S_2 die zu

r_2 gehörende Substitution, $r_3 - 1$ die grösste ganze Zahl, zu der S_2 gehört; S_3 die zu r_3 gehörende Substitution u. s. f. Alsdann gilt der folgende Satz:

Die in dieser Art hergestellte Substitutionenkette $S_1, S_2, S_3, \ldots$ für die complexe cubische Irrationalzahl α ist stets periodisch.

12. In der That, im Körper von α können wir stets eine Einheit ϑ_0 angeben, deren Betrag < 1 ist, und noch so, dass $\vartheta_0' > 0$ ist; alsdann können wir, wie aus den Betrachtungen in 6. hervorgeht, eine solche Potenz dieser Einheit $\vartheta_0^f = \vartheta$ $(f > 0)$ ermitteln, dass die lineare Substitution P, durch welche die Formen ξ, ξ^0, ξ' in $\vartheta\xi, \vartheta^0\xi^0, \vartheta'\xi'$ übergehen, lauter *ganzzahlige* Coefficienten hat; dabei ist $\vartheta\vartheta^0\vartheta' > 0$ und die Determinante von P gleich 1.

Wir schreiben nun die Auflösung von

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3, \qquad \xi^0 = x_1 + \alpha^0 x_2 + (\alpha^0)^2 x_3, \qquad \xi' = x_1 + \alpha' x_2 + \alpha'^2 x_3$$

in der Form

$$x_h = \beta_h \xi + \beta_h^0 \xi^0 + \beta_h' \xi' \qquad (h=1,2,3);$$

dabei sind $\beta_h, \beta_h^0, \beta_h'$ jedesmal conjugirte Zahlen in den Körpern von $\alpha, \alpha^0, \alpha'$.

Es sei jetzt S:

$$x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 \qquad (h=1,2,3)$$

eine Substitution der oben gebildeten Kette und r die niedrigste Zahl, zu der diese Substitution S gehört, also r der grösste Werth unter den Beträgen der 9 Coefficienten $s_h^{(k)}$, und es gehe ξ durch S in

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3$$

über, so folgt

$$s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 = \beta_h \varphi + \beta_h^0 \varphi^0 + \beta_h' \varphi'$$

und daraus

$$s_h^{(k)} = \beta_h \rho_k + \beta_h^0 \rho_k^0 + \beta_h' \rho_k' \qquad (h, k=1,2,3).$$

Nach der in 1. erwähnten Eigenschaft 3^0 können wir eine, von α allein abhängende, von r aber völlig unabhängige positive Constante M angeben, sodass $|\rho_1| r^{\frac{1}{2}}, |\rho_2| r^{\frac{1}{2}}, |\rho_3| r^{\frac{1}{2}}$ bei jedem Werthe von r stets $\leqq M$ sind, und nach 5. gelangen wir dann durch Betrachtung der Normen von ρ_1, ρ_2, ρ_3

unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Norm einer von Null verschiedenen *ganzen* Zahl stets $\geqq 1$ ist, zu einer weiteren, von r unabhängigen positiven Constante, die wir $\frac{M}{N}$ schreiben wollen, sodass $|\rho_1'|r^{-1}$, $|\rho_2'|r^{-1}$, $|\rho_3'|r^{-1}$ stets $\geqq \frac{M}{N}$ sind.

Auf diese Ungleichungen gestützt, können wir jetzt gewisse Eigenschaften für die Substitution $T = PS$ nachweisen, sowie nur r eine bestimmte Grösse übersteigt. Durch $T = PS$ gehen die Formen ξ, ξ^0, ξ' in $\vartheta\varphi, \vartheta^0\varphi^0, \vartheta'\varphi'$ über; ist

$$x_h = t_h^{(1)}y_1 + t_h^{(2)}y_2 + t_h^{(3)}y_3 \qquad (h=1,2,3)$$

der Ausdruck dieser Substitution T, so folgt daher

$$t_h^{(k)} = \vartheta\beta_h\rho_k + \vartheta^0\beta_h^0\rho_k^0 + \vartheta'\beta_h'\rho_k' \qquad (h, k=1,2,3).$$

Alsdann haben wir

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} = \vartheta' \frac{1 + \frac{\vartheta\beta_h}{\vartheta'\beta_h'}\frac{\rho_k}{\rho_k'} + \frac{\vartheta^0\beta_h^0}{\vartheta'\beta_h'}\frac{\rho_k^0}{\rho_k'}}{1 + \frac{\beta_h}{\beta_h'}\frac{\rho_k}{\rho_k'} + \frac{\beta_h^0}{\beta_h'}\frac{\rho_k^0}{\rho_k'}}.$$

Setzen wir $|\vartheta| = \varepsilon$, wobei $\vartheta' = \varepsilon^{-2}$ wird, und bezeichnen wir noch den grössten Werth unter den Beträgen $\left|\frac{\beta_h}{\beta_h'}\right|$ für $h = 1, 2, 3$ mit γ, so geht hieraus auf Grund der erwähnten Ungleichungen, *wofern* $2\gamma N r^{-\frac{3}{2}} < 1$ *ist*, einerseits

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} \geqq \vartheta' \frac{1 - 2\varepsilon^3\gamma N r^{-\frac{3}{2}}}{1 + 2\gamma N r^{-\frac{3}{2}}} > \vartheta'\left(1 - 2(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{3}{2}}\right),$$

andererseits

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} \leqq \vartheta' \frac{1 + 2\varepsilon^3\gamma N r^{-\frac{3}{2}}}{1 - 2\gamma N r^{-\frac{3}{2}}} < \vartheta'\left(1 + 2(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{3}{2}}\right)$$

hervor. Wir nehmen nunmehr die Zahl r überhaupt so gross an, dass die stärkere Bedingung

(I) $$2\vartheta'(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Alsdann finden wir, indem alle Zahlen $s_h^{(k)}$ dem Betrage nach $\leq r$ und wenigstens eine darunter $= \pm r$ ist, die Beträge der Zahlen $t_h^{(k)}$ sämmtlich $< \vartheta' r + \frac{1}{2}$ und wenigstens einen unter diesen Beträgen $> \vartheta' r - \frac{1}{2}$; es wird danach der grösste unter den Beträgen der 9 Coefficienten $t_h^{(k)}$ *gleich der an $\vartheta' r$ nächstgelegenen ganzen Zahl* sein, die wir mit $\bar{r}$ bezeichnen wollen. Ferner finden wir alle Zahlen $s_h^{(k)} \neq 0$ und die Quotienten $\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} > 0$, und wird daher gewiss in T in jedem Systeme $t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, t_3^{(k)}$ die letzte von Null verschiedene Zahl, nämlich $t_3^{(k)} > 0$ sein, wie wir das entsprechende für S voraussetzen.

13. Aus den nämlichen Relationen, die wir soeben behandelten, ersehen wir andererseits die folgende Thatsache: Es sei T eine Substitution der in 11. für die Zahl α gebildeten Kette, $\bar{r}$ die kleinste Zahl, zu der T gehört, und $\bar{r} > \vartheta'$. Bilden wir die Substitution $S = P^{-1}T$, so bestehen zwischen je zwei entsprechenden Coefficienten $t_h^{(k)}$ von T und $s_h^{(k)}$ von S, *sowie nur $\bar{r}$ der Ungleichung $2\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}} < 1$ genügt,* stets die Beziehungen

$$\frac{1}{\vartheta'}\left(1 + 2\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}}\right) > \frac{s_h^{(k)}}{t_h^{(k)}} > \frac{1}{\vartheta'}\left(1 - 2\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Setzen wir nun für $\bar{r}$ die stärkere Ungleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{2}{\vartheta'}\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

voraus, so wird daher der grösste unter den Beträgen der Coefficienten $s_h^{(k)}$ *mit der an $\vartheta'^{-1}\bar{r}$ nächstgelegenen ganzen Zahl* übereinstimmen.

14. Jetzt denken wir uns wieder, wie in 12., S als irgend eine Substitution jener Kette, und es soll dabei sowohl die niedrigste Zahl r, zu der S gehört, der Bedingung (I) entsprechen, wie auch die an $\vartheta' r$ nächstgelegene ganze Zahl $\bar{r}$ die Bedingung (II) erfüllen. *Alsdann können wir behaupten, dass $T = PS$ jedesmal ebenfalls eine Substitution in jener Kette ist* und zu $\bar{r}$ als niedrigster Zahl gehört. Denn in T sind wegen (I) gewiss

alle Coefficienten $t_h^{(k)}$ dem Betrage nach $\leqq \bar{r}$, und zudem ist in jeder Verticalreihe von T die letzte von Null verschiedene Zahl > 0. Wäre nun die zur Zahl $\bar{r}$ gehörende Substitution der Kette, T^*, von T verschieden und würde durch sie ξ in $\vartheta(\rho_1^* y_1 + \rho_2^* y_2 + \rho_3^* y_3)$ übergehen, so müsste dabei entweder $|\rho_1^*| < |\rho_1|$ oder $|\rho_1^*| = |\rho_1|, |\rho_2^*| < |\rho_2|$ oder $|\rho_1^*| = |\rho_1|$, $|\rho_2^*| = |\rho_2|, |\rho_3^*| < |\rho_3|$ sein. In der Substitution $S^* = P^{-1}T^*$ würden dann wegen (II) alle Coefficienten dem Betrage nach

$$< \frac{\bar{r}}{\vartheta'} + \frac{1}{2} < \frac{1}{\vartheta'}\left(\vartheta' r + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} < r + 1,$$

also als ganze Zahlen auch $\leqq r$ sein, und würde ξ durch S in $\rho_1^* y_1 + \rho_2^* y_2 + \rho_3^* y_3$ übergehen, wobei die soeben erwähnten Bedingungen statthätten. Danach könnte S nicht die zur Zahl r gehörende Substitution der Kette sein.

Ist andererseits T eine solche Substitution jener Kette, die zu einer Zahl $\bar{r} > \vartheta'$ als niedrigster Zahl gehört, und erfüllt sowohl $\bar{r}$ die Bedingung (II) wie die an $\vartheta'^{-1}\bar{r}$ nächstgelegene ganze Zahl r die Bedingung (I), so erkennen wir ganz analog, dass auch $S = P^{-1}T$ jedesmal eine Substitution der Kette ist und zu r als niedrigster Zahl gehört.

15. Wir wählen jetzt in der Reihe $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Grösse r_{j_0} derart aus, dass die Ungleichung (I) mit $r = r_{j_0}$ und die Ungleichung (II) mit $\bar{r} = \vartheta' r_{j_0} - \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Alsdann kommt mit der Substitution S_{j_0} in der Kette an irgend einer späteren Stelle die Substitution PS_{j_0} vor, sie sei etwa $= S_{j_0+p}$; dabei wird r_{j_0+p} die an $\vartheta' r_{j_0}$ nächstgelegene ganze Zahl. Jetzt gilt (I) auch für jede Grösse $r = r_j$, wobei $j > j_0$ ist, und (II) auch für jede Grösse $\bar{r} = r_{j+p}$, wobei $j > j_0$ ist. Mit *jeder* Substitution $S_j (j > j_0)$ wird daher auch die Substitution PS_j der Kette angehören und zwar als ein um so späteres Glied, je grösser j ist, und andererseits wird mit jeder Substitution $S_{j+p} (j > j_0)$ auch $P^{-1}S_{j+p}$ der Kette angehören, und zwar als ein um so späteres Glied, je grösser j ist. Daraus folgt dann, dass die Substitutionen PS_{j_0}, PS_{j_0+1}, $PS_{j_0+2}, \ldots$ *sämmtlich* in der Kette auftreten, und zwar jede Substitution *später* als die hier vorher genannte, dass aber andererseits in der Kette keine Substitution *zwischen* diesen einzelnen Substitutionen vorkommen kann, dass mithin allgemein

$$PS_j = S_{j+p}$$

für $j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots$ ist. Aus diesen Beziehungen entnehmen wir

$$S_j^{-1} S_{j+1} = S_{j+p}^{-1} S_{j+p+1}$$

für $j \geqq j_0$, d. h. die Kette $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ist in der That periodisch, w. z. z. w.

Es kann bewiesen werden, *dass für eine jede Substitution S der Kette die Determinante nur die Werthe* ± 1 oder ± 2 *haben kann,* und auf Grund dieser Thatsache lässt sich *ein einfacher Algorithmus zur successiven Bildung der Substitutionen der Kette* aufstellen, wie ich an einer anderen Stelle auseinandersetzen werde.

Zürich, 1902.