SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(Quatrième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Les problèmes que j'ai traités dans les parties antérieures de ce mémoire [1] peuvent tous être ramenés à la source suivante qui est un

[1] Après la publication de la troisième note ont paru les travaux suivants qui se rapportent à ce mémoire:

Z. G. DE GALDEANO. *Estudios de critica y pedagogia matemáticas.* Zaragoza 1900. Pag. 133.

C. A. DELL' AGNOLA. *Sulle série di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena.* (Annali di matem. Ser. 3, T. 6, 1901. Pag. 227.)

EMILE BOREL. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.* (Acta mathematica. Bd. 24, 1901. Pag. 309.)

C. A. DELL' AGNOLA. *Sulle série di polinomi.* (Atti del Reale Ist. Veneto. T. 60, Parte 2, Anno 1900—01. Pag. 171.)

EMILE BOREL. *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901. Chap. 4, Pag. 156—182.

S. PINCHERLE & U. AMALDI. *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi.* Bologna 1901. §§ 99, 214, 215.

ERNST LINDELÖF. *Sur le prolongement analytique.* (Bull. de la soc. math. de France. T. 29, 1901. Pag. 157.)

J. HADAMARD. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* (Scientia N° 12, 1901. Chap. VI., pag. 50—63, 85, 89, 91, 98.)

G. VIVANTI. *Teoria delle funzioni analitiche.* Milano 1901. Pag. 275, 279—304.

E. PHRAGMÉN. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. (Comptes rendus etc. 10 juin 1901.)

problème posé par ABEL dans le Journal de Crelle (tome 2, page 286)[1]

»En supposant la série

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

convergente pour toute valeur positive, *moindre* que la quantité r; on propose de trouver la limite vers la quelle converge la valeur de la fonction $f(x)$ en faisant converger x vers la limite r.»

ABEL suppose évidemment que r est le rayon de convergence de la série. Il ressort de nos connaissances actuelles qu'il y a une profonde différence entre les deux cas où r est un point singulier ou bien un point régulier de la fonction $f(x)$. C'est ce dernier cas qui a été traité jusqu'ici.

Il était bien connu dès les débuts du calcul infinitésimal que même dans ce cas il n'est nullement nécessaire que la série $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \ldots$ soit convergente. Considérons par exemple la formule

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 - \ldots; \qquad x = 1$$

LUCIUS HANNI *Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes.* (Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg. 12, 1901.)

IVAR FREDHOLM. *Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler* (Öfvers. af K. Vet.-Akad. förhandl. 1901.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes.* (Comptes rendus etc. 7 juillet 1902.)

Voir encore mes articles:

Über eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe. Göttinger Nachrichten 1900.

On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series. Proc. of the London Math. Soc. 32, 1900.

Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. Bd. 9, 1901.

Sur une formule de M. Fredholm. Comptes rendus etc. 25 mars 1901.

Sur la série de Bernoulli. Comptes rendus etc. 10 juin 1901.

Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène. Comptes rendus etc. 12 août 1901.

Sur le terme complémentaire de une développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence. (Öfvers. af K. Vet.-Akad. förhandl. 1901.)

[1] Oeuvres. Nouvelle édition (SYLOW et LIE). Tome I, page 618.

qui faisait autrefois l'objet de tant de discussions. Le problème d'ABEL consiste donc dans le cas où $x = r$ est un point régulier à remplacer l'expression $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ valable en général seulement pour $0 \leqq x < r$ par une autre expression formée au moyen des constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ mais valable pour $0 \leqq x \leqq r$. En posant le problème ainsi on est conduit naturellement au problème plus général où il faut construire l'expression demandée en sorte qu'elle soit valable pour tous les points réguliers de $f(x)$ situés sur l'axe réelle depuis $x = 0$ jusqu'au premier point singulier. Du moment que l'on envisage le problème à ce point de vue il est clair qu'on doit étarter la restriction que la variable x passe seulement par des valeurs réelles et qu'on doit exiger de l'expression cherchée qu'elle représente la fonction non seulement sur l'axe réelle mais encore sur tout autre vecteur, issu du centre $x = 0$, jusqu'au premier point singulier; autrement dit, que l'expression cherchée représente la fonction à l'intérieur de *l'étoile principale*[1] *des constantes* $c_0, \underline{|1} c_1, \underline{|2} c_2, \underline{|3} c_3, \ldots$.

On trouvera la solution complète de ce problème dans mes trois notes précédents.

Envisagé à un point de vue un peu différent le problème est un de ceux que WEIERSTRASS avait posés pour le développement futur de la théorie des fonctions. On sait que le grand analyste regardait comme le but ideal de la théorie des fonctions de trouver pour des classes de fonctions aussi étendues que possible des expressions arithmétiques valables et gardant la même forme dans tout le domaine d'existence de la fonction. Nous pouvons nous reporter entre autres à la phrase suivante qui se trouve dans la transcription[2] d'une communication faite par WEIERSTRASS vers la fin des années 1880 au séminaire de Berlin et où il rendait compte de différents travaux sur ce sujet: »Weiter ist man bis Heut noch nicht ge: kommen, aber es scheint, als ob das Ziel, welches ich vor langen Jahren der Functionentheorie steckte, nicht unreichbar sei: dass nämlich *überall, wo zwischen mehreren Veränderlichen Zusammenhang besteht, es möglich sein müsse, ihn in beständig gültiger Form darzustellen.*« La relation analytique la plus générale au sens de WEIERSTRASS entre deux variables peut être ramenée au cas où l'une est exprimée en série de puissances de l'autre. Au point de vue de WEIERSTRASS mon problème revient donc après avoir

[1] Pour la définition de l'étoile principale voir Note I, page 48, Note II, page 200.

[2] Je dois la connaissance de cette transcription à M. CARL ITZIGSOHN à Berlin.

défini la branche uniforme d'une fonction monogène la plus étendue possible à trouver une représentation arithmétique de cette branche possédant le caractère demandé d'être valable et de garder sa forme dans tout le domaine de la branche.

Dans les parties précédentes de ce mémoire je n'ai employé, que les considérations les plus élémentaires sur la série des puissances et n'ai jamais eu recours à l'intégrale de CAUCHY. En s'appuyant cependant sur la théorie de l'intégration entre des limites imaginaires on a l'avantage d'obtenir un terme complémentaire déterminé parfaitement analogue à celui obtenu par CAUCHY dans le cas du développement de TAYLOR. La démonstration de mes théorèmes se présente en même temps sous une forme extrêmement simple. C'est ce que je me propose de montrer dans le premier paragraphe de ce mémoire.

En partant de l'intégrale de CAUCHY on obtient encore d'une manière fort simple l'expression d'une branche fonctionnelle au moyen de cette intégrale célèbre de LAPLACE [1] qui à fait l'objet d'un des mémoires les plus suggestifs d'ABEL [2] et dont des nouvelles propriétés les plus remarquables ont été découvertes en ces dernières années par M. BOREL. [3]

M. BOREL a montré que l'intégrale de LAPLACE-ABEL est valable dans une étoile qu'il appelle le polygone de sommabilité. M. PHRAGMÉN [4] de son côté a montré que ce polygone de sommabilité est en même temps une étoile de convergence. Je montrerai dans le paragraphe 2 qu'on obtient au moyen d'une légère modification une intégrale possèdant une étoile de convergence $A^{(\alpha)}$ qui s'approche indéfiniment de l'étoile principale A en même temps que α tend vers zéro. Pour $\alpha = 1$ cette étoile devient le polygone de sommabilité de M. BOREL.

---

[1] *Théorie analytique des probabilités.* (Oeuvres, Tome 7.) Livre premier. Seconde partie.

[2] *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* (SYLOW et LIE, Oeuvres d'ABEL t. 2, pag. 67—81.)

[3] *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901.

[4] *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)^{-a}\,da$. (Comptes rendus etc. 10 juin 1901.)

§ 1.

Soit

$$v = f(u \mid \alpha) \tag{1}$$

une transformation biuniforme transformant le cercle $|u| < R$, $R > 1$, en une surface finie et simplement connexe, et supposons que les points $u = 0$, $v = 0$ ainsi que $u = 1$, $v = 1$ se correspondent.

Soit encore:

$$f(u \mid 1) = u. \tag{2}$$

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy, \tag{3}$$

où S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $f(y \mid \alpha)$ ainsi que $F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))$ sont des fonctions monogènes et régulières de y, et qui renferme dans son intérieur les deux points $y = 0$, $y = u$. On suppose l'intégrale prise dans le sens positif.

On a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \tag{4}$$

$$= F(a + (x - a)f(u \mid \alpha)) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

l'intégrale $\int^{(0)}$ étant prise dans le sens positif autour du point $y = 0$. Posons maintenant:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a)f(y \mid \alpha) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y \mid \alpha)^2 + \dots}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

Nous avons supposé $\frac{1}{y} f(y \mid \alpha)$ fini pour $y = 0$. Par suite

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) f(y|\alpha) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|\alpha)^2 + \dots + \frac{1}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n f(y|\alpha)^n}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

En faisant alors:

$$(6)\qquad g_{\mu n}(u \mid \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{(f(y \mid \alpha))^\mu}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

on obtient:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ & = g_{0n}(u \mid \alpha) F(a) + \frac{g_{1n}(u \mid \alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{g_{2n}(u \mid \alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \\ & \qquad + \frac{g_{nn}(u \mid \alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n. \end{aligned}\right.$$

En se rappelant la correspondance entre les deux points $u = 0$, $v = 0$ et en posant:

$$(8)\qquad D^{(\nu)} f^\mu = [D^{(\nu)} (f(y \mid \alpha))^\mu]_{y=0},$$

on voit que:

$$(9)\qquad g_{\mu n}(u \mid \alpha) = \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\underline{|\mu}} \cdot u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{\underline{|\mu + 1}} \cdot u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{\underline{|n}} \cdot u^n.$$

On a encore:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} & g_{0n}(u \mid \alpha) = 1, \\ & g_{\mu 0}(u \mid \alpha) = 0. \end{aligned}\right.$$

On obtient donc:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a+(x-a)f(y\mid a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\
&= F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}\cdot u^{\mu} + \frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}}\cdot u^{\mu+1} + \ldots + \frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}\cdot u^{n}\right) F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}
\end{aligned}
\right.
$$

et par suite en vertu de (4):

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(a+(x-a)f(u\mid a)) = F(a) \\
&+ \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}\cdot u^{\mu} + \frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}} u^{\mu+1} + \ldots + \frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}\cdot u^{n}\right)\cdot F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y\mid a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy;
\end{aligned}
\right.
$$

ou en ordonnant l'expression (11) suivant les puissances de u

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(a+(x-a)f(u\mid a)) = F(a) \\
&+ \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)}f^{2}}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^{2} + \ldots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right) u^{\mu} \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y\mid a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.
\end{aligned}
\right.
$$

On obtient donc en supposant $u = 1$, et en introduisant:

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha_{\mu n}(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{(f(y\mid a))^{\mu}}{y-1}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\
&= \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} + \frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}} + \ldots + \frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}
\end{aligned}
\right.
$$

la formule suivante:

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(x) &= F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{a_{\mu n}(a)}{\underline{|n}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\
&= F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \right. \\
&\quad \left. + \frac{D^{(\mu)}f^\mu}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy.
\end{aligned}
\right.
$$

En ayant égard la formule (9) ainsi qu'à la définition de $f(u|\alpha)$ et à la correspondance des points $u = 1$, $v = 1$, on obtient

$$
(16)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1,
$$

égalité qui a lieu pour chaque valeur donnée de μ.

Employons maintenant la fonction génératrice $f(u|\alpha)$, $|u| \leqq 1$, pour former une étoile $A^{(\alpha)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes

$$
F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a) \ldots [1]
$$

Soit X un domaine fini quelconque situé à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. Il existera toujours une étoile E de centre a qui renfermera X et qui sera elle-même située à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$.[2] Si l'on fait parcourir à x l'étoile E l'ensemble $\overline{E}$ de tous les points différents Z qu'on obtient en faisant

$$
z = a + (x-a)f(u|\alpha); \qquad |u| \leqq r; \qquad 1 < r < R
$$

comdrendra l'étoile E et restera en même temps situé à l'intérieur de A, si r est choisi suffisamment rapproché de l'unité.

---

[1] Note 1, page 48. Note 2, page 200. Note 3, page 219.

[2] Note 1, page 50. A la dixième ligne de la page il y a une faute d'impression. Il faut lire $\mathfrak{E}$ au lieu de E.

En introduisant pour S le contour C qui représente la circonférence $|y| = r$ on peut écrire la formule (15) sous la forme suivante:

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
FA^{(\alpha)}(x) &= F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \\
&\qquad + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\
&= F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|\mu}} F^{(2)}(a)(x-a) + \ldots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) + \frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy
\end{aligned}
\right.
$$

et cette égalité fondamentale aura lieu pour tous les points x qui appartiennent à un domaine X situé à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$. En faisant $\alpha = 1$ la formule (17) deviendra le développement de TAYLOR avec le terme complémentaire de CAUCHY.

On a en effet (voir 2)

$$f(y\,|\,1) = y; \qquad \alpha_{\mu n}(1) = 1; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Le terme complémentaire devient:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{C}} \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} dz$$

où $\bar{C}$ est un cercle de centre a qui embrasse le point x et se trouve en même temps à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$ qui de son côté n'est autre chose que le cercle de convergence du développement de TAYLOR. C'est la forme connue de CAUCHY du terme complémentaire dans le cas où x représente une variable complexe.

Revenons au cas général. Nous avons vu que le rayon r de C étant pris suffisamment rapproché de l'unité, $F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))$ appartient toujours à un domaine $\bar{E}$ situé à l'intérieur de l'étoile principale A.

La valeur absolue de $\dfrac{F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-1}$ possède, par conséquent, une limite supérieure finie lorsque y parcourt la circonférence C. En faisant grandir n suffisamment on pourra donc rendre la valeur absolue du terme complémentaire inférieure à toute quantité positive donnée si petite qu'elle soit.

Par conséquent l'égalité:

$$(18)\quad \begin{cases} FA^{(a)}(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\mu n}(a)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\ \qquad = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) \\ \qquad\qquad + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \Big) \end{cases}$$

a lieu pour tout point à l'intérieur de $A^{(a)}$.

La valeur limite:

$$(19)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\mu n}(a)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|5}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \Big)$$

est encore uniformément convergente pour tout domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Supposons inversement que la valeur limite (19) soit convergente pour $x = x_0$. L'identité:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-a)^{\mu} \Big)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(2)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-a)^{\mu} \Big)$$

ayant lieu, il s'en suit en vertu d'un théorème d'ABEL[1] que la valeur limite:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{u^{\mu}}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-x)^{\mu} \Big)$$

[1] Oeuvres. Nouvelle édition. (SYLOW et LIE.) Page 223. Théorème V.

sera convergente pour $|u| < 1$. En se rappelant que $f(0|\alpha) = 0$, on voit que l'égalité (13) a lieu pour $x = x_0$ si l'on donne à $|u|$ des valeurs suffisamment petites. On voit encore qu'en choisissant pour S un contour comprenant le cercle de centre zéro et de rayon $|u|$ on obtiendra

$$F(a + (x_0 - a)f(u|\alpha))$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{u^\mu}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0 - a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{2}} F^{(2)}(a)(x_0 - a)^2 + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{D^{(\mu)}f^\mu}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0 - a)^\mu \right).$$

Le second membre étant convergent pour $|u| < 1$, il s'ensuit que le premier membre est une fonction régulière de u pour $|u| < 1$. Par suite en vertu de la définition de l'étoile $A^{(\alpha)}$, le point x_0 est nécessairement ou un sommet de $A^{(\alpha)}$ ou un point à l'intérieur de cette étoile.

En nous rappelant encore (voir note 3) que la fonction génératrice $f(u|\alpha)$ peut être choisie telle que $A^{(\alpha)}$ tende indéfiniment vers A en même temps que α tend vers zéro et telle que les $\alpha_{\mu n}(\alpha)$ soient tous des nombres positifs, nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici sous cette nouvelle forme du théorème 4:

Théorème 4a. *Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive inférieure à l'unité et par $A^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A qui sera engendrée par la fonction génératrice $f(u|\alpha)$. On pourra toujours choisir cette fonction telle que α étant pris suffisamment petit l'étoile $A^{(\alpha)}$ renferme à son inténieur un domaine donné quelconque situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $A^{(1)}$ devienne le cercle concentrique à A et inscrite dans A. De plus A étant l'étoile principale d'une suite de constantes*

$$F(a)\,,\ F^{(1)}(a)\,,\ \dots,\ F^{(\mu)}(a)\,,\ \dots$$

assujetties à la condition de Cauchy, on pourra choisir $f(u|\alpha)$ en sorte que l'expression limite

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right],$$

où

$$\alpha_{\mu n}(\alpha); \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \ldots, n, \\ n = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{matrix}$$

sont des constantes positives déterminées jouissant toujours des deux propriétés

$$\alpha_{\mu n}(1) = 1, \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1$$

et ne dépendant par suite que de la fonction génératrice, possède une étoile de convergence identique à $A^{(\alpha)}$ *et telle que l'égalité*

$$FA(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

ait lieu partout à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. *L'expression limite double:*

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

a une étoile de convergence identique à l'étoile A *et l'égalité*

$$FA(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(a-x) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right]$$

a lieu partout à l'intérieur de A.

Si l'on s'arrête dans le passage à la limite à un nombre déterminé n *on aura l'égalité*

$$FA^{(\alpha)}(x)$$
$$= F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu$$
$$+ \int^{C} \frac{F(a + (x-a)f(y \mid \alpha))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif et C *désignant une circonférence* *de centre zéro et de rayon $r(1 < r < R)$ en sorte que $a + (x - a)f(y|\alpha)$ appartient à l'intérieur de l'étoile $A^{(a)}$.*

Au lieu de l'intégrale (3) on aurait pu prendre comme point de départ d'autres intégrales par exemple

$$\frac{\left(\frac{df_1(u\,|\,\alpha)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i}\int^{c}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{f_1(y\,|\,\alpha)-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1}dy$$

où $f_1(u|\alpha)$ est une fonction ayant les mêmes propriétés que $f(u|\alpha)$ et ayant encore cette propriété que

$$\left(\frac{df_1(u\,|\,\alpha)}{du}\right)_{u=1}$$

n'est pas égale à zéro. Les constantes $\alpha_{\mu n}(\alpha)$ deviennent en ce cas

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) = -\frac{\left(\frac{df_1(u\,|\,\alpha)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{(f(y\,|\,\alpha))^{\mu}}{f_1(y\,|\,\alpha)-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1}dy; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n$$

et elles conservent les deux propriétés

$$\alpha_{\mu n}(1) = 1, \qquad \lim_{n=\infty}\alpha_{\mu n}(\alpha) = 1.$$

Mais il ne semble pas nécessaire que l'étoile $A^{(a)}$ reste une étoile de convergence pour chaque choix de $f(u|\alpha)$.

Les développements que j'ai donnés dans ma troisième note se rapportent spécialement à une certaine fonction génératrice au moyen de laquelle on obtient une construction géométrique très-simple de l'étoile $A^{(a)}$. Les nombres $\alpha_{\mu n}(\alpha)$; $\begin{matrix}\mu = 1, 2, \ldots, n\\ n = 1, 2, 3, \ldots, \infty\end{matrix}$ se calculent alors par des formules de recurrences.

M. Fredholm[1] a proposé pour fonction génératrice la fonction

$$f(u|\alpha) = \frac{\log(1-(1-\alpha)u)}{\log\alpha}$$

[1] G. Mittag-Leffler. *Sur une formule de M. Fredholm.* Comptes rendus etc. 25 mars 1901.

Ivar Fredholm. *Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler.* Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förhandl. 13 mars 1901.

et il obtient alors l'élégant développement:

$$FA^{(a)}(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(1-a)^{\mu}}{\underline{|\mu}} \Big[h_{\mu-1}^{(\mu)} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \dots$$

$$+ h_1^{(\mu)} F^{(\mu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu-1} + F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu} \Big]$$

où

$$H = \log \frac{1}{a}$$

et où les constantes $h_{\mu-1}^{(\mu)}, \dots, h_1^{(\mu)}$ sont les coefficients de la faculté

$$\lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + \mu - 1)$$

c'est à dire des nombres entiers positifs définis par l'égalité:

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \mu - 1) = \lambda^{\mu} + h_1^{(\mu)} \lambda^{\mu-1} + \dots + h_{\mu-1}^{(\mu)} \lambda.$$

La construction géométrique de $A^{(a)}$ devient cependant en ce cas moins simple que si l'on employait comme dans ma troisième note, la figure cordiforme. Les formules explicites pour les coefficients de la faculté sont de même d'une très-grande complication.[1]

C'est donc un problème qui n'est pas dépourvu d'intérêt de trouver une fonction génératrice pour laquelle les expressions explicites des constantes

$$\alpha_{\mu n}(\alpha); \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \dots, n, \\ n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \end{matrix}$$

soient suffisamment simples.

On trouve une solution de ce problème en introduisant comme fonction génératrice

$$v = f(u \mid \alpha) = \frac{au}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)^{\alpha}}; \qquad \frac{1}{R} = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{20}$$

On voit que la transformation $v = f(u \mid \alpha)$ est biuniforme pour $|u| < R$ et que les points $u = 0$, $v = 0$ ainsi que $u = 1$, $v = 1$ se correspondent.

[1] Oscar Schlömilch. *Compendium der höheren Analysis.* Zweiter Band. Dritte Auflage. Page 23—31.

On voit encore que $u = -1$, $v = -\dfrac{a}{\left(2 - a^{\frac{1}{a}}\right)^{a}}$ se correspondent. Le point v qui correspond à $u = -1$ est donc situé sur le prolongement du vecteur (01) au delà de zéro et tend vers zéro avec α. Il est encore facile de voir que l'image du cercle $|u| = 1$ décrite par v s'aplatit indéfiniment en même temps que α tend vers zéro. En effet si l'on pose

$$1 - \frac{e^{i\vartheta}}{R} = \rho e^{i\theta}$$

on aura

$$v = x + iy = \frac{a}{\rho^{a}} e^{i(\vartheta - a\theta)}$$

et par suite

$$y = \frac{a}{\rho^{a}} \sin(\vartheta - \alpha\theta),$$

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{a}{\rho^{a}}\left[\cos(\vartheta - \alpha\theta) + \frac{a}{R\rho}\cos(2\vartheta - (1 + \alpha)\theta)\right].$$

On voit d'un côté que $\frac{1}{\rho}$ diminue constamment depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \pi$ et d'un autre côté que $\frac{dy}{d\vartheta}$ étant positif entre $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ la valeur de y augmente depuis zéro jusqu'à

$$\frac{a}{\left[2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - a^{\frac{1}{a}}\left(2 - a^{\frac{1}{a}} - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{a}{2}}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\theta_{\frac{\pi}{4}}\right)$$

où $\theta'_{\frac{\pi}{4}}$ est la valeur de θ correspondant à $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Considérons maintenant y. Le facteur $\frac{a}{\rho^{a}}$ va en diminuant depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \pi$. L'autre facteur $\sin(\vartheta - \alpha\theta)$ augmente au contraire depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Il en sera de même de y. La quantité

$$\frac{a}{\left[2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - a^{\frac{1}{a}}\left(2 - a^{\frac{1}{a}} - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{a}{2}}}$$

est donc évidemment une quantité plus grande que la valeur maxima de y. Mais cette quantité tend indéfiniment vers zéro avec la quantité α.

Il est donc démontré que l'image du cercle $|u| = 1$ décrit par v tend indéfiniment vers la ligne droite menée de $v = 0$ à $v = 1$ lorsque α tend indéfiniment vers zéro. La fonction génératrice possède par conséquent toutes les propriétés énoncées dans le théorème 4.

Faisons maintenant le calcul des constantes $\alpha_{\mu n}(\alpha)$. La formule (14) nous donne immédiatement

$$(21)\qquad \alpha_{\mu n}(\alpha) = \alpha^{\mu}\Bigg(1 + \frac{\alpha}{\underline{|1}}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|2}}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-\mu-1)}{\underline{|n-\mu}}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{n-\mu}\Bigg).$$

En faisant $\alpha = \frac{1}{n}$ on obtient l'expression très-simple

$$(22)\qquad F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}\left(\frac{1}{n}\right)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}\left(\frac{1}{n}\right)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

qui représente $FA(x)$ à l'intérieur de l'étoile principale A et qui converge en même temps uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de A. L'étoile A cependant comme l'a fait voir M. Borel[1] n'est pas en général une étoile de convergence de cette expression; au contraire nous avons vu que c'est toujours une étoile de convergence de l'expression limite double

$$F(a) + \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right\}$$

qui aussi bien que (22) représente $FA(x)$, à l'intérieur de A.

---

[1] Emile Borel. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.* Ce journal t. 24, page 309 et suivantes. Voir notre troisième note, T. 24, page 243.

§ 2.

Les résultats obtenus précédemment proviennent tous de l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy.$$

Si l'on introduit dans cette intégrale au lieu du facteur $\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}$ un autre facteur conservant la propriété d'être égal à l'unité pour $y=u$ et d'avoir $y=0$ pour seul point singulier on obtient d'autres résultats non moins remarquables.

Nous choisirons dans ce paragraphe pour multiplicateur $e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}$, ω désignant une constante positive et c'est l'intégrale

$$(23)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

qui sera l'objet de notre étude. Il convient de commencer par le cas le plus simple

$$f(y\,|\,\alpha)=y;\qquad u=1$$

et d'étudier l'intégrale

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

Nous supposerons comme dans le premier paragraphe que S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $F(a+(x-a)y)$ est une fonction monogène et régulière et renfermant à son intérieur les deux points $y=0$, $y=1$.

On a

$$(25)\quad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy=F(x)+\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

On a encore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\,e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,dy$$

$$=\frac{e^{-\omega}}{2\pi i}\int^{(0)}\Big\{F(a)+\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)y\Big)$$

$$+\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2\Big)y^2+\dots\Big\}.$$

$$\Big\{1+\frac{1}{\underline{|1}}\frac{\omega}{y}+\frac{1}{\underline{|2}}\Big(\frac{\omega}{y}\Big)^2+\frac{1}{\underline{|3}}\Big(\frac{\omega}{y}\Big)^3+\dots\Big\}.\,dy$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots$$

$$+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}.$$

La série

$$(26)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\dots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

est convergente pour chaque point auquel correspond un contour S.[1]

---

[1] En réalité la série est toujours absolument convergente pour toute valeur de x et de ω. On peut le voir de la manière suivante qui m'a été indiquée par M. PHRAGMÉN. Soit une quantité positive plus petite que le rayon de convergence de la série $\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$ et soit g la valeur maxima de $\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|$ pour $|x|=r$.

On aura alors

$$\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)\right|\leq gr^{-\mu}.$$

Par suite x étant quelconque

$$\sum_{\mu=0}^{n}\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\leq g\,\frac{1-\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1-\frac{|x-a|}{r}}.$$

On a donc:

$$(27)\qquad F(x) = e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy$$

égalité valable pour chaque point auquel correspond un contour S.

En vertu de la convergence de la série (26) on a

$$(28)\qquad \lim_{n=\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}}F^{(n)}(a)(x-a)^{n}\right)\frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}} = 0.$$

Par suite en observant que:

$$(29)\qquad \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu}}{\underline{|\mu}} = \int_{0}^{\omega}\left(\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu-1}}{\underline{|\mu-1}} - \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu}}{\underline{|\mu}}\right)d\omega$$

on voit que

$$(30)\qquad F(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^{2}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

D'où

$$\sqrt[n]{\left(\sum_{\mu=0}^{n}\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\right)\frac{1}{\underline{|n+1}}} \leq \sqrt[n]{g\,\frac{1-\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1-\frac{|x-a|}{r}}}.$$

D'où

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\sum_{\mu=0}^{n}\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\cdot\frac{1}{\underline{|n+1}}} = 0.$$

Par suite etc. etc.

On aurait pu obtenir aussi bien les deux formules fondamentales (27) et (30) en prenant comme point de départ l'identité:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left[\left(\frac{1}{y}-1\right)\int_{0}^{\omega}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}d\omega+1\right]dy$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}dy-\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left(\int_{0}^{\omega}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}d\omega\right)dy$$

$$=F(x)-\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left(\int_{0}^{\omega}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}d\omega\right)dy.$$

La série:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^{2}}(\omega(x-a))^{\mu}$$

est évidemment une série toujours convergente par rapport à ω.

Par conséquent

$$(31)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^{2}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}=\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^{2}}\cdot(\omega(x-a))^{\mu}\right)d\omega$$

ou en faisant

$$(32)\qquad F(a\,,\,\omega(x-a))=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^{2}}(\omega(x-a))^{\mu}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}=\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega.$$

Par conséquent:

$$F(x) = \int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int^S \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy \tag{33}$$

nouvelle formule qui mérite d'être regardée comme fondamentale en même temps que les formules (27) et (30).

Nous voulons construire maintenant de la manière suivante une étoile $A^{(1)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes

$$F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\,\ldots,\, F^{(\mu)}(a)\,,\,\ldots.$$

Fixons un vecteur l issu du centre a et limitons ce vecteur à la longueur $\mathfrak{r}$. En prenant $\mathfrak{r}$ suffisamment petit, le cercle ayant cette portion de l comme diamètre fera partie de A. En désignant par ρ la limite supérieure de $\mathfrak{r}$, en portant sur l la longueur ρ et en faisant tourner l une fois autour de a on aura construit l'étoile $A^{(1)}$.

Choisissons maintenant pour S une circonférence $\mathfrak{C}$ de centre $y=\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$; $r>1$. On tire alors des formules (27), (30) et (33) les trois égalités suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
FA^{(1)}(x) &= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,\\
FA^{(1)}(x) &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\\
&\qquad +\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy\\
FA^{(1)}(x) &= \int_0^\omega e^{-\omega}F(a+\omega(x-a))d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

qui sont toutes trois valables pour un domaine X quelconque situé à l'intérieur de $A^{(1)}$, pourvu que le diamètre $\mathfrak{r}$ soit pris suffisamment rapproché de l'unité.

Les séries:

$$(26) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

$$(31) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu},$$

$$(32) \qquad \mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^2}(\omega(x-a))^{\mu}$$

sont uniformément convergentes pour le domaine X. Elles sont encore toujours et absolument convergentes tant par rapport à x que par rapport à ω.

La partie réelle de $\frac{1}{y}-1$ lorsque y décrit le contour de $\mathfrak{C}$, étant égale à

$$\frac{1-\mathfrak{r}^2}{(1-\mathfrak{r})^2+2\mathfrak{r}(1+\cos\varphi)}$$

où on a fait $y=\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{r}}{2}e^{i\varphi}$, on voit que cette partie réelle reste toujours négative.

On a par conséquent

$$(35) \qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy=0.$$

En choisissant $\mathfrak{r}$ suffisamment rapproché de l'unité la convergence vers zéro de cette expression limite devient uniforme pour tout domaine X à l'intérieur de $A^{(1)}$.

On tire alors de (34) les trois formules

$$(36) \qquad FA^{(1)}(x)$$

$$=\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}F^{(n)}(a)(x-a)^{n}\right)\frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}},$$

$$FA^{(1)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega}\omega^n d\omega}{\lfloor n} F^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{37}$$

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))d\omega \tag{38}$$

toutes trois valables à l'intérieur de $A^{(1)}$. Les seconds termes de chacune de ces trois égalités sont uniformément convergents pour chaque domaine X à l'intérieur de $A^{(1)}$.

La formule (36) est due à M. BOREL.[1] La formule (38) est la célèbre formule de LAPLACE-ABEL.[2] La fonction $\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))$ est la fonction qu'ABEL nomme »la fonction génératrice» tandis que la branche fonctionnelle $FA^{(1)}(x)$ est »la fonction déterminante». C'est à M. BOREL que revient l'honneur d'avoir découvert le premier ce fait important que l'intégrale de LAPLACE-ABEL

$$\int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))d\omega \tag{39}$$

est convergente partout à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$ qui d'ailleurs est une étoile circonscrite au cercle de convergence de la série de TAYLOR

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu$$

et qui ne coïncide avec ce cercle qu'en des cas spéciaux.

J'ai donné le développement que je viens d'établir, dans une lettre à HERMITE écrite peu de temps après la première publication de M. BOREL.[3]

Une question importante restait encore ouverte après les recherches de M. BOREL. Il était bien démontré que l'intégrale (39) avait un sens

---

[1] voir: *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901.

[2] LAPLACE. *Théorie analytique des probabilités.* (Oeuvres. T. VII.) Livre premier. Seconde partie.

ABEL. *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* (SYLOW et LIE. Oeuvres II, 67—81.)

[3] *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables.* Journal des Math. Série V, t. 2, 1896.

partout à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$, mais on ne savait pas si l'intégrale possédait ou non une étoile de convergence. C'est M. PHRAGMÉN [1] qui a élucidé cette question en démontrant que l'étoile $A^{(1)}$ est une étoile de convergence des trois expressions

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega,$$

$$(40) \qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

$$(41) \qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty e^{-\mu}\omega^\mu d\omega}{(\underline{|\mu})} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu .$$

La démonstration de M. PHRAGMÉN peut être résumée ainsi:

Il démontre d'abord le théorème suivant:

»Supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega$$

où $\varphi(\omega)$ est une fonction réelle et uniforme et où t_0 est réel, soit convergente. Désignons par ε une quantité positive aussi petite que l'on voudra et par $R(t-t_0)$, la partie réelle de $t-t_0$, t étant réelle ou complexe.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega$$

sera uniformément convergente pour $R(t-t_0) \geqq \varepsilon$.»

En effet posons

$$\Phi(\omega) = \int_0^\omega e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega,$$

[1] *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes rendus etc. 10 juin 1901.

on aura, pour M positif et suffisamment grand,

$$|\Phi(\omega)| < M.$$

On a encore:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}e^{-\omega t_0}\varphi(\omega)d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}d\Phi(\omega).$$

En effectuant une intégration par partie il vient donc

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega = \left[e^{-\omega(t-t_0)}\Phi(\omega)\right]_{\omega_1}^{\omega_2} + (t-t_0)\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}\Phi(\omega)d\omega.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega\right| &\leqq M(e^{-\omega_1\varepsilon} + e^{-\omega_2\varepsilon}) + |t-t_0| . M . \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega\varepsilon}d\omega \\ &= M(e^{-\omega_1\varepsilon} + e^{-\omega_2\varepsilon}) + \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} . M . (e^{-\omega_1\varepsilon} - e^{-\omega_2\varepsilon}) \\ &< 2Me^{-\omega_1\varepsilon} + M\frac{|t-t_0|}{\varepsilon}e^{-\omega_1\varepsilon}.\end{aligned}$$

Le terme à droite deviendra aussi petit qu'on veut si l'on fait croître ω suffisamment. Le théorème est donc démontré.

Supposons maintenant que l'expression (40) soit convergente pour $x = x_0$. On a:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_2}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega_2^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \\ &\qquad - \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_1}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega_1^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\left(\frac{e^{-\omega_2}\omega_2^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} - \frac{e^{-\omega_1}\omega_1^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\frac{e^{-\omega}\omega^\mu}{\underline{|\mu}} - \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}\right)d\omega \quad \text{[c. f. (29)]}\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\omega^{\mu}\, d\omega}{(\underline{|\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\ = \displaystyle\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega \end{array}\right.$$

ou en faisant

$$\omega(x-a) = w, \tag{43}$$

$$\frac{1}{x-a} = t, \tag{44}$$

$$\mathfrak{F}(a\,,\ w) = \varphi(w) + i\psi(w), \tag{45}$$

$\varphi(w)$ et $\psi(w)$ étant réels, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega &= t\int_{w_1}^{w_2} e^{-wt}\mathfrak{F}(a\,,\ w)\,dw \\ &= t\left[\int_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)\,d\omega + i\int_{w_2}^{w_2} e^{-\omega t}\psi(\omega)\,d\omega\right]. \end{aligned} \tag{46}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que chacune des trois expressions (39), (40), (41) soit convergente est donc que le module de chacune des deux expressions

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)\,d\omega, \qquad \int_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\psi(\omega)\,d\omega,$$

w_1 étant pris suffisamment grand et w_2 étant une quantité positive quelconque remplissant la condition $w_1 < w_2$, reste plus petite qu'une quantité positive donnée si petite qu'elle soit. Cette condition est supposée remplie pour $t_0 = \frac{1}{x_0 - a}$. D'après le théorème de M. Phragmén cette condition sera encore remplie pour

$$R\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0 - a}\right) = R(t - t_0) \geqq \varepsilon, \tag{47}$$

c'est à dire pour tous les points à l'intérieur d'un cercle ayant le vecteur (ax_0) pour diamètre.

L'intégrale

$$(39)\qquad \int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega$$

est donc une fonction monogène et régulière de x partout à l'intérieur de ce cercle. Le point x_0 est donc ou un sommet ou un point à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$. Cette étoile de convergence de l'intégrale (39) est en même temps aussi en vertu de la formule (42) une étoile de convergence des deux autres expressions (40) et (41).

Les résultats obtenus jusqu'ici dans ce paragraphe peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 7 a. *Désignons par A une étoile de centre a et par $A^{(1)}$ une autre étoile que nous appellerons l'étoile de Borel; cette étoile de Borel sera concentrique à A et inscrite dans A et sera engendrée de la manière suivante: On limite chacun des vecteurs l issu du centre a à une longueur ρ, limite supérieure d'une autre longueur $\mathfrak{r}$ limitant l elle même et telle que le cercle ayant $\mathfrak{r}$ comme diamètre fasse partie de A.*

L'étoile A étant l'étoile principale des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ assujetties à la condition de Cauchy, chacune des trois expressions

$$\int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega; \qquad \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^3}(\omega(x-a))^\mu,$$

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_0^\infty e^{-\omega}\omega^\mu\,d\omega}{(\underline{|\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu$$

aura l'étoile de Borel pour étoile de convergence et l'égalité

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\mu=0}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(\mu)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_0^\infty e^{-\omega}\omega^\mu\,d\omega}{(\underline{|\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu$$

aura lieu partout à l'intérieur de l'étoile de Borel.

Si l'on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre déterminé fini on aura l'égalité

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega + \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{|\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty e^{-\omega}\omega^\mu d\omega}{(|\underline{\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

où l'intégrale $\int^{\mathfrak{C}}$ *est prise dans le sens positif et où* $\mathfrak{C}$ *désigne une circonférence de centre* $\frac{1}{2}$ *et de rayon* $\frac{1}{2}r$ $(r > 1)$ *en sorte que* $a + (x-a)y$ *appartient à l'intérieur de* $A^{(1)}$.

Revenons maintenant à l'étude de l'intégrale générale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy. \tag{23}$$

Nous donnerons à $f(y\,|\,\alpha)$ la même signification qu'au premier paragraphe et nous supposerons comme dans ce paragraphe que S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $f(y\,|\,\alpha)$ ainsi que $F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))$ sont des fonctions monogènes et régulières et qui renferme dans son intérieur les deux points $y = 0$, $y = u$. On a:

$$F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha))$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy$$

et encore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy=-\frac{e^{-\omega}}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}dy$$

$$-\frac{e^{-\omega}\omega}{|\underline{1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)dy-\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-\omega}\omega^2}{|\underline{2}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^2dy$$

$$-\ldots-\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1}dy-\ldots$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1}dy.$$

Par conséquent en vertu de (7):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{g_{1\mu}(u|a)}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{g_{2\mu}(u|a)}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^{\mu}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{g_{\mu\mu}(u|a)}{|\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\sum_{\nu=1}^{\mu}\frac{u^{\nu}}{|\underline{\nu}}\left(F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{D^{\nu}f^{2}}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^{2}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{|\underline{\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}\right).$$

Et par suite

$$(48)\qquad F(a+(x-a)f(u|a))$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{g_{1\mu}(u|a)}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{g_{\mu\mu}(u|a)}{|\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

ou en mettant $u = 1$

(49) $$F(x)$$
$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

On voit l'analogie parfaite avec la formule (27). Employons maintenant la fonction génératrice $f(u\,|\,\alpha)$ où u décrit une circonférence ayant pour diamètre la ligne droite comprise entre zéro et un pour former une étoile $\mathfrak{A}^{(a)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... On voit que cette étoile est circonscrite à l'étoile $A^{(a)}$ obtenue en faisant décrire à u la circonférence $|u| = 1$ et qu'elle ne coincide avec $A^{(a)}$ qu'en des cas spéciaux.

En prenant maintenant pour contour S une circonférence $\mathfrak{C}$ de centre $y = \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$, $(r > 1)$, on obtient:

(50) $$F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$$
$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x+a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,$$

égalité valable pour chaque domaine X à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$ pourvu que l'on choisisse r suffisamment rapproché de l'unité. De la même manière que l'on a demontré l'égalité (35) on demontre encore la suivante

(51) $$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy = 0.$$

On a donc:

(52) $$F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$$
$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

égalité valable pour chaque domaine à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. L'expression dans le second membre est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. On voit que cette formule est la généralisation directe de la formule (36) de M. BOREL.

On obtient facilement une généralisation analogue des formules (37) et (38). On a:

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}dy \\ &\qquad\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy \\ &=F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))-\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy. \end{aligned}\right.$$

On a encore:

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\Big[F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)f(y\,|\,\alpha) \\ &\qquad\qquad +\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2f(y\,|\,\alpha)^2+\ldots\Big]\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}. \end{aligned}\right.$$

La fonction $f(y\,|\,\alpha)$ s'annulant pour $y=0$ nous avons (c. f. (8))

$$(55)\qquad f(y\,|\,\alpha)^{\nu}=\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{\underline{|\nu}}y^{\nu}+\frac{D^{\nu+1}f^{\nu}}{\underline{|\nu+1}}y^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^{\nu}}{\underline{|\nu+2}}y^{\nu+2}+\ldots.$$

Par suite

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} f(y\,|\,\alpha)^\nu\left(\int_0^\omega e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\left(\frac{D^\nu f^\nu}{\underline{|\nu}}y^\nu+\frac{D^{\nu+1}f^\nu}{\underline{|\nu+1}}y^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^\nu}{\underline{|\nu+2}}y^{\nu+2}+\ldots\right)$$

$$\times\left(\int_0^\omega\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}\frac{\omega u}{y}+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\omega u}{y}\right)^2+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\omega u}{y}\right)^3+\ldots\right)e^{-\omega}d\omega\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\int_0^\omega e^{-\omega}\left(\frac{D^\nu f^\nu}{(\underline{|\nu})^2}(\omega u)^\nu+\frac{D^{\nu+1}f^\nu}{(\underline{|\nu+1})^2}(\omega u)^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^\nu}{(\underline{|\nu+2})^2}(\omega u)^{\nu+2}+\ldots\right)d\omega$$

d'où en faisant

$$(56)\qquad f_\nu(\omega u\,|\,\alpha)=\frac{D^\nu f^\nu}{(\underline{|\nu})^2}(\omega u)^\nu+\frac{D^{\nu+1}f^\nu}{(\underline{|\nu+1})^2}(\omega u)^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^\nu}{(\underline{|\nu+2})^2}(\omega u)^{\nu+2}+\ldots$$

il vient

$$(57)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} f(y\,|\,\alpha)^\nu\left(\int_0^\omega e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}=\int_0^\omega e^{-\omega}f_\nu(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega.$$

Par conséquent

$$(58)\quad\left\{\begin{aligned}&F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha))=\int_0^\omega e^{-\omega}d\omega\,.\,F(a)+\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}f_1(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)\\&+\frac{1}{2\pi i}\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}f_2(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}f_3(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|3}}F^{(3)}(a)(x-a)^3+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{2\pi i}\int^S\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy\end{aligned}\right.$$

ou en introduisant:

$$(59) \qquad \mathfrak{F}(x, f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega \mid \alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega \mid \alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots,$$

$$(60) \qquad F(a + (x-a) f(u \mid \alpha))$$

$$= \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(x, f, \omega u) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(x + (x-u) f(y \mid \alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy.$$

En faisant $\alpha = 1$, on obtient $f(y \mid \alpha) = y$. La fonction $\mathfrak{F}(x \mid f, \omega)$ devient en ce cas la fonction qui a été désignée auparavant par

$$\mathfrak{F}(a, \omega(x-a)); \qquad [\text{c. f. } (32)]$$

et on obtient l'égalité

$$(61) \qquad \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) = \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)).$$

En employant la terminologie d'Abel la nouvelle fonction $f_\nu(\omega u \mid \alpha)$ que nous venons d'introduire n'est autre chose que la fonction génératrice d'Abel à fonction déterminante $f(u \mid \alpha)^\nu$. On a donc l'égalité

$$(62) \qquad f(u \mid \alpha)^\nu = \int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega u \mid \alpha) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f(\nu y \mid \alpha)^\nu}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

qui mérite d'être signalée.

Choisissons maintenant pour contour S la circonférence $\mathfrak{C}$ définie précédemment (page 373) et en faisant $u = 1$ nous obtiendrons au lieu des formules (58) et (60), les deux suivantes:

$$(63) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega} d\omega \,.\, F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid \alpha) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid \alpha))}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,$$

$$(64) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid \alpha))}{y-a} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

valables pour chaque domaine X à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ pourvu que l'on prenne la quantité r qui définit le cercle $\mathfrak{C}$ suffisamment rapprochée de l'unité.

On obtient encore les deux formules:

$$(65) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid \alpha) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$(66) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

valables pour chaque domaine à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. Les expressions du second membre sont uniformément convergentes pour chaque domaine à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$.

On doit rapprocher ces deux formules (65) et (66) de la formule (52) obtenue précédemment.

Ces trois formules forment ensemble la généralisation directe des trois formules (36), (37), (38).

On aurait encore pu obtenir les formules (65), (66) en faisant subir à la formule (52) la même transformation que nous avons fait subir à (27) pour en déduire les formules (30) et (33).

Il reste encore une question très importante à éclaircir.

L'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ était une étoile de convergence dans le cas $\alpha = 1$. Est-ce encore une étoile de convergence pour les trois expressions (52), (65), (66) dans le cas général où $0 < \alpha \leqq 1$?

C'est effectivement ce qui a lieu et la démonstration n'est qu'une répétition de la démonstration de M. PHRAGMÉN dans le cas $\alpha = 1$. En effet supposons que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, \omega) d\omega$ soit convergente c'est à dire que l'expression

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, \omega u) d\omega = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, w) dw$$

soit convergente pour $u = 1$. D'après le théorème de M. PHRAGMÉN l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}}\mathfrak{F}(x_0 | f, w)dw$$

sera uniformément convergente pour $R\left(\frac{1}{u} - 1\right) \geqq \varepsilon$, où ε est une quantité positive aussi petite que l'on voudra, ce qui revient a dire que l'intégrale est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur d'un cercle décrit par la variable u et ayant le vecteur (01) pour diamètre. L'intégrale est donc une fonction monogène et régulière de u partout à l'intérieur de ce cercle. Mais $|u|$ étant choisi suffisamment petit $f(u | \alpha)$ s'approche autant qu'on le veut de zéro et l'égalité

$$F(a + (x_0 - a)f(u | \alpha)) = \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u)d\omega \qquad \text{[c. f. (60)]}$$

a lieu. Il s'en suit que, u étant un point à l'intérieur du cercle ayant (01) pour diamètre, $F(a + (x - a)f(u | \alpha))$ sera une fonction monogène et régulière de $z = a + (x - a)f(u | \alpha)$ tant que x sera un point situé sur le vecteur (ax_0) entre a et x_0.

Par conséquent x_0 est ou un sommet ou un point intérieur à l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. La démonstration que nous avons employée pour l'expression (66) s'étend d'elle-même à l'expression (65). Elle s'étend à l'expression (52) si l'on se sert d'une transformation analogue à celle employée dans le cas de la formule (42).

Maintenant en faisant tendre la constante α vers zéro on obtient les expressions qui suivent, valables partout à l'intérieur de l'étoile A qui sera leur étoile de convergence.

$$(59)\quad \begin{cases} FA(x) = \lim\limits_{\alpha=0}\lim\limits_{\omega=\infty}\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \\ = F(a) + \lim\limits_{\alpha=0}\lim\limits_{\omega=\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}f_\nu(\omega | \alpha)d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \\ = \lim\limits_{\alpha=0}\int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(x | f, \omega)d\omega \end{cases}$$

Les expressions que nous avons obtenues dans ce paragraphe pour $F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x)$ $[0 < \alpha \leqq 1]$ sont toutes plus compliquées que les expressions du paragraphe précédent en ce sens que ce sont des expressions limites doubles tandis que nos expressions dans le premier paragraphe ne sont que des expressions limites simples.

Les expressions pour $FA(x)$ dans le premier paragraphe sont des expressions limites doubles tandis qu'elles deviennent dans le paragraphe actuel des expressions limites triples. Nous savons déjà qu'il est impossible d'exprimer $FA(x)$ par une expression limite simple si l'on veut conserver à l'étoile A la propriété d'être dans tous les cas une étoile de convergence.[1]

Les résultats que nous avons obtenus dans ce paragraphe peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 7 b. *Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive plus petite que l'unité et par $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A et engendrée par la fonction génératrice $f(u\,|\,\alpha)$ où u décrit une circonférence ayant pour diamètre la ligne droite comprise entre zéro et un et qui par conséquent, $f(u\,|\,\alpha)$ étant choisi convenablement, sera circonscrite à l'étoile $A^{(\alpha)}$ obtenue par l'intermédiaire de la même fonction génératrice quand u décrit une circonférence de centre a et de rayon un. On pourra toujours choisir $f(u\,|\,\alpha)$ telle que α étant suffisamment petit $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ renferme dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ devienne l'étoile de Borel* (théorème 7 a).

On pourra encore choisir $f(u\,|\,\alpha)$ telle que, A étant l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... assujetties à la condition de Cauchy, les expressions limites suivantes:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

[1] Emile Borel. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.*
Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Ce journal. T. 24.

où $\alpha_{\mu\mu}(\alpha)$ $\begin{bmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, n \\ n = 1, 2, 2, \ldots, \infty\end{bmatrix}$ *sont des constantes positives déterminées qui ayant toutes la double propriété* $\alpha_{\mu n}(1) = 1$, $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1$ *ne dépendent que de la fonction génératrice,*

$$\text{(B)} \qquad F(a) + \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

où

$$f_\nu(\omega \mid \alpha) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{D^\mu f^\nu}{(\underline{|\mu})^2} \omega^\mu; \qquad D^\mu f^\nu = \left[D^\mu (f(u \mid \alpha))^\nu\right]_{u=0};$$

et

$$\text{(C)} \qquad \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

où

$$\mathfrak{F}(x \mid f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega \mid a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega \mid a)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots,$$

possèdent toutes les trois une étoile de convergence forcément toujours la même et identique à $\mathfrak{A}^{(a)}$. *De plus l'égalité*

$$\begin{aligned} FA(x) &= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Bigg(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \Bigg) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \\ &= F(a) + \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \\ &= \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega \end{aligned}$$

aura lieu partout à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$.

Les expressions limite triples:

$$\operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$F(a)+\operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\infty}e^{-\omega}f_\nu(\omega\,|\,a)\,d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$\operatorname*{Lim}_{a=0}\int_0^{\infty}e^{-\omega}\mathfrak{F}(x\,|\,f,\,\omega)\,d\omega$$

ont toutes une étoile de convergence identique à l'étoile A, et l'égalité

$$FA(x)=\operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$
$$=F(a)+\operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\infty}e^{-\omega}f_\nu(\omega\,|\,a)\,d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$
$$=\operatorname*{Lim}_{a=0}\int_0^{\infty}e^{-\omega}\mathfrak{F}(x\,|\,f,\,\omega)\,d\omega$$

aura lieu partout à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre déterminé fini ω on aura, en désignant par $\mathfrak{C}$ une circonférence de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$ $(r>1)$, l'égalité

$$F\mathfrak{A}^{(a)}(x)=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^\omega e^{-\omega} d\omega \,.\, F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid a))}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

qui aura lieu tant que x est un point tel que $a + (x-a)f(y \mid a)$ appartienne à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$ quand y décrit le contour de $\mathfrak{C}$.[1]

---

[1] Outre les travaux indiqués à la page 353 ont paru après la publication de la troisième note de mon mémoire les travaux suivants qui s'y rapportent:

LE ROY. *Sur les séries divergentes: rectification à une note précédente.* (Comptes rendus etc. 5 juin 1900.)

LE ROY. *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.* (Annales de la fac. des sciences de Toulouse. Tome II. Année 1900. Pag. 322—328.)

EMILE BOREL. *Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 19 novembre 1900.)

EMILE BOREL. *Sur la généralisation du prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 21 juillet 1902.)

P. PAINLEVÉ. *Observations sur la communication précédente.* (Comptes rendus etc. 21 juillet 1902.)

EMILE BOREL. *Leçons sur les séries à termes positifs.* Paris 1902. Ch. VI. Pag. 90.