SUR LES FONCTIONS QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION

PAR

PAUL PAINLEVÉ

à PARIS.

1. Comme point de départ de sa doctrine des fonctions elliptiques, WEIERSTRASS a pris le théorème suivant: *Toute fonction* $x = \varphi(u)$ *qui admet un théorème d'addition se ramène algébriquement à une fonction uniforme, méromorphe et doublement périodique de* u, *ou à une dégénérescence d'une telle fonction.* Autrement dit, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u.

En tête de sa théorie des fonctions abéliennes, WEIERSTRASS a inscrit une proposition analogue:

Tout système de n fonctions (indépendantes [1]) à n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) à n arguments et aux mêmes périodes.

Cette proposition, qui a été souvent invoquée par les élèves de WEIERSTRASS, n'a pas seulement une importance considérable dans la théorie des fonctions abéliennes; elle intervient encore dans de nombreuses questions intéressant les surfaces algébriques, les équations différentielles, etc.

Malheureusement, la démonstration de l'illustre géomètre allemand n'a été ni enseignée [2] ni publiée; il n'en subsiste aucune trace dans ses manuscrits; elle est aujourd'hui perdue.

[1] J'entends par là que les n fonctions ne sont liées par aucune relation identique.

[2] Dans le seul de ses cours (cours manuscrit) où il soit fait allusion à cette démonstration, WEIERSTRASS précise le théorème et annonce qu'il l'établira dans les leçons suivantes. Mais le manuscrit porte alors que WEIERSTRASS, malade, a interrompu son cours; quand il le reprend quelques semaines plus tard, il poursuit le développement de la théorie des fonctions abéliennes, sans revenir sur le théorème en question.

L'importance et la beauté de ce théorème rendaient bien désirable qu'il fût enfin établi. Mais, si, dans le cas d'une variable indépendante, la démonstration en est aisée, elle présente, dès que le nombre des variables est égal à 2, de très profondes difficultés. Celle que j'ai développée dans mes leçons de Stockholm (pages 292—340) est rigoureuse, mais longue et compliquée; depuis lors, sans en changer le principe, je suis parvenu à l'alléger très notablement. C'est cette démonstration, sous sa forme nouvelle, qui fait l'objet du présent mémoire. J'espère qu'elle paraîtra claire et élémentaire. Je ne crois pas d'ailleurs qu'elle soit susceptible de simplifications importantes.

2. *Enoncé du théorème d'addition.* Je commencerai par préciser l'énoncé même du théorème.

D'après la définition de WEIERSTRASS, un système de deux fonctions (*indépendantes*) de deux variables, soit $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, admet *un théorème d'addition*, si les valeurs de x, y pour $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1$, s'expriment *algébriquement* à l'aide des valeurs (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de (x, y) pour $u = u_0$, $v = v_0$ d'une part, et $u = u_1$, $v = v_1$ d'autre part.

D'une façon plus explicite, les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ étant quelconques, si on pose

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(u_0 + u_1, v_0 + v_1), & y &= \psi(u_0 + u_1, v_0 + v_1),\\
x_0 &= \varphi(u_0, v_0), & y_0 &= \psi(u_0, v_0),\\
x_1 &= \varphi(u_1, v_1), & y_1 &= \psi(u_1, v_1),
\end{aligned}
$$

il est loisible de tirer u_0, v_0, u_1, v_1 des quatre dernières équations et de porter dans les deux premières. Soit:

$$x = A(x_0, y_0, x_1, y_1), \qquad y = B(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

les expressions ainsi trouvées. Le couple de fonctions $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ admet un théorème d'addition si A et B sont *algébriques* en x_0, y_0, x_1, y_1.

La définition est la même pour n fonctions de n variables.

3. *Rappel de quelques propriétés des fonctions abéliennes.* Considérons un système de $(n + 1)$ séries θ à n arguments $u_1, \ldots, u_n$ et aux mêmes périodes (d'ailleurs arbitraires). Les quotients de n de ces séries θ par la

$(n+1)^e$ définissent n fonctions à n variables, méromorphes et $2n$ fois périodiques, et on peut toujours choisir les séries θ de manière que ces n fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$, soient indépendantes. Ces n fonctions (où on a au préalable effectué sur les u une substitution linéaire *quelconque*) formeront, par définition, *un système fondamental de fonctions abéliennes*[1] à n variables; les périodes y sont laissées quelconques;[2] quand on les choisit telles que le nombre des systèmes (distincts) de périodes soit moindre que $2n$, les fonctions $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ forment un système de fonctions abéliennes *dégénéré*.

Toute fonction méromorphe $X(u_1, \ldots, u_n)$ à $2n$ systèmes de périodes *distincts* s'exprime *algébriquement* à l'aide des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ d'un système de fonctions abéliennes aux mêmes périodes. C'est ce qui résulte des travaux de WEIERSTRASS, de MM. PICARD, POINCARÉ et (dans le cas de deux variables) d'une belle méthode synthétique de M. APPELL.[3]

On sait enfin que tout système de fonctions abéliennes (dégénéré ou non) admet *un théorème d'addition* et qu'il vérifie un système différentiel de la forme:

$$(1) \quad du_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + Q_i(x_1, \ldots, x_n)dx_2 + \ldots + T_i(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $P_i, \ldots, T_i$ sont algébriques en $x_1, \ldots, x_n$, et où les seconds membres sont des différentielles totales exactes. Si les fonctions abéliennes forment un système fondamental à périodes quelconques, le système (1) dépend algébriquement d'un nombre de constantes (*modules*) égal au nombre des périodes *arbitraires*. Pour des valeurs arbitraires de ces modules, les n intégrales $\int P_i dx_1 + Q_i dx_2 + \ldots + T_i dx_n$ admettent $2n$ systèmes de périodes *distincts;* pour des valeurs exceptionnelles des modules, ce nombre s'abaisse et les fonctions correspondantes $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)$ sont des fonctions abéliennes *dégénérées*.

---

[1] On sait que, pour $n \geqq 4$, ces fonctions sont plus générales que celles qui sont définies par l'inversion jacobienne dans la théorie des courbes algébriques.

[2] Ces périodes satisfont toujours aux conditions classiques de RIEMANN.

[3] J'ai fait connaître récemment une démonstration très directe et très élémentaire de ce théorème (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 14 avril 1902).

Ces remarques faites, le théorème de WEIERSTRASS prend la forme précise qui suit:

Si n fonctions de n variables admettent un théorème d'addition, ce sont des combinaisons algébriques des n fonctions d'un système fondamental de fonctions abéliennes (dégénéré ou non).

Pour abréger, je développerai la démonstration du théorème dans le cas de deux variables. Mais elle s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de variables.

4. *Cas de deux variables.* Dans le cas de deux variables u, v, les systèmes dégénérés de fonctions abéliennes peuvent (moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v) recevoir la forme suivante, ainsi qu'il ressort de la dégénérescence des séries θ (à deux arguments):

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \wp(u), & y = e^{v}\dfrac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u)}, \quad (\alpha \text{ c}^{\text{te}} \text{ arbitraire}) \\ x = \wp(u), & y = v + \varepsilon\zeta(u), \quad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1) \\ x = e^{u}, & y = e^{v}, \\ x = u, & y = e^{v}, \\ x = u, & y = v. \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que les fonctions abéliennes de deux variables se confondent avec les fonctions hyperelliptiques de genre 2. Autrement dit, on peut prendre, comme couple fondamental de fonctions abéliennes $x(u, v)$, $y(u, v)$, les fonctions:

$$x = \xi + \eta, \qquad y = \xi\eta,$$

où ξ, η vérifient le système:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = du, \\[2ex] \dfrac{\xi d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \dfrac{\eta d\eta}{\sqrt{R(\eta)}} = dv, \end{cases} \qquad R(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_0.$$

Le théorème de WEIERSTRASS, dans le cas de deux variables, se laisse donc énoncer ainsi:

Si un couple de fonctions $X(u, v)$, $Y(u, v)$ admet un théorème d'addition, X et Y sont des combinaisons algébriques soit de deux fonctions hyper-

elliptiques non dégénérées (aux mêmes périodes), soit d'un des couples x, y définis par le tableau (2), où les arguments u, v ont subi une transformation linéaire convenable.

Rappelons enfin que les fonctions hyperelliptiques définies par (3) dégénèrent dans le cas (et seulement dans le cas) où $R(\xi)$ a des racines égales ou est de degré inférieur à 5.[1]

Introduction d'un système de différentielles totales.

5. Je vais établir maintenant la relation étroite qui existe entre le théorème de WEIERSTRASS et le problème de l'inversion des systèmes de différentielles totales (algébriques).

Soit $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ un couple de fonctions analytiques[2] indépendantes qui admet un théorème d'addition, et soit:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(u + u_0, v + v_0), & y &= \psi(u + u_0, v + v_0), \\ x_0 &= \varphi(u_0, v_0), & y_0 &= \psi(u_0, v_0). \end{aligned}$$

On a:

$$(5) \qquad x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B désignant des fonctions algébriques de x_0, y_0. Si, entre les égalités (5) et les égalités:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A'_u, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A'_v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B'_u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B'_v,$$

on élimine x_0, y_0, on forme un système différentiel:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = p(x, y, u, v), & \dfrac{\partial x}{\partial v} = q(x, y, u, v), \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = p_1(x, y, u, v), & \dfrac{\partial y}{\partial v} = q_1(x, y, u, v), \end{cases}$$

[1] Voir les n^{os} 36—37.

[2] Il n'est pas nécessaire de supposer les fonctions *analytiques*. Si $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ sont des fonctions continues, à dérivées premières continues, des variables réelles (u, v), et admettent (pour u, v, u_0, v_0 réels) un théorème d'addition, elles sont sûrement analytiques, d'après le raisonnement même qui suit.

où p, q, p_1, q_1 sont *algébriques* en x, y, et dont l'intégrale générale est donnée par (5). Mais, d'autre part, on serait parvenu au même système (6) en éliminant u_0, v_0, et par suite u, v, entre les équations (4) et les équations dérivées $\frac{\partial x}{\partial u} = \varphi'_u(u + u_0, v + v_0)$, etc. Les fonctions p, q, p_1, q_1, sont donc *indépendantes de* u, v. Comme enfin, du système (6), on peut tirer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, à savoir: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}$, etc., il est loisible de donner à ce système la forme:

$$(7) \quad du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad dv = P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy,$$

où les seconds membres sont des *différentielles totales* exactes (*algébriques*).

Inversement, donnons-nous *a priori* un tel système (7), et supposons que *l'intégrale générale* $x(u, v), y(u, v)$ *de ce système dépende algébriquement des deux constantes d'intégration, soit* a, b. Il est clair que les fonctions $x(u, v), y(u, v)$ admettent un théorème d'addition. Substituons, en effet, à a, b les valeurs x_0, y_0 de x, y pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs qui dépendent algébriquement de a, b; nous avons:

$$x = A(x_0, y_0, u, v), \qquad y = B(x_0, y_0, u, v),$$

A et B étant algébriques en x_0, y_0. Mais d'autre part si $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ est une solution particulière du système (7), l'intégrale générale est donnée par $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$; d'où il suit (en remarquant que u, v et u_0, v_0 jouent un rôle symétrique) que les fonctions φ, ψ admettent un théorème d'addition. [1]

D'après cela, le théorème de WEIERSTRASS peut être remplacé par le suivant: *quand l'intégrale générale* $x(u, v), y(u, v)$ *d'un système* (7) *dépend algébriquement des constantes initiales* x_0, y_0, *ces fonctions se ramènent algébriquement à un couple de fonctions hyperelliptiques* (*aux mêmes périodes*), *dégénéré ou non.*

---

[1] Il est clair d'après cela que si $x(u, v), y(u, v)$ admettent un théoréme d'addition, il en va de même pour les fonctions obtenues en effectuant sur u, v une substitution linéaire.

6. *Substitution au théorème de Weierstrass d'un théorème équivalent.* Précisons encore cette équivalence. Puisque la fonction $x(u, v)$ dépend algébriquement des constantes x_0, y_0, elle vérifie une relation:

$$x^n + R_{n-1}(x_0, y_0, u, v)x^{n-1} + \ldots + R_0(x_0, y_0, u, v) = 0$$

où les R sont *rationnels* en x_0, y_0, analytiques en u, v. Je dis que les R sont des fonctions *méromorphes* de u, v. En effet, supposons que les R admettent une singularité *non polaire* $u = \alpha$, $v = \beta$; ce sera une singularité d'une quelconque des fonctions $x(u, v)$ définies par le système (7); la fonction $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$ admettrait donc, quels que fussent u_0, v_0, la singularité fixe $u = \alpha$, $v = \beta$, ce qui est absurde.

La fonction $x(u, v)$ est donc une fonction à un nombre fini, soit m, de branches ($m \leqq n$); si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent ses m branches, posons:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= x_1(u + u_0, v + v_0) + \ldots + x_m(u + u_0, v + v_0) \\ &\equiv x_1(x_0, y_0, u, v) \quad + \ldots + x_m(x_0, y_0, u, v); \end{aligned}$$

ρ_1 est une fonction *méromorphe* des u, v qui dépend des deux constantes arbitraires x_0, y_0 (ou u_0, v_0) et peut recevoir les deux formes:

$$\rho_1 = F(x_0, y_0, u, v) = G(u + u_0, v + v_0),$$

F dépendant algébriquement de x_0, y_0.

La même remarque s'applique aux autres fonctions symétriques de $x_1, \ldots, x_m$,

$$\rho_2 = \sum x_1 x_2, \ldots, \rho_m = x_1 x_2 \ldots x_m,$$

ainsi qu'aux fonctions symétriques analogues $r_i(x_0, y_0, u, v)$ des branches de $y(u, v)$. Parmi ces fonctions symétriques ρ_j, r_i, il y en a deux au moins, soit $X(x_0, y_0, u, v)$ et $Y(x_0, y_0, u, v)$, qui sont deux fonctions *distinctes*[1] de x_0, y_0. Si, entre x, y, X, Y, on élimine x_0, y_0, on voit que x, y se trouvent exprimés algébriquement à l'aide de X, Y, les variables u, v figurant analytiquement. Mais on serait arrivé aux mêmes expressions en éliminant u_0, v_0 (c'est à dire $u + u_0, v + v_0$) entre x, y, X, Y: il suit de là que x et y d'expriment algébriquement à l'aide de X, Y, sans que u, v figurent.

[1] Autrement, x et y ne dépendraient que d'une *seule* constante arbitraire.

Moyennant une transformation *algébrique* convenable effectuée sur x, y, *il est donc loisible de supposer que les fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *sont uniformes et méromorphes.*

7. Enfin, dans les équations (7), on peut, comme il est bien connu, exprimer *rationnellement* P, Q, P_1, Q_1 à l'aide de x, y et d'une irrationnelle unique $z(x, y)$, définie par une relation algébrique

$$S(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

cela de telle façon qu'inversement z s'exprime rationnellement en x, y, P, Q, P_1, Q_1. Comme P ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ se déduit rationnellement de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, ainsi que Q, P_1, Q_1, la fonction $z(u, v)$ est uniforme et méromorphe en même temps que $x(u, v)$, $y(u, v)$. De plus, soit x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $u = 0$, $v = 0$, valeurs liées par la condition:

$$S(x_0, y_0, z_0) = 0; \tag{9}$$

à un système x_0, y_0, z_0, u, v correspond une détermination *unique* des fonctions $x(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $y(u, v, x_0, y_0, z_0)$, $z(u, v, x_0, y_0, z_0)$, et puisque x, y, z sont des fonctions algébriques de x_0, y_0, ce sont des fonctions *rationnelles* des constantes x_0, y_0, z_0, liées par (9).

Nous sommes amenés ainsi à considérer les systèmes (7) de la forme:

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} du &= P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy, \\ dv &= P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy, \end{aligned} \right.$$

dont les seconds membres sont des différentielles totales attachées à la surface algébrique S, et tels que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par (10), soient des fonctions méromorphes de u, v, *rationnelles en* x_0, y_0, z_0.

D'ailleurs, si l'intégrale générale $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ d'un système (10) renferme *rationnellement* les constantes x_0, y_0, z_0 [liées par $S(x_0, y_0, z_0) = 0$], il résulte aussitôt du raisonnement de la page 7 que ce sont des fonctions méromorphes de u, v. Le problème qui se pose est donc le suivant:

Etudier les fonctions inverses de deux intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *dans l'hypothèse où ces fonctions dépendent* ***rationnellement*** *des constantes initiales* x_0, y_0, z_0 *[liées par la condition* $S(x_0, y_0, z_0) = 0$].

8. *Difficulté du nouveau problème.* Un premier cas qui se trouve dès maintenant élucidé d'après les résultats classiques, est celui où *les intégrales* $I = \int P dx + Q dy$, $J = \int P_1 dx + Q_1 dy$ *admettent au moins quatre couples (distincts) de périodes.*[1] Les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, si elles sont uniformes et méromorphes, sont alors quatre fois périodiques, et se confondent nécessairement avec un couple de fonctions *hyperelliptiques* de u, v.

Le seul cas qui reste à discuter est celui où *les intégrales*

$$I = \int P dx + Q dy, \qquad J = \int P_1 dx + Q_1 dy$$

ont moins de quatre couples de périodes distincts.

Avant d'aller plus loin, insistons sur quelques remarques qui feront mieux comprendre la difficulté du problème.

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment rationnellement (x_0, y_0, z_0), nous savons qu'elles sont à coup sûr uniformes et méromorphes. *Mais il faut bien se garder de croire que la réciproque est vraie.*

Tout d'abord, alors même que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent être uniformes sans être méromorphes. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur l'exemple:

$$(11) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}} - \frac{\lambda[\eta_1 + \omega_1 x]\, dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Représentons par $\wp(u)$ la fonction $\wp$ de Weierstrass qui correspond aux invariants g_2, g_3; par $\wp_1$ celle qui correspond aux invariants γ_2, γ_3; par $2\omega_1$, $2\omega_2$ les périodes de $\wp$, par $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ celles de $\wp_1$. Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ définies par (11) se déduisent (en augmentant u, v de constantes arbitraires) du couple:

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp_1[v + \lambda\eta_1 u - \lambda\omega_1 \zeta(u)],$$

fonctions de u, v qui sont uniformes mais admettent une infinité de *points*

[1] Il est aisé de montrer directement que deux fonctions uniformes de u, v (*indépendantes*) ne peuvent admettre plus de quatre couples de périodes (distincts) sans être des constantes; le théorème s'établit comme le théorème analogue dans le cas d'une seule variable, mais il résulte aussitôt de ce qui suit.

essentiels correspondant aux pôles de $\zeta(u)$. Les quatre couples de périodes sont ici:

$$\begin{matrix} 2\omega_1, & 0, & 2\omega_2, & 0, \\ 0, & 2\omega_1', & i\pi\lambda, & 2\omega_2', \end{matrix}$$

et si ω_1, ω_2, ω_1', ω_2', λ sont quelconques, ces périodes ne satisfont pas à la condition de RIEMANN.

9. Au moins, du moment que le nombre des couples de périodes n'est pas inférieur à 4, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne peuvent être méromorphes sans être hyperelliptiques, et par suite sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0). Il n'en va plus de même quand le nombre des couples de périodes est moindre que 4: tout d'abord, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent encore être uniformes sans être méromorphes; mais, de plus, *elles peuvent être méromorphes et renfermer sous forme transcendante les constantes* (x_0, y_0, z_0). C'est ce qui apparaît aussitôt sur les deux exemples:

$$(12) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$(13) \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} - dx;$$

le premier système est vérifié par le couple

$$(14) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v + \frac{1}{e^u - 1}},$$

le second par le couple

$$(15) \qquad x = e^u, \qquad y = e^{v + e^u};$$

le couple (14) présente des singularités essentielles; le couple (15) est méromorphe mais l'intégrale générale correspondante s'écrit:

$$x = x_0 e^u, \qquad y = y_0 e^{v + x_0(e^u - 1)}$$

et renferme x_0 sous forme transcendante. Pour les systèmes (12) et (13) la correspondance entre x, y et x_0, y_0 est *biuniforme mais non birationnelle:* le nombre des couples de périodes est égal à 2.

Ces remarques font nettement comprendre pourquoi il sera indispensable, par la suite, de supposer non seulement que x, y, z sont des fonctions *uniformes et méromorphes* de u, v mais encore qu'elles renferment ***rationnellement*** (x_0, y_0, z_0).

D'une façon précise, le théorème de WEIERSTRASS sera établi si nous établissons cette proposition [1]:

»*Soit* $u = I(x, y, z)$, $v = J(x, y, z)$ *deux intégrales de différentielles totales attachées à la surface algébrique* $S(x, y, z) = 0$ *et qui possèdent au plus trois couples de périodes. Si les fonctions inverses* $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ *renferment rationnellement les constantes initiales* (x_0, y_0, z_0), *ce sont des fonctions hyperelliptiques dégénérées;* autrement dit, ce sont des combinaisons rationnelles d'un des 5 systèmes:

$$
\begin{array}{lll}
X = e^U \dfrac{\sigma(V - a)}{\sigma(V)}, & Y = \wp(V), & Z = \wp'(V), \\
X = U + \alpha\zeta(V), & Y = \wp(V), & Z = \wp'(V), \\
X = e^U, & Y = e^V, & Z = 0, \\
X = U, & Y = e^V, & Z = 0, \\
X = U, & Y = V, & Z = 0,
\end{array}
$$

où U, V désignent deux combinaisons linéaires convenables de u, v.»

Ce théorème cesse d'être exact si les fonctions $x(u, v), y(u, v)$ sont *uniformes* et même *méromorphes*, mais sont des fonctions *transcendantes* (uniformes mais non rationnelles) de (x_0, y_0, z_0).

Pour démontrer ce théorème, je commencerai par établir que les intégrales $u = I$, $v = J$ qu'il nous faut considérer présentent au moins *une courbe polaire.*

---

[1] Dans ses mémorables travaux sur les fonctions algébriques de deux variables, qui ont donné un tel essor aux recherches de toute nature intéressant les surfaces algébriques, M. PICARD (*Mémoire couronné*, p. 99—116) a indiqué une démonstration de ce théorème. C'est même, à ma connaissance, la seule démonstration qui ait été tentée du théorème de WEIERSTRASS, (ou plus exactement, d'une proposition équivalente). Mais l'analyse de l'illustre géomètre Français présente des lacunes qui ne me semblent pouvoir être comblées sans une discussion analogue à celle qu'on trouvera développée aux pages 25—38; or c'est cette discussion qui constitue toute la difficulté de la démonstration que je propose.

Des courbes polaires des intégrales

$$I=\int P dx+Q dy, \qquad J=\int P_1 dx+Q_1 dy.$$

10. *Rappel de quelques définitions.* Soit $I=\int P dx+Q dy$ une intégrale de différentielle totale attachée à la surface algébrique:

$$S(x\,,y\,,z)=0. \tag{16}$$

Par définition, P et Q sont rationnels en $x\,,y\,,z$, et quand, dans $P\,,Q$, on remplace z en $x\,,y$, l'expression $P dx+Q dy$ est une différentielle exacte. Les diverses déterminations de la quantité:

$$I=\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z} P(x\,,y\,,z)dx+Q(x\,,y\,,z)dy$$

qui correspondent à un point $(x\,,y\,,z)$ de S ne diffèrent que par des constantes d'addition, qui sont les *périodes* de l'intégrale.

On appelle *courbe polaire* de l'intégrale toute courbe tracée sur S telle que I devienne infinie en un point arbitraire de cette courbe: une courbe polaire est nécessairement algébrique. Par définition, l'intégrale I admet une courbe polaire à l'infini si, après une transformation homographique arbitraire effectuée sur S, l'intégrale admet une courbe polaire que le retour aux premières variables rejette à l'infini.

D'après cela, si I possède une courbe polaire C, il est loisible de la supposer à distance finie: soit $R(x\,,y\,,z)=0$ une surface algébrique dont l'intersection avec S contient la courbe C. La transformation $X=R(x,y,z)$ fait correspondre à S une surface $S_1(X\,,y\,,z)=0$, et, si les axes $Ox\,,Oy\,,Oz$ ont été choisis quelconques, la correspondance entre S et S_1 est *birationnelle.*[1] Moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, on peut donc toujours faire en sorte que la courbe polaire considérée soit située dans le plan $x=0$ (sans se réduire à une parallèle à Oz), et toute branche de l'intégrale

[1] Il suffit, en effet, que pour une valeur arbitraire (non exceptionnelle) X_0 de X, la courbe $X_0=R(x\,,y\,,z)$ de S n'ait pas une infinité de cordes parallèles à Ox: si donc on ne choisit pas les axes $Oxyz$ d'une façon exceptionnelle, à un point $y\,,z$ de la courbe $S_1(X_0\,,y\,,z)=0$, autrement dit à un point $(X\,,y\,,z)$ de la surface S_1, correspond une seule valeur de x.

I qui devient infini sur cette courbe sera développable, dans le voisinage de la courbe polaire, sous la forme:

$$(17)\quad I=\frac{A_0(y)}{X^m}+\frac{A_1(y)}{X^{m-1}}+\dots+\frac{A_{m-1}(y)}{X}+\alpha\log X+A_m(y)+A_{m+1}(y)X+\dots,$$

avec

$$x=X^l;$$

l, m sont deux entiers ($l>0$, $m\geqq 0$), les A des fonctions *algébriques* de y; α *une constante numérique*. Pour $y=y_0$ [abstraction faite d'un nombre fini de valeurs exceptionnelles y_0], les A sont holomorphes, et la série (17) converge pour $|X|$ suffisamment petit.

La courbe polaire est dite *logarithmique* si $\alpha\neq 0$, *non-logarithmique* si $\alpha=0$; α est le *résidu* de l'intégrale relatif à la courbe polaire $X=0$; la période $2i\pi\alpha$ de I est dite *période polaire*. Enfin, la somme des résidus des diverses branches de I relatifs à toutes les courbes polaires (à distance finie ou infinie) *est nulle.*

Quand l'intégrale I n'admet de courbes polaires ni à distance finie, ni à l'infini, l'intégrale abélienne $\int P(x, y_0, z)dx$, attachée à la courbe $S(x, y_0, z)=0$, est une intégrale *de première espèce,* (du moment que la valeur y_0 n'est pas choisie d'une manière exceptionnelle). Il suit de là (comme il est bien connu) que cette intégrale a au moins deux périodes dont le rapport est imaginaire. Une remarque analogue s'applique à l'intégrale abélienne $\int Q(x_0, y, z)dy$. L'intégrale I a, dans ce cas, au moins deux périodes de rapport imaginaire.

11. *De l'existence d'une courbe polaire pour les intégrales I, J.* Ceci rappelé, soit $I=\int Pdx+Qdy$, $J=\int P_1dx+Q_1dy$ deux intégrales de différentielles totales attachées à S et *possédant au plus trois couples de périodes distincts.* Je dis qu'*une au moins des deux intégrales admet une courbe polaire.*[1]

Il est loisible (en combinant linéairement I et J) de faire en sorte qu'une au moins des périodes de I et une des périodes de J soient nulles.[2]

[1] La démonstration supposera toutefois que les deux intégrales I, J ne sont pas fonctions l'une de l'autre, autrement dit que PQ_1-Q_1P n'est pas identiquement nul: mais le cas $PQ_1-Q_1P\equiv 0$ ne nous intéresse pas ici.

[2] A moins toutefois que toutes les périodes d'une combinaison $\alpha I+\beta J$ ne soient nulles; mais $\alpha I+\beta J$ serait alors rationnelle en x, y, z et admettrait une courbe polaire.

Supposons maintenant que I n'admette pas de courbe polaire (à distance finie ou infinie). D'après une remarque précédente, I (qui a au plus deux périodes) a sûrement deux périodes de rapport imaginaire, soit $2\omega_1$, $2\omega_2$: posons

$$X = \wp(u, 2\omega_1, 2\omega_2), \qquad u = I = \int P dx + Q dy;$$

X est une fonction uniforme de (x, y, z), qui, pour y_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de x, (puisque $\int P(x, y_0, z)dx$ est une intégrale abélienne de première espèce), et qui, pour x_0 pris au hasard, est une fonction algébrique de y; X est donc une fonction rationnelle de x, y, z, qu'il est loisible, par une transformation *birationnelle* [1] effectuée sur S, de faire coïncider avec x. Pour la même raison, soit $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de J, et soit

$$Y = \wp(v, 2\omega_1', 2\omega_2') = \wp_1, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy;$$

Y est une fonction rationnelle [2] de x, y, z, qu'il est loisible de faire coïncider avec y. Une transformation birationnelle effectuée sur S ramène donc I et J à la forme:

$$I = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad J = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2' y - g_3'}},$$

système à quatre couples de périodes distincts, à savoir les périodes:

$$2\omega_1, \ 2\omega_2, \ 0, \ 0 \quad \text{pour } I,$$
$$0, \ 0, \ 2\omega_1', \ 2\omega_2' \quad \text{pour } J;$$

résultat absurde, puisque, par hypothèse I, J admettent au plus trois couples le périodes.

Une au moins des intégrales I, J, dont il nous faut étudier l'inversion, possède donc des courbes polaires (à distance finie ou infinie). C'est l'examen approfondi de ces courbes polaires qui va nous conduire au but que nous poursuivons. Mais avant d'entrer dans cette discussion, je traiterai au préalable l'inversion de I, J dans deux cas particuliers très simples.

---

[1] Voir la note 1 de la page 12.

[2] Cette fonction ne se réduit pas à une simple fonction de x, car autrement les intégrales $I(x, y, z)$, $J(x, y, z)$ seraient fonctions l'une de l'autre.

Examen d'un premier cas particulier.

12. Je traiterai en premier lieu le problème suivant:

Déterminer tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par le système

$$(18)\qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)du + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z), \\ \qquad S(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

sont rationnelles en u et uniformes en v.

Ecrivons le système (18) sous la forme:

$$(19)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = A(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = B(x, y, z),$$

$$(20)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = B_1(x, y, z),$$

et cherchons à satisfaire d'abord aux équations (19) en y remplaçant x, y, z par des fonctions rationnelles de u d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi trouvées sont, par hypothèse, compatibles, et l'intégrale générale de (19) se met sous la forme:

$$(21)\qquad x = R(u - a, b), \qquad y = R_1(u - a, b), \qquad z = R_2(u - a, b),$$

les fractions rationnelles R, R_1, R_2 de $(u - a)$ dépendant *algébriquement* d'une seconde [1] arbitraire b.

Il reste à déterminer a, b (fonctions inconnues de v) de façon que les deux équations (20) soient aussi vérifiées. Or des équations (21) on peut tirer:

$$(22)\qquad u - a(v) = G(x, y), \qquad b(v) = H(x, y)$$

G, H désignant des fonctions *algébriques* de x, y. Si on pose: $y_1 = H(x, y)$,

---

[1] On peut disposer de a, b de façon que, pour $u = 0$, x, y et z prennent les valeurs arbitraires x_0, y_0, z_0, liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$.

la seconde équation (22) donne: $v = \psi(y_1)$, d'où $dv = \psi'(y_1)\,dy_1$, $\psi'(y_1)$ étant nécessairement *algébrique* en y_1. Comme la fonction $y_1(v)$, par hypothèse n'admet qu'une nombre fini de branches, elle est (d'après un théorème classique) *algébrique en* v, *ou en* e^{gv}, *ou en* $\wp(x, g_2, g_3)$, [g, g_2, g_3 constantes numériques], et inversement une des trois expressions v, e^{gv}, $\wp(v, g_2, g_3)$ est algébrique en y_1, c'est-à-dire en x, y. Si on veut encore,

1° ou bien l'intégrale $v = J(x, y, z)$ n'a pas de périodes; J est alors rationnelle en x, y, z, soit $J = R(x, y, z)$;

2° ou bien J n'a qu'une période,[1] soit $2\omega_1$, qu'il est loisible (en multipliant v par $\frac{i\pi}{\omega_1}$) de supposer égale à $2i\pi$, et l'expression e^J (qui est *uniforme* en x, y, z) est algébrique en x, y; e^J est donc rationnelle en x, y, z, soit $e^J = \rho(x, y, z)$;

3° ou bien enfin J est dénué de courbes polaires et n'a que deux[2] périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ (dont le rapport est imaginaire); la fonction $\wp(J, 2\omega_1, 2\omega_2)$, uniforme en x, y, z, est algébrique en x, y, donc *rationnelle en* x, y, z, soit $\wp = \rho(x, y, z)$.

---

[1] Il ne faut pas oublier que les périodes des intégrales I, J, attachées à la surface S, correspondent essentiellement à des cycles *fermés* sur S. Soit par exemple,

$$du = dx + \sqrt{y}\,dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad S \equiv y - z^2 = 0.$$

L'intégrale $v = J$, attachée à S, *a comme période* $4i\pi$ *et non* $2i\pi$, car il faut que y tourne deux fois autour du point $y = 0$ pour que z reprenne la même valeur. Les fonctions uniformes $x = u - \frac{2}{3} e^{\frac{3v}{2}}$, $y = e^v$ admettent le couple de périodes $2\omega = 0$ (pour u), $2\omega_1 = 4i\pi$ (pour v), (et non pas $2\omega_1 = 2i\pi$).

[2] Le système de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ est bien entendu supposé *primitif*. La remarque de la note 1 s'applique encore. Par exemple, soit:

$$du = dx + \sqrt{y - e_1}\,dy, \quad dv = \frac{dy}{\sqrt{2(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}},$$

$$S \equiv z - \sqrt{y - e_1} - \sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)} = 0,$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 = 0);$$

si $2\omega_1$, $2\omega_2$ sont les périodes de la fonction $\wp(v, e_1, e_2, e_3)$, les périodes de J sont $2\omega_1$ et $4\omega_2$ (et non pas $2\omega_1$, $2\omega_2$).

J'ajoute qu'en posant $Y = \rho(x, y, z)$, on peut, moyennant une transformation *birationnelle*,[1] effectuée sur S, supposer que *ρ coïncide avec Y*; la différentielle dv est alors une des trois différentielles suivantes:

$$dv = dy, \qquad dv = \frac{dy}{y}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}};$$

dans le dernier cas, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

Discutons ces trois hypothèses, en remarquant immédiatement que les intégrales $u = I$, $v = J$ ne sauraient admettre de couple de périodes de la forme $(2\omega, 0)$, puisque les fonctions x, y, z de u, v sont rationnelles en u.

13. *Premier sous-cas: $dv = dy$.* D'après la remarque précédente, u doit être sans période; c'est donc (comme v) une fonction rationnelle de (x, y, z). Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, à la fois *uniformes* et *algébriques*, sont *rationnelles*. La surface S correspond birationnellement à un plan.

14. *Deuxième sous-cas: $dv = \frac{dy}{y}$.* En remplaçant u par $u - \alpha v$, (α désignant une constante convenable), on peut faire en sorte que I, J admettent le couple de périodes $(0, 2i\pi)$: les fonctions x, y, z de u, v sont alors uniformes en e^v. De plus, I n'a plus de périodes; car si I, J possédaient le couple de périodes $(2\omega, 2mi\pi)$, ils posséderaient aussi le couple $(2\omega, 0)$. *L'intégrale $u = I$ est donc (comme e^v) rationnelle en (x, y, z)*, et réciproquement les fonctions uniformes x, y, z de u, e^v sont *rationnelles en* $u, e^v = \theta$. La surface S correspond birationnellement à un plan.

15. *Troisième sous-cas: $dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$.* Je représente par $2\omega, 2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux périodes de $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J, et je considère l'expression $\alpha\zeta(v) + \beta v$, où les constantes α, β sont choisies de façon que $(\alpha\eta_1 + \beta\omega_1)$ et $(\alpha\eta_2 + \beta\omega_2)$ soient égaux respectivement à ω et ω'. Je pose ensuite

$$u_1 = u - \alpha\zeta(v) - \beta v,$$

[1] Voir la note 1, p. 12.

c'est-à-dire:

$$du_1 = du + [\alpha\wp(v) - \beta]dv = Pdx + Qdy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}[\alpha y - \beta].$$

Les deux intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ sont encore attachées à la surface S (puisque $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ est rationnel en x, y, z), et elles admettent les deux couples de périodes:

$$0\ ,\ 0 \quad \text{pour} \quad u_1,$$

$$2\omega_1\ ,\ 2\omega_2 \quad \text{pour} \quad v.$$

Les fonctions x, y, z de u_1, v sont encore ***rationnelles*** en u_1, *uniformes* en v, et elles ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$. Enfin, si les intégrales I_1, J admettent un troisième couple de périodes, soit $(2\Omega, 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, elles admettent aussi le couple $(2\Omega, 0)$, ce qui exige que 2Ω soit nul. *L'intégrale* $u_1 = I_1$ *est donc (comme* $\wp(v)$*) rationnelle en* (x, y, z). Inversement, les fonctions x, y, z de u, v, *uniformes et algébriques* en u_1, $\wp(v)$, $\wp'(v)$, sont *rationnelles en* u_1, $\wp(v)$, $\wp'(v)$. La surface S correspond birationnellement au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$ de l'espace (X, Y, Z).

En substituant $u - \beta v$ à u, et en divisant ensuite u par α (si $\alpha \neq 0$), on fait $\beta = 0$ et $\alpha = 1$. On voit donc qu'après une substitution linéaire convenable effectuée sur u, *les fonctions* x, y, z *de* u, v *sont rationnelles en* $\wp(v)$, $\wp'(v)$ *et en* $U = u + \varepsilon\zeta(v)$, $(\varepsilon = 0$ *ou* $1)$, et cela de telle façon qu'inversement $\wp(v)$, $\wp'(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x, y, z).

16. *Conclusions.* La discussion précédente se résume ainsi:

Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par un système (18) sont rationnelles en u et uniformes en v, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u, v, ramènent le système (18) à une des trois formes:

$$\text{(I)} \qquad du = dx, \qquad dv = dy, \qquad z = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad du = dx, \qquad \alpha dv = \frac{dy}{y}, \qquad z = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad du = dx + \frac{\varepsilon y\, dy}{z}, \qquad dv = \frac{dy}{z}, \qquad z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

$(\alpha, g_2, g_3$ constantes numériques, $\varepsilon = 0$ ou $1)$.

Les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, v dans le cas (I), en u, e^{av} dans le cas (II), en $\{u - \varepsilon\zeta(v)\}$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$ dans le cas (III). Elles dépendent d'ailleurs *rationnellement* des constantes initiales (x_0, y_0, z_0); la chose est évidente dans les deux premiers cas; dans le troisième, il suffit de vérifier[1] que les fonctions

$$\text{(IV)} \qquad y = \wp(v), \qquad x = u - \varepsilon\zeta(v)$$

admettent un théorème d'addition. Or posons

$$x_1 = x(u + u_0, v + v_0), \qquad y_1 = y(v + v_0), \qquad x_0 = x(u_0, v_0), \qquad y_0 = y(v_0),$$
$$R(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3;$$

on trouve:

$$y_1 = -(y + y_0) + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right]^2,$$

$$x_1 = \quad (x + x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y - y_0}\right].$$

Enfin, la surface S correspond *birationnellement*, dans les cas (I), (II) à un plan et dans le cas (III) au cylindre $z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$.

Examen d'un second cas particulier.

17. Le second problème que je traiterai maintenant s'énonce ainsi:

Determiner tous les cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système

$$(18) \qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I, \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J, \\ \qquad S(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sont ***rationnelles en*** e^u *et méromorphes en v. L'intégrale J est supposée dénuée de courbes polaires.*

---

[1] Cette vérification est inutile, si on se rappelle que les fonctions (IV) sont les quotients de trois séries $\theta(u, v)$ dégénérées [voir le n° 4].

Il est loisible d'admettre (et c'est ce que nous ferons) que $2i\pi$ est *la plus petite période* des fonctions $x(u, v_0)$, $y(u, v_0)$, $z(u, v_0)$. Autrement, on multiplierait u par un entier convenable.

Ecrivons le système (18) sous la forme (19), (20) [page 15], posons $t = e^u$, et cherchons à satisfaire aux deux premières équations:

$$t\frac{\partial x}{\partial t} = A(x, y, z), \qquad t\frac{\partial y}{\partial t} = B(x, y, z) \tag{23}$$

en y remplaçant x, y, z par des fractions rationnelles en t d'un certain degré q. Pour une valeur convenable de q, les conditions ainsi formées sont compatibles et donnent pour l'intégrale générale de (23) les expressions:

$$x = R(at, b), \qquad y = R_1(at, b), \qquad z = R_2(at, b), \tag{24}$$

les fonctions rationnelles R, R_1, R_2 de at dépendant *algébriquement* d'une seconde indéterminée b. Il reste à disposer des fonctions $a(v)$, $b(v)$ de façon à satisfaire aux équations (20). Or des égalités (24), on tire:

$$a(v)t = G(x, y), \quad b(v) = H(x, y), \quad [G, H \text{ algébriques en } x, y]. \tag{25}$$

D'après le raisonnement des pages 16, 17, la seconde égalité (25) montre que l'intégrale $J(x, y, z)$, qui, par hypothèse, n'a pas de courbe polaire, coïncide, moyennant une transformation *birationnelle* effectuée sur S, avec l'intégrale elliptique $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$; le radical $\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}$ s'exprime rationnellement en x, y, z.

18. Soit 2ω, $2\omega'$ deux périodes de $u = I$ qui correspondent aux deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ de J. Considérons la fonction elliptique de seconde espèce $\frac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)}e^{\beta v}$, et déterminons[1] [ce qui est toujours possible] α et β de façon que les multiplicateurs de cette fonction soient $e^{-2\omega}$, $e^{-2\omega'}$; sa dérivée logarithmique est:

$$\zeta(v-\alpha) - \zeta(v) + \beta \equiv \beta - \zeta(\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(\alpha) + \wp'(v)}{\wp(\alpha) - \wp(v)}\right].$$

Posons:

$$du_1 = du + \{\zeta(v-\alpha) - \zeta(v) + \beta\}dv,$$

[1] Si $\omega = \omega' = 0$, α et β sont nuls, et la fonction de seconde espèce se réduit à l'unité.

c'est-à-dire:

$$t_1 = t\frac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)}e^{\beta v}, \qquad (t_1 = e^{u_1}).$$

La différentielle:

$$du_1 = \int P dx + Q dy + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\left[\beta - \zeta(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(\alpha) + \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}{y - \wp(\alpha)}\right]$$

est encore attachée à la surface S, et les intégrales $u_1 = I_1$, $v = J$ admettent les couples de périodes:

$$\begin{array}{ccl} 0 \ , & 0 & \text{pour } I_1, \\ 2\omega_1 \ , & 2\omega_2 & \text{pour } J. \end{array}$$

Les fonctions x , y , z de u_1 , v sont rationnelles[1] en $t_1 = e^{u_1}$, méromorphes en v, et ne changent pas quand on augmente v de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$; *elles sont donc rationnelles en* $t_1 , \wp(v) , \wp'(v)$. De plus, tout couple de périodes de u_1 , v est de la forme $(2\omega , 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$, et, par suite, si on veut, de la forme $(2\omega , 0)$; ce qui exige que 2ω soit un multiple de $2i\pi$. Il suit de là que t_1 est (comme $\wp(v)$ et $\wp'(v)$) une fonction rationnelle de x , y , z; car t_1 est à la fois uniforme et algébrique en x , y , z.

19. Nous arrivons donc à la conclusion suivante:

L'intégrale $v = J$ *du système* (18) *étant dénuée de courbe polaire, les fonctions* x , y , z *de* u , v *définies par ce système, — si elles sont rationnelles en* e^u *et méromorphes en* v —, *sont des combinaisons rationnelles de* $\wp(v) , \wp'(v)$, *et* $U = e^{(ru+\beta v)} \times \frac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)}$, [$r$ désigne un entier, α , β des constantes numériques, ainsi que les invariants g_2 , g_3 de $\wp(v)$]. Inversement $\wp(v) , \wp(v)$ et U s'expriment rationnellement en (x , y , z).

Si on veut encore, une transformation birationnelle effectuée sur S et la substitution à u d'une combinaison linéaire en u , v, ramènent le système (18) à la forme:

$$(18) \qquad \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{z}\left[\zeta(\alpha) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(\alpha) + z}{\wp(\alpha) - y}\right], \qquad dv = \dfrac{dy}{z}, \\ z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3; \end{cases}$$

la première équation, pour $\alpha = 0$, se réduit à $du = \frac{dx}{x}$.

---

[1] Par hypothèse, $2i\pi$ est la plus petite période des fonctions $x(u , v_0) , y(u , v_0)$, $z(u , v_0)$; il en est de même évidemment quand on remplace u par $u_1 + F(v_0)$.

La surface S est une transformée birationnelle du cylindre:

$$z^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Enfin, il est aisé de voir que, dans le cas que nous venons de traiter, les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ renferment *rationnellement* les constantes initiales (x_0, y_0, z_0). Il suffit de vérifier[1] que les fonctions

$$x = e^u \frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)}, \qquad y = \wp(v)$$

admettent un théorème d'addition.[2] Or appelons x_1, y_1 ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace u, v par $(u+u_0)$, $(v+v_0)$, et appelons de même x_0, y_0 les valeurs de x, y pour $u=u_0$, $v=v_0$. On trouve aussitôt [en posant $R(y) \equiv 4y^3 - g_2 y - g_3$]:

$$x_1 = \frac{xx_0}{2\sigma(a)} \left\{ \frac{\sqrt{R(y)}}{(y-y_0)(y-\wp(a))} - \frac{\sqrt{R(y_0)}}{(y-y_0)(y_0-\wp(a))} - \frac{\wp'(a)}{[y-\wp(a)][y_0-\wp(a)]} \right\},$$

$$y_1 = -y - y_0 + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(y)} - \sqrt{R(y_0)}}{y-y_0}\right]^2.$$

---

[1] Voir la note 1 p. 19.

[2] On aurait traité aussi facilement le problème qui fait l'objet de ce chapitre sans supposer que l'intégrale $v = J$ soit dénuée de *courbes polaires*. Il aurait fallu considérer, en outre du cas étudié plus haut (p. 20), les deux cas [n^{os} 13, 14] où on a:

$$dv = dy, \quad \text{ou} \quad adv = \frac{dy}{y}.$$

On trouve aussitôt qu'une transformation birationnelle effectuée sur S et une substitution linéaire effectuée sur u, v ramènent le système (18) [quand les fonctions x, y, z de u, v dont *méromorphes*] à une des deux formes:

$$u + a = \log x + \alpha y + \beta y^2 + \ldots + \lambda y^n, \qquad v + b = y,$$

$$u + a = \log x + \frac{\alpha}{y^j} + \frac{\gamma}{y^{j-1}} + \ldots + \frac{\delta}{y} + \varepsilon y + \ldots + \lambda y^m, \quad v + b = \log y,$$

a, b constantes arbitraires, j, m, n entiers $\geqq 0$.

Mais si on veut de plus que $x(u, v)$, $y(u, v)$ admettent un théorème d'addition, il faut que l'expression de $u + a$ se réduise à $\log x$; x et y sont alors des fonctions *rationnelles* soit de e^u, v, soit de e^u, e^v.

Ces deux cas particuliers traités, je vais passer à la discussion du cas général. Pour alléger cette discussion, j'en détacherai deux lemmes presque intuitifs concernant les fonctions méromorphes.

Deux lemmes relatifs aux fonctions méromorphes.

20. *Lemme A.* Soit $x = \varphi(u, v)$ une fonction méromorphe[1] de u, v, telle que le changement de variable $v = R_1(u, v_1)$ [R_1 algébrique en u, v_1], la transforme en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ *algébrique en* u. Supposons de plus qu'il existe une seconde transformation analogue $v = R_2(u, v_2)$, telle que $x = \varphi_2(u, v_2)$ soit aussi algébrique en u: les deux transformations sont seulement assujetties à la restriction que de l'égalité: $R_1(u, v_1) = R_2(u, v_2)$ on puisse tirer u, soit $u = \rho(v_1, v_2)$, ρ ne se réduisant pas à une constante. Dans ces conditions, je dis que $x(u, v)$ *est une fonction rationnelle de* u, v.

Il me suffit évidemment de démontrer que la fonction $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique, car je reviendrai à la fonction $x = \varphi(u, v)$ en remplaçant, dans ψ, les variables v_1 et v_2 par deux fonctions algébriques de u, v. Or dans la fonction $\varphi_2(u, v_2)$, algébrique en u, remplaçons u par $\rho(v_1, v_2)$; puisque ρ est algébrique, le résultat $x = \psi(v_1, v_2)$ est algébrique en v_1. En permutant le rôle de v_1, v_2, on verrait de même que ψ est algébrique en v_2.

C. Q. F. D.

En particulier, considérons la transformation

$$(29) \quad v = \alpha(u + h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u + h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \lambda(u + h)^{\frac{i+1}{m}} + w(u + h)^{\frac{i}{m}},$$

$$(m, n, i \text{ entiers}, m > 0, i \geq 0, n \geq i),$$

où h est une constante arbitraire dont peuvent dépendre $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; admettons que, *pour* h *quelconque*, cette transformation change $x = \varphi(u, v)$ en une fonction $x = \Phi(u, w)$ *algébrique en* u: il suffit de donner à h deux valeurs particulières arbitraires h_1, h_2, de poser $w = v_1$ pour $h = h_1$, $w = v_2$ pour $h = h_2$, et d'appliquer la proposition précédente pour voir que $x(u, v)$ est rationnel en u, v. Il n'y a d'exception que si l'égalité:

$$\alpha_1(u + h_1)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_1(u + h_1)^{\frac{i}{m}} = \alpha_2(u + h_2)^{\frac{n}{m}} + \ldots + v_2(u + h_2)^{\frac{i}{m}}$$

[1] Si $\varphi(u, v)$ est une fonction quelconque, le lemme subsiste, à condition de remplacer dans l'énoncé le mot *rationnelle* par le mot *algébrique*.

ne définit pas u en fonction de v_1, v_2; autrement dit, si la valeur

$$v_1 = v_2\left(\frac{u+h_2}{u+h_1}\right)^{\frac{i}{m}}$$
$$+\frac{a_2(u+h_2)^{\frac{n}{m}}+\ldots+\lambda_2(u+h_2)^{\frac{i+1}{m}}-a_1(u+h_1)^{\frac{n}{m}}-\ldots-\lambda_1(u+h_1)^{\frac{i+1}{m}}}{(u+h_1)^{\frac{i}{m}}}$$

ne dépend pas de u. Ce cas exceptionnel ne saurait évidemment se présenter que *si i est nul, m égal à 1 et α indépendant de h;* en particulier, si $n \leqq m$, l'exception ne se présente que dans le cas où la transformation (29) se réduit à la suivante: [1]

(30) $$v = \alpha(u+h) + w, \quad (\alpha \text{ numérique}).$$

Nous aboutissons donc à ce lemme:

Lemme A. *Si une fonction méromorphe $x = \varphi(u, v)$ devient, après une transformation (29) où h est arbitraire, une fonction $\Phi(u, w)$ algébrique en u, c'est une fonction rationnelle de u, v, sauf peut-être dans le cas où i est nul. Si, dans la transformation (29), n est au plus égal à m, $\varphi(u, v)$ est rationnelle en u, v, à moins que la transformation (29) ne se réduise à la transformation (30).*

21. ***Lemme B.*** Si une fonction $x = \varphi(u)$, uniforme dans le domaine d'un point $u = a$, s'exprime par une combinaison algébrique de plusieurs fonctions $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_h(u)$, algébroïdes [2] pour $u = a$, $\varphi(u)$ est holomorphe pour $u = a$ ou admet $u = a$ comme pôle.

[1] Si la transformation $v = \alpha u + v_1$ change $\varphi(u, v)$ en une fonction $\varphi_1(u, v_1)$ algébrique en u, il en est de même évidemment de la transformation $v = \alpha(u+h) + v_2$, qui substitue à v_1 l'expression $(\alpha h + v_2)$; la présence de h est, dans ce cas, purement parasite.

[2] On sait qu'une fonction $f(u)$ est dite *algébroïde* pour $u = a$ si elle est développable, dans le voisinage de $u = a$, suivant les puissances croissantes de $(u-a)^{\frac{1}{n}}$, (n entier > 0), les premières puissances pouvant être négatives; $f(u)$ est *fractionnaire ou méromorphe* pour $u = a$ si $u = a$ est un pôle de $f(u)$. On dit que $f(u)$ est algébroïde pour $u = \infty$ si la fonction $f_1(u_1) \equiv f\left(\frac{1}{u_1}\right)$ est algébroïde pour $u_1 = 0$.

En particulier, *si* $\varphi(u)$ *est méromorphe dans tout le plan et s'exprime algébriquement à l'aide de plusieurs fonctions* $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_h(u)$, *algébroïdes pour* $u = \infty$, $\varphi(u)$ *est une fraction rationnelle.*

Ce lemme est évident; $u = a$ ne peut être qu'un point *algébrique* — donc un point régulier ou un pôle — de la fonction $\varphi(u)$ uniforme dans le voisinage de $u = a$.

Examen d'une courbe polaire non logarithmique.

22. Nous allons aborder maintenant l'étude générale du cas où *les fonctions inverses* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *des différentielles totales*

$$u = I(x, y, z), \qquad v = J(x, y, z)$$

renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0, en supposant seulement qu'une au moins des intégrales I, J admet (à distance finie ou infinie) *une courbe polaire.*

C'est la discussion des intégrales I, J dans le voisinage d'une courbe polaire qui constituera toute la difficulté de cette étude.[1] Nous pouvons, moyennant une transformation birationnelle effectuée sur S, faire en sorte [voir le n° 10] que la courbe polaire considérée Γ soit située à distance finie dans le plan $x = 0$, sans se réduire à une droite parallèle à Oz. Plaçons-nous d'abord dans le cas où Γ est une *courbe polaire non-logarithmique* pour une détermination (I_1, J_1) du couple d'intégrales (I, J).

---

[1] Comme on peut augmenter u, v de constantes arbitraires, il est loisible (et c'est ce que nous ferons, pour simplifier l'écriture) de supposer, que $u = 0$, $v = 0$ sont des *valeurs quelconques;* autrement dit, nous admettrons qu'on a préalablement remplacé u, v par $u + a$, $v + b$, les constantes a, b étant arbitrairement choisies (et non exceptionnelles). Dans ces conditions, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ pour $v = 0$, ne se réduisent pas toutes trois à des constantes, et la même remarque s'applique à $u = 0$. De plus, on sait que $x(u + h, v + k)$ s'exprime rationnellement à l'aide de $U_1(u) = x(u, k)$, $U_2(u) = y(u, k)$, $U_3(u) = z(u, k)$ et de $V_1(v) = x(h, v)$, $V_2(v) = y(h, v)$, $V_3(v) = z(h, v)$; soit

$$x(u + h, y + k) = R(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3);$$

pour $h = k = 0$ et u, v arbitraires, les valeurs de $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ ne donnent pas à R la forme $\frac{0}{0}$, et la même remarque s'applique à y, z.

Les deux branches en question de I, J sont développables sous la forme:

$$(31)\quad u=I=\frac{A_0(y)}{X^m}+\frac{A_1(y)}{X^{m-1}}+\dots+\frac{A_{m-1}(y)}{X}+A_m(y)+A_{m+1}(y)X+\dots,$$

$$(32)\quad v=J=\frac{B_0(y)}{X^n}+\frac{B_1(y)}{X^{n-1}}+\dots+\frac{B_{n-1}(y)}{X}+B_n(y)+B_{n+1}(y)X+\dots,$$

avec

$$x = X^l \quad (l \text{ entier } \geqq 1);$$

les A, B sont des fonctions algébriques de y, holomorphes pour une valeur *quelconque* (non exceptionnelle) y_0 de y, et les développements (31), (32), pour $y = y_0$, convergent quand $|x|$ est suffisamment petit; m et n sont deux entiers positifs dont un au moins n'est pas nul; il est loisible de supposer $m \geqq n$ et $m > 0$.

Ceci posé, éliminons X entre les équations (31) et (32). Posons: $u_1 = (u+h)^{\frac{1}{m}}$, ($h$ constante arbitraire); le développement de u_1 peut s'écrire:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \dots,$$

et en remplaçant X en fonction de u_1 dans l'égalité (32), il vient:

$$(33)\qquad v = \alpha(y)u_1^n + \beta(y)u_1^{n-1} + \dots + \nu(y)u_1 + \varpi(y) + \frac{\rho(y)}{u_1} + \dots,$$

la série (pour $y = y_0$) convergeant si $|u_1|$ est suffisamment grand.

Deux cas sont à distinguer suivant que dans le développement (33) *tous les coefficients* $\alpha, \beta, \dots$ *jusqu'à* ϖ *inclusivement sont ou non indépendants de* y.

Premier cas.

23. Supposons que les coefficients $\alpha(y), \beta(y), \dots, \varpi(y)$ ne soient pas tous des constantes; soit λ le premier de ces coefficients qui dépende effectivement de y, et soit $\lambda(y)u_1^k$ le terme correspondant de la série (33). Posons:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \dots + w u_1^k, \quad (k \geqq 0).$$

Les fonctions x, y, z de u, v deviennent des fonctions méromorphes de u_1, w qui vérifient (pour les grandes valeurs de u_1) les relations:

$$(34)\quad u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1(y) + a_2(y)X + \ldots, \qquad w = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \qquad [\lambda'(y) \neq 0].$$

Soit y_0 une valeur *arbitraire* de y (valeur pour laquelle les fonctions algébriques $a_0(y), a_1(y), \ldots, \lambda(y), \mu(y), \ldots$ sont holomorphes et a_0 différent de zéro); pour $u_1 = \infty$ et $y = y_0$, w prend la valeur $w_0 = \lambda(y_0)$, *variable avec* y_0. Pour plus de clarté, remplaçons u_1 par $\frac{1}{u'}$; le système

$$u' = X\left[\frac{1}{a_0(y)} + b_1(y)X + b_2(y)X^2 + \ldots\right], \qquad w = \lambda(y) + \mu(y)u' + \ldots$$

définit un couple de fonctions $X(u', w), y(u', w)$ qui pour $u' = 0$, $w = w_0$ sont *holomorphes* et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions méromorphes $x = X^l$ et y de (u_1, w) sont donc *rationnelles* en u_1.

Ceci revient à dire que la transformation:

$$(29)\qquad v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + w(u+h)^k$$
$$(m \geqq n \geqq k \geqq 0, \quad h \text{ constante arbitraire})$$

change les fonctions méromorphes x, y de u, v en deux fonctions de u, w qui sont *algébriques en* u. Il résulte alors du lemme A que x et y (par suite z) sont *rationnelles en* u, v, à moins que la transformation (29) ne se réduise à la forme: $v = \alpha(u + h) + w$, (α constante numérique). Il suffit alors de remplacer l'intégrale J par la combinaison $w = I - \alpha J$ pour que les fonctions x, y, z soient *rationnelles en* u. D'où cette conclusion:

Dans le cas qui nous occupe, les fonctions x, y, z sont ***rationnelles*** *en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.*

Deuxième cas.

24. Supposons maintenant que dans le développement (33) tous les coëfficients $\alpha, \beta, \ldots$ jusqu'à ϖ inclusivement soient indépendants de y. Posons encore:

$$u = -h + u_1^m, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + w.$$

Si je montre que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont rationnelles en u, rien n'est changé à la conclusion précédente. Or les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ admettant un théorème d'addition, les fonctions

$$x = \varphi(u_1^m - h\,,\, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \varphi_1(u_1\,,\, w)$$

et

$$y = \psi(u_1^m - h\,,\, \alpha u_1^n + \ldots + w) \equiv \psi_1(u_1\,,\, w)$$

s'expriment algébriquement [1] à l'aide des quatre fonctions *méromorphes* à une variable:

$$U_1(u_1) = \varphi(u_1^m\,,\, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1), \qquad U_2(u_1) = \psi(u_1^m\,,\, \alpha u_1^n + \ldots + \nu u_1),$$
$$V_1(w) = \varphi(h\,,\, w), \qquad V_2(w) = \psi(h\,,\, w).$$

Pour que φ_1 et ψ_1 soient rationnels en u_1, il faut et il suffit que U_1, U_2 le soient: c'est ce que je vais établir.

Remarquons d'abord qu'inversement U_1, U_2 peuvent s'exprimer algébriquement à l'aide de V_1, V_2 et de $x = \varphi_1$, $y = \psi_1$. Ceci posé, soit $\sigma(y)$ le premier des coefficients $\varpi, \rho, \ldots$ du développement (33) qui dépend effectivement de y, et soit $\frac{\sigma(y)}{u_1^k}$ le terme de (33) correspondant.[2] Faisons la substitution:

$$w = \frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}.$$

Les égalités (31), (32) équivalent alors aux suivantes:

$$u_1 = \frac{a_0(y)}{X} + a_1 + \ldots, \qquad w' = \sigma(y) + \frac{\tau(y)}{u_1} + \ldots, \qquad [\sigma'(y) \neq 0],$$

et ce dernier système définit un couple de fonctions $X(u_1\,,\, w)$, $y(u_1\,,\, w)$ qui, pour $u_1 = \infty$, $w' = w'_0$ (w'_0 *arbitraire*), sont holomorphes et prennent les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. D'autre part, V_1, V_2 deviennent des fonctions $W_1(u_1\,,\, w') \equiv V_1\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$, $W_2(u_1\,,\, w') \equiv V_2\left(\frac{\rho}{u_1} + \ldots + \frac{w'}{u_1^k}\right)$ qui admet-

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] Un tel terme existe toujours; autrement, v serait fonction de u_1, et $PQ_1 - QP_1$ identiquement nul.

tent $u_1' = \infty$ comme point régulier ou comme pôle. Les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ apparaissent ainsi comme des combinaisons algébriques de quatre fonctions W_1, W_2, x, y de (u_1, w') qui (w' étant quelconque) sont algébroïdes pour $u_1 = \infty$: d'après le lemme (B), U_1 et U_2 sont rationnelles en u_1. C. Q. F. D.

La conclusion, dans le second cas, est la même que dans le premier. *Si donc il existe une courbe polaire non logarithmique, les fonctions x, y, z sont rationnelles en u, après qu'on a remplacé v par une combinaison linéaire convenable de u, v.*

Examen d'une courbe polaire logarithmique.

25. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèses où la courbe polaire $x = 0$ est logarithmique pour une au moins des deux branches I, J considérées. Les résidus correspondants α, β de I, J ne sont pas nuls tous deux, soit $\beta \neq 0$; en substituant $\beta I - \alpha J$ à I et $\frac{J}{\beta}$ à J, on peut supposer $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Dans ces conditions, le couple I, J se développe sous la forme suivante [voir le n° 10]

$$(35)\quad u = I(x, y, z) = \frac{A_0}{X^m} + \frac{A_1}{X^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{X} + A_m + A_{m+1}X + \dots,$$

$$(36)\quad v = J(x, y, z) = \frac{B_0}{X^n} + \frac{B_1}{X^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{X} + \log X + B_n + B_{n+1}X + \dots.$$

Dans ces conditions, les fonctions méromorphes x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et sont, par suite, des fonctions *uniformes* de $\theta = e^v$, fonctions dont les seules singularités essentielles possibles, dans le champ des θ, sont $\theta = 0$, $\theta = \infty$.

Je représenterai systématiquement, dans ce qui suit, par $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ les fonctions x, y de (u, v), par $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$ les fonctions x, y de (u, θ); on a:

$$\varphi_1(u, \theta) \equiv \varphi(u, \log\theta), \qquad \psi_1(u, \theta) \equiv \psi(u, \log\theta).$$

Je représenterai[1] par $V_1(v)$, $V_2(v)$ les fonctions $\varphi(0, v)$, $\psi(0, v)$, et par $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ les fonctions *uniformes* $V_1(\log\theta)$, $V_2(\log\theta)$. D'après le théorème d'addition, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $\varphi(u, 0)$, $\psi(u, 0)$ et de $V_1(v)$, $V_2(v)$; pour démontrer que x et y sont des fonctions rationnelles de $\theta = e^v$, il suffit de démontrer que T_1, T_2 *sont rationnelles en* θ. Mais le théorème d'addition définit encore *algébriquement*

$$\varphi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0}), \quad \psi_1(u + u_0, \overline{\theta\theta_0})$$

à l'aide de $\varphi_1(u, \theta)$, $\psi_1(u, \theta)$, $\varphi_1(u_0, \theta_0)$, $\psi_1(u_0, \theta_0)$; en particulier, si on fait $u = u_0 = 0$, on voit que $T_1(\overline{\theta\theta_0})$, $T_2(\overline{\theta\theta_0})$ s'expriment *algébriquement* à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$, $T_1(\theta_0)$, $T_2(\theta_0)$; il en résulte notamment que $T_1\left(\frac{1}{\theta}\right)$, $T_2\left(\frac{1}{\theta}\right)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$. Si donc T_1, T_2 n'admettent pas la valeur $\theta = 0$ comme singularité essentielle, il en va de même pour la valeur $\theta = \infty$. Autrement dit, si les fonctions $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont *méromorphes*, elles sont nécessairement *rationnelles*. D'où cette conclusion:

Pour établir que les fonctions x, y de u, $\theta = e^v$ sont ***rationnelles*** *en θ, il suffit de prouver que $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ sont méromorphes.*

Ceci posé, distinguons deux cas suivant que l'entier m est positif ou nul.

Premier cas: $m > 0$.

26. Posons $u_1 = (u + h)^{\frac{1}{m}}$, tirons X de l'équation (35) et portons dans l'équation (36), en remarquant que

$$\log X = -\log u_1 + \frac{1}{m}\log A_0(y) + \frac{a_1(y)}{u_1} + \frac{a_2(y)}{u_1^2} + \dots$$

$$(A_0, a_1, a_2, \dots \text{ algébriques en } y).$$

[1] Voir la note 1, p. 25. A la valeur $v = 0$, correspond la valeur $\theta = 1$. Les fonctions $V_1(v)$, $V_2(v)$ ne sont pas toutes deux des constantes, et ne peuvent, par suite, se réduire simultanément à des fractions rationnelles.

Il vient

$$v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 - \log u_1 + \varpi + \frac{\rho}{u_1} + \ldots . \tag{37}$$

Je dis d'abord que *tous les coëfficients* $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ..., $\nu(y)$ *sont des constantes.*

Supposons en effet qu'il en soit autrement; soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ qui dépend effectivement de y, et soit λu_1^k le terme correspondant du développement (37). Faisons le changement de variables:

$$u = u_1^m - h, \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + w u_1^k \qquad (k \geqq 1);$$

je vais montrer que les fonctions *méromorphes* x, y, z de u_1, w sont (pour w quelconque) *rationnelles en* u_1; le lemme A conduit dès lors à cette conclusion absurde [1] que les fonctions x, y, z de u, v sont *rationnelles*.

A cet effet, substituons à la variable w la variable v_1 définie par l'égalité:

$$v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + v_1 u_1^k - \log u_1,$$

ce qui entraîne

$$w = v_1 - \frac{\log u_1}{u_1^k},$$

et posons [2]: $x = \Phi(u_1, v_1)$, $y = \Psi(u_1, v_1)$; les égalités (35) et (36) prennent la forme:

$$u_1 = \frac{b_1(y)}{X} + b_2(y) + b_3(y)X + \ldots, \qquad v_1 = \lambda(y) + \frac{\mu(y)}{u_1} + \ldots, \qquad (\lambda'(y) \neq 0),$$

et si c désigne la valeur (*arbitraire*) $\lambda(y_0)$, les deux dernières équations définissent un couple $X(u_1, v)$, $y(u_1, v)$ qui pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$ est holomorphe et prend les valeurs $X = 0$, $y = y_0$. Les fonctions Φ, Ψ sont

---

[1] Les fonctions x, y, z de u, v ne changent pas quand on augmente v de $2i\pi$, et ne peuvent être rationnelles en v sans être indépendantes de v.

[2] Φ et Ψ sont uniformes mais peuvent admettre $u_1 = \infty$, $u_1 = 0$, $v_1 = \infty$ comme points essentiels.

donc *holomorphes* pour $u_1 = \infty$, $v_1 = c$, et quand on donne à u_1 de grandes valeurs, à v_1 des valeurs voisines de c, Φ et Ψ diffèrent très peu de 0 et y_0.

Revenons maintenant à la variable w, et soit $x = \Phi_1(u_1, w)$, $y = \Psi_1(u_1, w)$; on a:

$$\Phi_1 = \Phi\left(u_1, w + \frac{\log u_1}{u_1^k}\right) = \Phi(u_1, w + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro[1] avec $\frac{1}{u_1}$. Donnons à w la valeur constante c; la fonction $\Phi_1(u_1, h) = \Phi(u_1, h + \varepsilon)$ diffère très peu de zéro quand u_1 tend arbitrairement vers l'infini; elle est donc holomorphe pour $u_1 = \infty$, et, comme elle est méromorphe, c'est une fonction rationnelle de u_1. La même conclusion s'applique à y, donc à z, résultat absurde.

C. Q. F. D.

27. Ce point établi, je vais montrer que, (moyennant une transformation linéaire effectuée sur u, v), *x, y, z sont, dans le cas qui nous occupe, rationnelles en u et $\theta = e^v$.*

Puisque $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ sont des constantes, posons:

$$(38) \qquad v = \alpha u_1^n + \beta u_1^{n-1} + \ldots + \nu u_1 + \log\tau \equiv H(u_1) + \log\tau, \qquad u = u_1^m - h;$$

$x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$ deviennent des fonctions uniformes de u_1, τ dont les seules singularités essentielles possibles sont $u_1 = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$, et qui, en vertu du théorème d'addition, s'expriment algébriquement[2] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi[u_1^m - h, H(u_1)], \qquad U_2 = \psi[u_1^m - h, H(u_1)],$$
$$T_1(\tau) = \varphi(0, \log\tau), \qquad T_2(\tau) = \psi(0, \log\tau).$$

---

[1] Les fonctions $\Phi_1(u, w)$, $\Psi_1(u, w)$ sont uniformes; il est donc loisible, dans $\frac{\log u_1}{u_1^k}$, de prendre la détermination de $\log u_1$ telle que sa partie imaginaire soit comprise entre 0 et 2π.

[2] Ces expressions algébriques en U_1, U_2, T_1, T_2 ne sauraient être de la forme $\frac{0}{0}$, du moment que les valeurs $u = 0$, $v = 0$ sont *quelconques* (voir la note 1, p. 25). La même remarque s'applique à tous les raisonnements analogues.

Inversement, $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ (et de U_1, U_2). Les fonctions $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ sont donc *méromorphes* (et par suite *rationnelles*) si les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont méromorphes; à ces dernières, substituons les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ obtenues en posant $u_1 = \frac{t}{\tau}$, fonctions qui ne sauraient présenter de singularités essentielles en dehors de $t = \infty$, $\tau = 0$, $\tau = \infty$.[1] Je dis que $\tau = 0$ n'est pas un point essentiel de ces fonctions, ou, si on veut, en remplaçant τ par $\frac{t}{u_1}$, que $u_1 = \infty$ *est un point régulier ou un pôle des fonctions* $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$. Pour nous en rendre compte, changeons $\log \tau$ en $\log t - \log u_1$ dans l'équation (38): on voit que $x(u_1, t)$, $y(u_1, t)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $T_1(t)$, $T_2(t)$, U_1', U_2', si U_1', U_2' désignent les fonctions déduites de U_1, U_2 en y remplaçant $H(u_1)$ par $H(u_1) - \log u_1$; à savoir:

$$U_1' = \varphi[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1], \qquad U_2' = \psi[u_1^m - h, H(u_1) - \log u_1].$$

Tout revient donc à démontrer que $u_1 = \infty$ *n'est pas un point essentiel de* $U_1'(u_1)$, $U_2'(u_1)$.

Admettons, pour un instant, ce résultat. Alors, $T_1(t)$, $T_2(t)$ sont nécessairement rationnels, et comme U_1, U_2 s'expriment algébriquement à l'aide de U_1', U_2', $T_1(u_1)$, $T_2(u_1)$, les fonctions méromorphes $U_1(u_1)$, $U_2(u_1)$ sont aussi rationnelles. Il suit de là que les fonctions $x(u_1, \tau)$, $y(u_1, \tau)$ sont rationnelles en u_1, τ; par conséquent, $x(u, v)$, $y(u, v)$ deviennent des fonctions algébriques de u quand on y fait le changement de variables

$$v = \alpha(u+h)^{\frac{n}{m}} + \beta(u+h)^{\frac{n-1}{m}} + \ldots + \nu(u+h)^{\frac{1}{m}} + w;$$

mais, d'après le lemme A, ceci exige que x, y, z soient rationnels en u, v (résultat absurde), à moins que la relation entre v et w ne soit de la forme: $v = \alpha u + w$. En substituant à v la combinaison $v - \alpha u$, on voit que *les fonctions x, y, z de (u, v) sont rationnelles en u et en $\theta = e^v$*

[1] Si les fonctions $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$, $z(t, \tau)$ sont méromorphes, il en est de même sûrement des fonctions obtenues en remplaçant t par $u_1 \tau$.

28. Il nous reste donc seulement à démontrer que $U_1'(u_1)$, $U_2'(u_1)$ sont holomorphes ou rationnels pour $u_1 = \infty$. Or écrivons les relations entre X, y, u_1, t, déduites des équations (35), (36), (37); ces relations sont de la forme:

$$(39) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \ldots, \\ t = e^{\tilde{\omega}}\left[1 + \dfrac{\rho}{u_1} + \ldots\right] \equiv \delta(y) + \dfrac{\eta(y)}{u_1} + \ldots \end{cases} \qquad (\delta \not\equiv 0),$$

soit $x(y)$ le premier des coefficients $\delta, \eta, \ldots$ qui dépende effectivement de y et soit $\dfrac{x(y)}{u_1^j}$ le terme correspondant du développement (39). Faisons un dernier changement de variables:

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \ldots + \frac{t'}{u_1^j}, \qquad (\delta \neq 0);$$

les relations:

$$u_1 = \frac{b_0(y)}{X} + b_1(y) + b_2(y)X + \ldots, \qquad t' = x(y) + \frac{\lambda(y)}{u_1} + \ldots, \quad (x'(y) \not\equiv 0)$$

nous montrent, d'après un raisonnement déjà fait, que les fonctions x, y de (u_1, t') sont holomorphes pour $u_1 = \infty$; mais ces fonctions s'expriment algébriquement à l'aide de U_1', U_2', et des fonctions T_1', T_2' de u_1, t' obtenues en remplaçant dans T_1, T_2 la variable t par l'expression

$$t = \delta + \frac{\eta}{u_1} + \ldots + \frac{t'}{u_1^j};$$

T_1' et T_2' sont holomorphes (ou fractionnaires) pour $u_1 = \infty$; car l'argument t pour $u_1 = \infty$ (et t' quelconque) s'y réduit[1] à $\delta \neq 0$. Inversement, d'ailleurs, U_1' et U_2' s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions $x(u_1, t')$, $y(u_1, t')$, T_1', T_2', toutes quatre algébroïdes pour $u_1 = \infty$; *le point* $u_1 = \infty$ *n'est donc pas un point essentiel de* $U_1'(u_1')$, $U_2'(u_1)$. La discussion du cas $m > 0$ est achevée.

[1] Si $j = 0$, autrement dit si $\delta'(y) \not\equiv 0$, t coïncide avec t' et T_1', T_2' ne dépendent que de t.

Deuxième cas: $m = 0$.

29. Supposons d'abord *que n soit nul en même temps que m*, (autrement dit que I, J ne deviennent infinies que *logarithmiquement* sur la courbe polaire). Ecrivons les deux égalités:

$$u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \dots, \tag{40}$$

$$v = \log X + B_0(y) + B_1(y)X + \dots. \tag{41}$$

Posons $\theta = e^v$, et montrons que x, y, z *sont des fonctions méromorphes de* u, θ, *par suite* [n° 25] *des fonctions* ***rationnelles*** *de* θ. L'équation (41) devient:

$$\theta = X[c_0(y) + c_1(y)X + c_2(y)X^2 + \dots], \qquad c_0 \equiv e^{B_0(y)} \not\equiv 0; \tag{42}$$

en portant dans (40) la valeur de X tirée de (42), on trouve:

$$u = \alpha(y) + \beta(y)\theta + \dots + \lambda(y)\theta^j + \dots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \dots$ qui dépende effectivement de y. La transformation:

$$u = \alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j$$

conduit aux relations suivantes entre u_1, θ, X, y:

$$u_1 = \lambda(y) + \mu(y)\theta + \nu(y)\theta^2 + \dots, \qquad \theta = X[c_0 + c_1X + \dots], \qquad [\lambda'(y) \not\equiv 0],$$

et d'après un raisonnement déjà employé, ces équations sont vérifiées par un couple: $X(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, holomorphe pour $u_1 = u_1^0$, $\theta = 0$. Les fonctions $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$, sont donc holomorphes pour $\theta = 0$; mais d'autre part, elles s'expriment algébriquement [1] à l'aide des quatre fonctions:

$$U_1 = \varphi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0), \qquad U_2 = \psi(\alpha + \beta\theta + \dots + u_1\theta^j, 0),$$

$$T_1 = \varphi(0, \log\theta), \qquad T_2 = \psi(0, \log\theta),$$

et inversement T_1, T_2 s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions U_1, U_2, $x(u_1, \theta)$, $y(u_1, \theta)$ qui *toutes les quatre* [2] *sont holomorphes ou frac-*

---

[1] Voir la note 1, p. 25.

[2] La chose est évidente pour U_1, U_2 puisque les fonctions $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ sont méromorphes.

tionnaires pour $\theta = 0$. Les fonctions uniformes $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ ne sauraient donc admettre $\theta = 0$ comme point essentiel, et sont des fonctions méromorphes (par suite rationnelles) de θ. Il en est donc de même des fonctions x, y, z de u, θ. C. Q. F. D.

30. Je vais établir maintenant que le cas précédent est le seul possible si m est nul, autrement dit que *n est nécessairement nul avec m.* Admettons en effet qu'il en soit autrement et voyons que l'hypothèse est absurde.

Soit donc $m = 0$, $n > 0$. Nous distinguerons ce cas en deux sous-cas suivant que $A_0(y)$ est ou non une constante.

Premier sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A_0'(y) \not\equiv 0$.

Ecrivons les deux égalités

$$u = A_0(y) + A_1(y)X + A_2(y)X^2 + \dots, \quad [A'_0(y) \not\equiv 0], \tag{43}$$

$$v = \frac{B_0(y)}{X^n} + \frac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \dots, \quad (n > 0); \tag{44}$$

soit y_0 une valeur quelconque (non exceptionnelle) de y, et u_0 la valeur correspondante de A_0; si nous donnons à u, dans (43), la valeur (*arbitraire*) u_0, nous pouvons en tirer y sous la forme:

$$y = y_0 + gX + hX^2 + \dots,$$

et en portant dans (44) il vient:

$$\left\{\begin{aligned} v &= \frac{B_0(y_0)}{X^n} + \frac{C_1}{X^{n-1}} + \dots + \frac{C_{n-1}}{X} + \log X + C_n + C_{n+1}X + \dots, \\ &\equiv \frac{B_0(y_0)}{X^n}(1 + \varepsilon), \end{aligned}\right. \tag{45}$$

quand X tend vers zéro *arbitrairement*, v tend vers l'infini arbitrairement[1]

[1] Posons $w = \dfrac{v}{B_0(y_0)} = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, $X = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\log X = \log r + i\varphi$, ($\varphi$ restant compris expressément entre 0 et 3π); dans ces conditions, ε tend vers zéro

d'après l'égalité (45); donc si, pour $u = u_0$, v tend arbitrairement vers l'infini, la fonction uniforme $x = X'(u_0, v)$ tend vers zéro, y tend vers y_0. Les fonctions méromorphes x, y, z de u, v seraient donc rationnelles en v, ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Second sous-cas: $m = 0$, $n > 0$, $A_0'(y) \equiv 0$.

31. Il est loisible d'admettre que la valeur constante A_0 est nulle (en augmentant u d'une constante) et d'écrire:

$$(46) \quad \begin{cases} u = X^q\{A_q(y) + XA_{q+1}(y) + \ldots\}, \qquad q > 0, \\ v = \dfrac{B_0(y)}{X^n} + \dfrac{B_1(y)}{X^{n-1}} + \ldots + \dfrac{B_{n-1}(y)}{X} + \log X + B_n(y) + B_{n+1}(y)X + \ldots. \end{cases}$$

Si nous remplaçons u par u_1^q, et si nous tirons X de la première équation (46), il vient [en remarquant que $\log u_1 = \log X + a_0(y) + a_1(y)X + \ldots$]:

$$(47) \qquad v = \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{\nu}{u_1} + \log u_1 + \varpi + \rho u_1 + \ldots.$$

Soit λ le premier des coëfficients $\alpha, \beta, \ldots, \varpi, \ldots$ qui dépend effectivement de y, et soit $\dfrac{\lambda}{u_1^k}$ le terme correspondant du développement (47), ($k > 0$ ou < 0 ou $= 0$). Posons:

$$(48) \qquad v = \log u_1 + \frac{\alpha}{u_1^n} + \frac{\beta}{u_1^{n-1}} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}, \quad (k > 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0);$$

---

avec X; d'une façon précise, η désignant une quantité positive prise d'avance aussi petite qu'on veut, on a: $|\varepsilon| < \eta$, dès que $|X|$ est inférieur à une certaine quantité μ, et par suite:

$$w = \frac{1}{r^n}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)\lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha), \text{ avec } 1 - \eta \leqq \lambda \leqq 1 + \eta, \; -\eta \leqq \sin\alpha \leqq \eta;$$

si donc x varie de μ à 0 et φ de 0 à 3π, on voit que w coïncide avec tous les points extérieurs à un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à $\dfrac{1+\eta}{\mu^n}$; v coïncide avec tous les points dont le module dépasse $|B_0(y_0)|\dfrac{(1+\eta)}{\mu^n}$.

on peut écrire

$$v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro (pour $w = w_0$) quand u_1 tend vers l'infini sur une direction quelconque, et (d'après la note 1 de la page 36), quand u_1 tend vers zéro arbitrairement, v tend arbitrairement vers l'infini.

D'autre part, X, y, u_1, w vérifient deux relations de la forme:

$$u_1 = X[C_0(y) + C_1(y)X + C_2(y)X^2 + \ldots], \qquad (C_0 = \sqrt[q]{A_q}, \text{ etc})$$
$$w = \lambda(y) + u_1\mu(y) + u_1^2\nu(y) + \ldots, \qquad \lambda'(y) \not\equiv 0,$$

et, d'après un raisonnement constamment employé, ces relations montrent que les fonctions $x = X^l$ et y de u_1, w sont holomorphes pour $u_1 = 0$, $w = w_0$.

Mais les fonctions x, y de u_1, w s'expriment algébriquement à l'aide des quatre fonctions: $U_1 = \varphi(u_1^q, 0)$, $U_2 = \psi(u_1^q, 0)$, et V_1', V_2', si V_1', V_2' désignent les fonctions $V_1 = \varphi(0, v)$, $V_2 = \psi(0, v)$, où on a remplacé v par l'expression $v = \log u_1 + \frac{a}{u_1^n} + \ldots + \frac{w}{u_1^k}$; réciproquement V_1', V_2' s'expriment algébriquement à l'aide des fonctions $U_1, U_2, x(u_1, w), y(u_1, w)$ qui sont toutes les quatre, holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$; V_1' et V_2' sont donc aussi holomorphes ou fractionnaires pour $u_1 = 0$. Or, quand u_1 tend vers zéro, la variable $v = \frac{a}{u_1^n}(1 + \varepsilon)$ tend vers l'infini *arbitrairement;* les fonctions *méromorphes* $V_1(v)$, $V_2(v)$ sont donc bien déterminées quand v croît indéfiniment; ce sont, par suite, des fractions rationnelles de v; résultat absurde. C. Q. F. D.

Conséquences de la double discussion précédente. Théorème définitif.

32. Les conclusions des n^{os} 23, 24, 27, 29, 30 et 31 se résument ainsi:

Après une transformation linéaire convenable effectuée sur u, v, 1° *ou bien les fonctions* x, y, z *de* u, v *sont rationnelles en* u;

2° *ou bien les fonctions* x, y, z *sont rationnelles en* e^u, *et les intégrales* I, J *ne peuvent devenir infinies que logarithmiquement.*

Le cas 1° a été étudié aux n^{os} 12—16.

Dans le cas 2°, I et J admettent le couple de périodes polaires $(2i\pi, 0)$. Si J ne présente pas de courbes polaires, on rentre dans l'hypothèse qui fait l'objet des n^{os} 17—19. Si J présente une courbe polaire, cette courbe est nécessairement logarithmique, et si le couple de résidus correspondants est α, β, $(\beta \neq 0)$, il suffit de remplacer u par $u - \frac{\alpha}{\beta} v$ et v par $\frac{v}{\beta}$ pour que I et J admettent les deux couples de périodes polaires $(2i\pi, 0)$ et $(0, 2i\pi)$. Dans ces conditions, x, y, z *sont rationnelles en* $t = e^u$, $\theta = e^v$.

Inversement, t et θ sont *algébriques* en x, y, z. Je dis qu'on peut toujours faire en sorte que t *et* θ *soient rationnelles en* x, y, z. Tout d'abord, les résidus de I (et de J) sont réels et commensurables, et en multipliant I (ou J) par un certain entier, on peut les supposer entiers, premiers entre eux: la plus petite période de I (et aussi de J) est alors $2i\pi$. A la période $2i\pi$ de I correspond une période $2mi\pi$ de J; en remplaçant J par $J_1 = J - mI$, on annule m; seulement, la plus petite période de J_1 peut n'être plus $2i\pi$, mais $2i\pi k$, (k entier); l'entier k entre alors en facteur dans tous les résidus de J_1, soit $J_2 = \frac{J_1}{k}$; à la période $2i\pi$ de J_2 correspond une période $2i\pi l$ de I; je remplace I par $I_1 = I - lJ_2$, et les intégrales I_1, J_2 admettent les couples primitifs de périodes:

$$\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix};$$

e^{J_1} et e^{J_2} sont rationnels en x, y, z. Autrement dit, *après une substitution linéaire convenable effectuée sur* u, v, *les quantités* e^u, e^v *sont rationnelles en* x, y, z, *et inversement les fonctions uniformes* x, y, z *de* e^u, e^v *sont rationnelles en* e^u, e^v.

Dans le dernier cas que nous venons d'élucider, la surface $S(x, y, z) = 0$ correspond *birationnellement* à un plan.

33. **Théorème définitif.** Le théorème que nous avions en vue se trouve dès lors complètement démontré. Nous l'énoncerons ainsi:

Considérons deux intégrales de différentielles totales, qui ne soient point fonctions l'une de l'autre, attachées à une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, *et dont une au moins admet une courbe polaire; soit:*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} u = \int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy \equiv I(x, y, z), \\ v = \int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy \equiv J(x, y, z). \end{cases}$$

Si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion du système (Σ) renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0 (liées par la condition $S(x_0, y_0, z_0) = 0$), ces fonctions, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur u, v, sont des combinaisons rationnelles d'un des systèmes de fonctions qui suivent:

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} X = u, & Y = v, & Z = 0, \\ X = u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = e^u, & Y = e^v, & Z = 0, \\ X = u - \varepsilon\zeta(v), & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \\ X = e^u \dfrac{\sigma(v-\alpha)}{\sigma(v)}, & Y = \wp(v), & Z = \wp'(v), \end{cases} \quad \begin{array}{c} \varepsilon = 0 \text{ ou } 1, \\ \alpha, g_2, g_3 \text{ constantes numériques.} \end{array}$$

Comme les intégrales I, J présentent sûrement une courbe polaire [voir le n° 11] quand le nombre des périodes est inférieur à 4, on voit que le théorème peut s'énoncer encore ainsi:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales (distinctes) de différentielles totales attachées à S renferment rationnellement les constantes initiales x_0, y_0, z_0, ce sont des fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes) dégénérées[1] *ou non.*

C'est le théorème auquel nous avons ramené celui de Weierstrass [n° 7].

De plus, *X, Y, Z s'expriment rationnellement en fonction de x, y, z.* La surface S correspond birationnellement à un plan dans les trois premiers cas [où $Z = 0$], et au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$ dans les deux derniers.

[1] Les systèmes de fonctions qui figurent dans le tableau (T) sont des quotients de fonctions θ (à deux variables) dégénérées [voir le n° 4].

Remarquons que les coordonnées X, Y, Z de ce cylindre se laissent mettre *de trois manières distinctes* sous la forme de fonctions hyperelliptiques dégénérées, à savoir:

$$Y = \wp(v), \qquad Z = \wp'(v)$$

avec

$$X = u, \quad \text{ou} \quad X = u - \zeta(v), \quad \text{ou} \quad X = e^u \frac{\sigma(v-a)}{\sigma(v)};$$

à chacune de ces représentations correspond un groupe *permutable* à deux paramètres de transformations birationnelles de la surface en elle-même, groupe obtenu en augmentant u, v de constantes arbitraires.

Enfin, donnons une dernière forme aux conclusions auxquelles nous venons de parvenir:

Quand les fonctions x, y, z de u, v définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales quelconques attachées à S renferment rationnellement les constantes x_0, y_0, z_0 et admettent au plus trois couples de périodes distincts, le système (Σ), moyennant une transformation birationnelle effectuée sur la surface S et une substitution linéaire effectuée sur u, v, se ramène à une des formes:

$$(\sigma) \quad \begin{cases} dU = dX, & dV = dY, \quad Z = 0, \\ dU = dX, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = \dfrac{dX}{X}, & dV = \dfrac{dY}{Y}, \quad Z = 0, \\ dU = dX + \varepsilon \dfrac{Y dY}{Z}, & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3, \\ dU = \dfrac{dX}{X} + \dfrac{dY}{Z}\left[\zeta(\alpha) + \dfrac{\wp'(\alpha) + Z}{2[\wp(\alpha) - Y]}\right], & dV = \dfrac{dY}{Z}, \quad Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3, \\ \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1;\ g_2, g_3, \alpha \text{ constantes numériques}). \end{cases}$$

Quand α tend vers zéro, le dernier système (σ) tend vers le suivant:

$$(49) \qquad dU = \frac{dX}{X}, \qquad dV = \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}}.$$

34. *Comparaisons avec les fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques.*

Les fonctions hyperelliptiques de genre 2, soit $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$, se laissent définir par le système:

$$(\tau)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \frac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}},\\ dv &= \frac{d\xi_1}{\sqrt{H(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{\sqrt{H(\xi_2)}}\end{aligned}\right.$$

avec:

$$\left\{\begin{aligned} &H(\xi) \equiv a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + \ldots + a_1\xi + a_0,\\ &\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{H(\xi_1)} + \sqrt{H(\xi_2)}.\end{aligned}\right.$$

Le système (τ) dégénère quand le coefficient a_5 de H s'annule ou quand H a des racines multiples. D'après le théorème précédent, une transformation birationnelle effectuée sur x, y, z et une transformation linéaire effectuée sur u, v ramènent alors (τ) à une des formes (σ). Démontrons rapidement la réciproque: c'est-à-dire que *tout système* (σ) *est réductible à un système* (τ) *dégénéré.*

Tout d'abord, il suffit de faire $H \equiv 1$, puis $H(\xi) \equiv \xi^2$, puis $H(\xi) \equiv \xi(\xi - 1)$, pour obtenir trois systèmes (τ) qui équivalent respectivement aux trois premiers systèmes (σ).

Quant au quatrième, il ne saurait correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *seconde* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_1)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{\xi_1 d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{\xi_2 d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \qquad R(\xi) \equiv 4\xi^3 - g_2\xi - g_3,\\ dv &= \frac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1\xi_2, \quad \zeta = \sqrt{R(\xi_1)} + \sqrt{R(\xi_2)}.\end{aligned}\right.$$

Il est clair que $v(x, y, z)$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$;[1] mais allons voir dans un instant que ces périodes sont *primitives.* Posons:

$$\xi_1 = \wp(v_1), \qquad \xi_2 = \wp(v_2), \qquad Y = \wp(v) = \wp(v_1 + v_2),$$

[1] Puisque le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé quand ξ_1 et $\sqrt{R(\xi_1)}$ reprennent les mêmes valeurs, ξ_2 et $\sqrt{R(\xi_2)}$ ne variant pas.

d'où:

$$Y = -(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right\}^2$$
$$= \rho(\xi, \eta, \zeta), \quad (\rho \text{ rationnel});$$

$\sqrt{R(Y)} = \wp'(v_1 + v_2)$ s'exprime de même rationnellement en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$u = -[\zeta(v_1) + \zeta(v_2)] + \text{const.} = -\zeta(v) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] + \text{const.}$$

La transformation rationnelle:

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{R(\xi_1)} - \sqrt{R(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2}\right] = \rho_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad Y = -\xi + X^2$$

ramène donc (τ_1) au système:

$$(\sigma_1) \quad du = dX + \frac{YdY}{\sqrt{R(Y)}}, \qquad dv = \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}, \quad \text{avec} \quad S(X, Y, \zeta) = 0.$$

toutes les périodes de v dérivent sûrement des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, puisque Y et $\sqrt{R(Y)}$ reprennent les mêmes valeurs quand le point (ξ, η, ζ) décrit un cycle fermé. Il suit de là que ξ, η, ζ sont uniformes, donc rationnels, en $X, Y, \sqrt{R(Y)}$. Une transformation *birationnelle* ramène ainsi (τ_1) à (σ_1) et la surface [1] S' au cylindre $Z^2 = 4Y^3 - g_2 Y - g_3$, si S' désigne la surface que définissent dans l'espace (ξ, η, ζ) les égalités:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1\xi_2, \qquad \zeta = \sqrt{4\xi_1^3 - g_2\xi_1 - g_3} + \sqrt{4\xi_2^3 - g_2\xi_2 - g_3}.$$

Remarquons qu'en remplaçant u par $\frac{u}{\alpha}$ et X par $\frac{X}{\alpha}$, on ramène (τ_1) à la forme:

$$(\sigma') \qquad du = dX + \frac{\alpha YdY}{Z}, \qquad dv = \frac{dY}{Z}, \qquad Z^2 = R(Y),$$

système qui comprend en particulier (pour $\alpha = 0$) le quatrième système (σ) où $\varepsilon = 0$. Mais pour $\alpha = 0$ la transformation de passage de (σ') à τ_1 devient illusoire. Le quatrième système (σ) où ε est nul ne correspond donc à aucun système (τ_1), mais il dégénère d'un transformé birationnel de τ_1.

[1] Ce résultat a déjà été établi par M. Picard, Mém. couronné *Sur les fonctions algébriques de deux variables* [p. 101—104].

35. Passons au dernier système (σ) qui ne peut correspondre qu'à un système (τ) formé d'intégrales elliptiques de *première* et de *troisième* espèce. Considérons donc le système:

$$(\tau_2)\quad \begin{cases} du = \dfrac{\wp'(\lambda)d\xi_1}{[\xi_1-\wp(\lambda)]\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{\wp'(\lambda)d\xi_2}{[\xi_2-\wp(\lambda)]\sqrt{R(\xi_2)}}, & R(\xi) \equiv 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \\ dv = \dfrac{d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{\sqrt{R(\xi_2)}}, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1\xi_2, & \zeta = \sqrt{R(\xi_1)} + \sqrt{R(\xi_2)}. \end{cases}$$

Posons, comme tout-à-l'heure,

$$\xi_1 = \wp(v_1), \qquad \xi_2 = \wp(v_2), \qquad Y = \wp(v) = \wp(v_1 + v_2), \qquad \sqrt{R(Y)} = \wp'(v);$$

Y et $\sqrt{R(Y)}$ sont encore rationnels en ξ, η, ζ. On a ensuite:

$$e^u = \frac{\sigma(v_1 - \lambda)\,\sigma(v_2 - \lambda)}{\sigma(v_1 + \lambda)\,\sigma(v_2 + \lambda)} e^{2\zeta(\lambda)(v_1+v_2)}$$

$$= e^{2\zeta(\lambda)v} \frac{\sigma(v)}{\sigma(v + 2\lambda)} \frac{\sigma(v_1 - \lambda)\sigma(v_2 - \lambda)\sigma(v_1 + v_2 + 2\lambda)}{\sigma(v_1 + \lambda)\sigma(v_2 + \lambda)\sigma(v_1 + v_2)} \equiv e^{2\zeta(\lambda)v} \frac{\sigma(v)}{\sigma(v + 2\lambda)} \chi(v_1, v_2),$$

χ désignant une fonction elliptique (symétrique) de v_1, v_2, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de (ξ, η, ζ), soit $\chi = \rho_1(\xi, \eta, \zeta)$. La transformation rationnelle: $X = \rho_1(\xi, \eta, \zeta)$, $Y = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ ramène donc (τ_2) au système:

$$du = \frac{dX}{X} + \{2\zeta(\lambda) + \zeta(v) - \zeta(v + 2\lambda)\} dv, \qquad dv = \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

ou, si on veut, en posant $\alpha = -2\lambda$ et en remplaçant u par $u_1 - 2v\zeta(\lambda)$, à la forme

$$(\sigma'')\qquad du_1 = \frac{dX}{X} + \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}}\left[\zeta(\alpha) + \frac{\wp'(\alpha) + \sqrt{R(Y)}}{2[\wp(\alpha) - Y]}\right], \qquad dv = \frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

c'est-à-dire au cinquième système (σ). Le raisonnement fait au numéro précédent montre que $2\omega_1$, $2\omega_2$ sont des périodes primitives de l'intégrale $v(\xi, \eta, \zeta)$, et que, par suite, ξ, η, ζ sont rationnels en X, Y, $\sqrt{R(Y)}$. Le système (τ_2) est ainsi ramené *birationnellement* au dernier système (σ) le plus général, à cela près que pour $\alpha = 0 +$ période, (c'est-à-dire pour $\lambda = \frac{1}{2}$ période), la transformation de passage entre (τ_2) et (σ'') devient illusoire. Le système (49) n'est donc équivalent à aucun système (τ_2), mais il dégénère d'un transformé birationnel de (τ_2).

La transformation de passage de (σ'') à (τ_2) nous fait connaître une nouvelle correspondance birationnelle entre le cylindre $Z^2 = R(Y)$ et la surface S'.

36. *Discussion d'une méthode de démonstration proposée par M. Picard.*

M. PICARD a indiqué[1] du théorème de WEIERSTRASS une démonstration qui repose sur les principes intuitifs suivants:

Considérons trois fonctions uniformes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ définies par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales $u = I$, $v = J$ attachées à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$; soit

$$(50) \qquad du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy, \qquad dv = P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy.$$

Introduisons deux autres intégrales de différentielles totales attachées à la surface $\Sigma(\xi, \eta, \zeta) = 0$, soit

$$(51) \qquad \begin{cases} I_1 = \int \Pi(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \\ J_1 = \int \Pi_1(\xi, \eta, \zeta)d\xi + K_1(\xi, \eta, \zeta)d\eta, \end{cases}$$

telles que chacun de leurs couples de périodes soit égal à un couple de périodes des deux premières. Les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ obtenues en remplaçant u et v par I_1 et J_1 sont évidemment des fonctions *uniformes* du point (ξ, η, ζ) de Σ; quand, de plus, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes*, les singularités *essentielles* des fonctions x, y, z de (ξ, η, ζ) (s'il en existe) sont nécessairement distribuées suivant les courbes *polaires* de I_1, J_1. Enfin, quand les fonctions ξ, η, ζ de u, v, obtenues en posant $u = I_1$, $v = J_1$, sont elles-mêmes *uniformes* et quand les couples de périodes sont les mêmes pour (I, J) et pour (I_1, J_1), la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) est *biuniforme.*

Ceci posé, plaçons-nous dans l'hypothèse où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, définies par le système (50), non seulement sont *méromorphes*, mais renferment *rationnellement* les constantes d'intégration (x_0, y_0, z_0). M. PICARD se propose d'établir qu'on peut choisir pour système (51) un système *hyperelliptique*, tel que la correspondance entre (x, y, z) et (ξ, η, ζ) soit non seulement **biuniforme** mais **birationnelle.** La démonstration (voir le n° 8)

[1] Voir la note 1, pag. 11.

n'a besoin d'être faite que dans le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ont au plus trois couples de périodes distincts.

37. L'illustre géomètre distingue deux cas principaux, suivant qu'il existe ou non des périodes polaires. Pour plus de clarté, discutons le premier cas dans l'hypothèse particulièrement simple où les couples de périodes se réduisent à deux, tous deux logarithmiques, soit les couples $\begin{pmatrix} 2i\pi, & 0 \\ 0, & 2i\pi \end{pmatrix}$, correspondant respectivement à deux courbes polaires C_1 et C_2.

M. Picard introduit alors le système (τ) dégénéré, [loc. cit. p. 113, 114]:

$$(52)\quad \begin{cases} du = \dfrac{a d\xi_1}{(\xi_1 - a^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{a d\xi_2}{(\xi_2 - a^2)\sqrt{\xi_2}}, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \xi_1 \xi_2, \\ dv = \dfrac{b d\xi_1}{(\xi_1 - b^2)\sqrt{\xi_1}} + \dfrac{b d\xi_2}{(\xi_2 - b^2)\sqrt{\xi_2}}, & \zeta = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}. \end{cases}$$

Les fonction suniformes de x, y, z de ξ, η, ζ ne sauraient admettre de singularités essentielles en dehors des quatre courbes polaires $\xi_1 = a^2$, $\xi_1 = b^2$, $\xi_2 = a^2$, $\xi_2 = b^2$. M. Picard *admet*[1] que le point (x, y, z) tend vers un point *déterminé* de la courbe polaire C_1, quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ *ayant un certain signe*, (ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$ étant invariables et quelconques). En s'appuyant sur le fait que (x_0, y_0, z_0) figurent rationnellement dans $x(u, v)$, $y(u, v)$ $z(u, v)$, il montre ensuite qu'il en va de même pour l'autre signe de $\sqrt{\xi_1}$, et il en conclut que les fonctions x, y, z de ξ, η, ζ sont dénuées de singularités essentielles et par suite rationnelles.

En réalité, ce qui est quasi-évident c'est que le point (x, y, z) est très voisin d'une courbe polaire de S dès que ξ_1 est voisin de a^2, mais *il n'en résulte nullement que (x, y, z) tende vers un point déterminé*. Prenons, par exemple, le système:

$$(53)\qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = \frac{dy}{y} + dx\left[\frac{1}{x^2} - 1\right],$$

---

[1] M. Picard se borne à dire (à la notation près) [loc. cit. p. 107 et 114] que, si ξ_1 tend vers a^2 (le radical $\sqrt{\xi_2}$ ayant un signe convenable), la période polaire est pour u égale à $2\pi i$. »Donc quand ξ_1 tend vers a^2, $\sqrt{\xi_1}$ ayant un certain signe, quels que soient d'ailleurs ξ_2 et $\sqrt{\xi_2}$, le point (x, y, z) tendra vers un point de la courbe logarithmique C_1.»

qui définit les fonctions *méromorphes:* $x = e^u$, $y = e^{v+e^u+e^{-u}}$; les relations entre x, y et ξ_1, ξ_2 sont ici:

$$x = c\frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}, \qquad y = c'\frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)}e^{x+\frac{1}{x}}$$

(c, c' constantes arbitraires);

x tend vers 0 ou ∞ suivant que $\sqrt{\xi_1}$ tend vers $+a$ ou $-a$, mais, *dans l'un et l'autre cas, $y(\xi_1, \xi_2)$ est complètement indéterminée.*

Il est donc indispensable de démontrer que (x, y, z) *tend vsrs un point déterminé* quand $\sqrt{\xi_1}$ tend vers une des valeurs $a, -a$, et *cette démonstration ne peut être faite sans invoquer l'hypothèse que $x(u, v)$, $y(u, v)$ renferment rationnellement (x_0, y_0, z_0).* [1]

La même objection s'applique au raisonnement [loc. cit. p. 106, 108] qui concerne le cas où un seul des trois couples de périodes est supposé polaire.

48. *Quand il n'existe pas de périodes polaires,* M. PICARD s'appuie seulement sur l'hypothèse que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont *méromorphes* et il arrive à cette conclusion [p. 110—114] que ce sont alors des fonctions hyperelliptiques dégénérées. Or l'exemple:

$$du = -\frac{dx}{x^2}, \qquad dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} + \frac{2dx}{x^3} \tag{54}$$

qui engendre les fonctions méromorphes

$$x = \frac{1}{u}, \qquad y = \wp(v + u^2),$$

suffit à mettre cette conclusion en défaut.

---

[1] La transformation $X = \frac{(\sqrt{\xi_1} - a)(\sqrt{\xi_2} - a)}{(\sqrt{\xi_1} + a)(\sqrt{\xi_2} + a)}$, $Y = \frac{(\sqrt{\xi_1} - b)(\sqrt{\xi_2} - b)}{(\sqrt{\xi_1} + b)(\sqrt{\xi_2} + b)}$ ramène le système (52) à la forme: $du = \frac{dX}{X}$, $dv = \frac{dY}{Y}$. Le raisonnement de M. PICARD revient à *admettre* que (un couple de résidus de I, J étant $+1$ et 0) la valeur $X = 0$ est un point non essentiel pour les fonctions uniformes x, y, z de X, Y, et à *démontrer* qu'il en va de même pour $X = \infty$. Or la discussion qui fait l'objet des n^{os} 25—31 n'a d'autre but que d'établir le fait admis ici.

Tout d'abord, la discussion de la courbe polaire non logarithmique (telle qu'elle est exposée aux pages 112—113) prête à la même objection que je viens de mettre en évidence pour une courbe logarithmique. Mais de plus cette discussion repose essentiellement sur le lemme suivant qu'énonce tout d'abord M. PICARD (p. 110 et 112): »Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont uniformes (sans toutefois être algébriques), toute courbe polaire non logarithmique laisse finie une combinaison linéaire de u, v.« Or dans l'exemple (54), où $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont *méromorphes*, aucune combinaison linéaire de u, v ne reste finie pour $x = 0$. Pour démontrer ce lemme, il est nécessaire de s'appuyer sur le fait que les constantes (x_0, y_0, z_0) figurent *rationnellement* dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, et cette démonstration me paraît exiger une discussion entièrement identique à celle des n^os 22—24.

En définitive, — et sans insister sur d'autres objections qui compliqueraient encore le raisonnement — la méthode de M. PICARD, si intéressante qu'elle soit en elle-même, soulève (en outre de difficultés nouvelles) les mêmes difficultés qui ont exigé plus haut la discussion des n^os 22—31, la seule partie un peu délicate de notre démonstration.

Sur le cas où les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont uniformes sans renfermer rationnellement les constantes (x_0, y_0, z_0).

39. Il est impossible, après les considérations précédentes, de ne pas se poser ce problème:

Quand les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de deux intégrales de différentielles totales sont uniformes, quelle est la nature de ces fonctions?

Ce difficile problème se rattache évidemment à l'étude des équations différentielles à intégrale générale uniforme. Je me bornerai à énoncer ici les résultats auxquels conduit la méthode que j'ai appliquée aux équations du second ordre.[1]

Par hypothèse, les constantes x_0, y_0, z_0 figurent sous forme transcendante dans $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Mais je montre (et c'est là toute la difficulté

---

[1] Voir le Bulletin de la soc. math. de France (tome 28, p. 201—211) et les Acta mathematica (tome 25, p. 1—80).

de la question) qu'on *peut toujours choisir les deux constantes arbitraires de façon qu'une d'elles entre algébriquement dans* x, y, z. Il est dès lors aisé d'élucider la nature des transcendantes x, y, z de (u, v) et même de traiter ce problème plus général:

Quand les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, engendrées par l'inversion de deux intégrales de différentielles totales, n'ont qu'un nombre fini de branches et dépendent algébriquement d'une des constantes d'intégration (convenablement choisies), quelle est la nature de ces fonctions?

La réponse s'énonce ainsi: *Une transformation algébrique effectuée sur x, y et une substitution linéaire effectuée sur u, v, ramènent les deux différentielles totales à une des formes:* [1]

(I) $$dv = dy,$$

ou

(II) $$dv = \frac{dy}{y},$$

ou

(III) $$dv = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

avec:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(IV)} & du = \dfrac{dx}{x} + H(y)dy, \\ \textit{ou} & \\ \text{(V)} & du = \dfrac{dx}{\sqrt{4x^3 - \gamma_2 x - \gamma_3}} + H(y)dy \end{array}\right\} (H \text{ algébrique}).$$

Les fonctions x, y de (u, v) correspondantes sont:

$$y = v, \quad \text{ou} \quad y = e^v, \quad \text{ou} \quad y = \wp(v, g_2, g_3)$$

avec:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(VI)} & x = e^{u+K(v)} \\ \text{ou} & \\ \text{(VII)} & x = \wp_1(u + K(v)), \quad \wp_1(u) = \wp(u, \gamma_2, \gamma_3), \end{array}\right\} K(v) = -\int H[y(v)]\frac{dy}{dv}dv,$$

[1] Je suppose bien entendu qu'on écarte le cas (déjà traité) où les deux constantes, convenablement choisies, figurent algébriquement dans x, y.

Il faut que $e^{K(v)}$ (dans le cas VI), et $\wp_1[K(v)]$ (dans le cas VII) soient des fonctions de v *à un nombre fini de valeurs.* Ceci revient à dire que l'intégrale abélienne $\int H(y)dy$, [en dehors de la (ou des deux) périodes qui correspondent à la (ou aux deux) périodes de v] ne doit admettre que des périodes de la forme $\frac{2i\pi}{l}$ (dans le cas VI) et $\frac{2m\omega_1' + 2n\omega_2'}{l}$ (dans le cas VII): l, m, n sont des entiers, et $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ les périodes de $\wp_1$.

Dans le cas (VII), les fonctions x, y de (u, v) sont 4 fois périodiques et présentent des singularités essentielles à distance finie, du moment que $\int H(y)dy$ n'est pas de première espèce.[1] Les quatre couples de périodes ne satisfont pas en général à la condition de RIEMANN.

Dans le cas (VI), les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent n'admettre comme singularités essentielles que $u = \infty$ et $v = \infty$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que v vérifie une des équations I ou II (mais non l'équation III); il faut ensuite (et il suffit) que $\int H(y)dy$ ne devienne infini que logarithmiquement en dehors du point $y = \infty$ dans le cas I, et des points $y = 0$, $y = \infty$ dans le cas II. Quand ces conditions ne sont pas remplies, $x(u, v)$ présente des points singuliers essentiels à distance finie dans le champ des v.

Quelques applications du théorème de Weierstrass.

40. Je voudrais signaler rapidement quelques applications du théorème de WEIERSTRASS.

Une première application est relative aux transformations birationnelles des surfaces algébriques.

Au sujet de ces transformations, M. PICARD[2] a établi ce théorème qui a une importance considérable dans la théorie des surfaces algébriques:

---

[1] Quand $\int H(y)dy$ est de première espèce, on rentre dans le cas où les constantes figurent algébriquement dans x, y.

[2] Loc. cit. p. 65—99; voir aussi mes *Leçons de Stockholm*, p. 255—288, et les récentes recherches de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES (Math. Annalen, 1899, et Comptes-Rendus de l'Académie des Sc. de Paris, 5 novembre 1900).

»Quand une surface algébrique S admet un faisceau continu de transformations birationnelles, ou bien elle renferme une famille de courbes de genre 0 ou 1, *ou bien elle possède deux intégrales de différentielles totales*

$$u = \int P_1 dx + Q dy, \qquad v = \int P_1 dx + Q_1 dy,$$

telles que les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *soient uniformes et dépendent rationnellement des constantes initiales* (x_0, y_0, z_0).»

Occupons-nous seulement de *ce dernier cas:* le théorème de WEIERSTRASS énoncé au n° 33, nous montre que la surface S est alors une surface *hyperelliptique, dégénérée ou non.*

41. Une autre application du théorème de WEIERSTRASS se rencontre dans l'étude analytique *des équations différentielles.* J'ai montré notamment [1] qu'il joue un rôle essentiel dans la théorie des *équations du second ordre dont l'intégrale générale renferme algébriquement les deux constantes.*

Limitons-nous, pour le faire comprendre, à un beau résultat établi par M. PICARD.

Soit $S\left(x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}\right) = 0$ une équation (algébrique) du second ordre, où la variable indépendante u ne figure pas explicitement. Quand l'intégrale génerale $x(u)$ de cette équation dépend *rationnellement* des constantes initiales x_0, x_0', x_0'' [liées par la relation $S(x_0, x_0', x_0'') = 0$], M. PICARD a montré que deux cas sont possibles:

1° ou bien $x(u)$ est une fonction rationnelle soit de u, soit de e^{gu}, soit de $\wp(u, g_2, g_3)$, $\wp'(u, g_2, g_3)$, [g, g_2, g_3 constantes numériques];

2° ou bien, si on pose: $y = x'$, $z = x''$, la surface $S(x, y, z) = 0$ possède deux intégrales de différentielles totales telles qu'en égalant la première à $u + a$, la seconde à une constante b, la fonction $x(u + a, b)$ ainsi définie soit précisément l'intégrale générale de l'équation donnée.

Le théorème du n° 33 exprime dès lors que, dans le cas 2°, *la fonction $x(u)$ s'obtient en remplaçant, dans une certaine fonction hyperelliptique (dégénérée ou non), un des arguments par $u + a$ et le second par une constante b*; le cas 1° rentre, en particulier, dans ce mode de génération.

---

[1] *Leçons de Stockholm,* p. 351—394.

[1] Loc. cit. p. 129—142.

Plus généralement, considérons un système différentiel: $x'_u = H(x, y)$, $y'_u = K(x, y)$, où H et K sont *algébriques en* x, y *et indépendants de* u: *quand l'intégrale générale* $x(u)$, $y(u)$ *de ce système dépend algébriquement des deux constantes, j'ai montré*[1] *que* x *et* y *sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans deux fonctions hyperelliptiques dégénérées ou non (aux mêmes périodes) un des arguments par* $(u + a)$ *et l'autre par* b.

42. *Complément au théorème de Weierstrass.* Ces applications suffisent à faire comprendre l'importance du théorème de WEIERSTRASS en dehors même de la théorie des fonctions abéliennes. Je me servirai seulement du dernier résultat énoncé pour compléter, sur un point, le théorème même de WEIERSTRASS. Dans l'énoncé de ce théorème (n° 2), nous avons supposé que les deux fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ étaient **distinctes**. *Qu'advient-il quand il en est autrement?*

Soit donc $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ deux fonctions de u, v *dont le jacobien est nul*, et qui admettent *un théorème d'addition*. Je vais montrer que φ *et* ψ *sont des combinaisons algébriques des deux fonctions obtenues en remplaçant dans un couple de fonctions hyperelliptiques (aux mêmes périodes), un des arguments par* $\alpha u + \beta v$, *et l'autre par zéro:* les fonctions hyperelliptiques peuvent d'ailleurs être *dégénérées*.

Posons, comme au n° 5, $x = \varphi(u + u_0, v + v_0)$, $y = \psi(u + u_0, v + v_0)$, et $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Par hypothèse, on a: $y = F(x)$; et d'autre part, d'après le théorème d'addition, x et y s'expriment *algébriquement* à l'aide de x_0, y_0, soit:

$$x = A(x_0, y_0, u, v) \equiv A(x_0, F(x_0), u, v), \quad [A \text{ algébrique en } x_0, y_0]. \tag{55}$$

De cette équation, on tire aussitôt:[2]

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_0}}{\dfrac{\partial x}{\partial v_0}} = \frac{\left[\dfrac{\partial A}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\dfrac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\left[\dfrac{\partial A}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)\right]\dfrac{\partial x_0}{\partial v_0}} = \frac{\dfrac{\partial x_0}{\partial u_0}}{\dfrac{\partial x_0}{\partial v_0}};$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 351—360.

[2] Il est loisible d'admettre qu'une des expressions $\dfrac{\partial A}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A}{\partial y_0} F'(x_0)$, $\dfrac{\partial B}{\partial x_0} + \dfrac{\partial B}{\partial y_0} F'(x_0)$, n'est pas identiquement nul, (soit la première); sinon, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ seraient nuls, et x, y seraient des constantes.

le rapport $\dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}$ est donc indépendent de u, v; autrement dit, $\varphi(u, v)$ vérifie l'équation: $\beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ (α, β numériques); $\varphi(u, v)$ *est donc une simple fonction de* $\alpha u + \beta v$; il en est de même par suite de $\psi(u, v) = F(\varphi)$. Il est loisible, en remplaçant u par $\alpha u + \beta v$, de supposer $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Ceci posé, reprenons les égalités:

$$x = \varphi(u + u_0) = A(x_0, y_0, u), \qquad y = \psi(u + u_0) = B(x_0, y_0, u),$$

et éliminons x_0, y_0 entre les équations: $x = A$, $y = B$, $x'_u = \frac{\partial A}{\partial u}$, $y'_u = \frac{\partial B}{\partial u}$; il vient:

$$(56) \qquad \frac{dx}{du} = H(x, y, u), \quad \frac{dy}{du} = K(x, y, u) \quad (H, K \text{ algébriques en } x, y),$$

Les fonctions $x = \varphi(u + u_0)$, $y = \psi(u + u_0)$ vérifient, en particulier, ce système; il existe donc au moins un couple de fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ tel que les solutions du système différentiel:

$$du = \chi(x)dx = \tau(y)dy$$

appartiennent au système (56). Si les fonctions $\chi(x)$, $\tau(y)$ qui jouissent de cette propriété dépendent au moins d'une constante arbitraire, u ne figure pas dans H, K; si non, χ et τ se déduisent *algébriquement* du système (56) et sont, par suite, algébriques respectivement en x, y. Dans le premier cas, le théorème qui termine le n° 41 s'applique au système (56); dans le second cas, $x(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u, et de même y est une fonction algébrique de $\wp_1(u, \gamma_2, \gamma_3)$, ou de $e^{\gamma u}$ ou de u. Dans l'un et l'autre cas, *x et y sont des combinaisons algébriques de deux fonctions obtenues en remplaçant, dans un couple (dégénéré ou non) de fonctions hyperelliptiques, un des arguments par u et l'autre par* 0. C. Q. F. D.

Extension aux fonctions de n variables.

43. Le théorème de Weierstrass se démontre pour les fonctions de n variables par une méthode absolument identique à celle que nous

avons développée plus haut. Toute la difficulté revient à démontrer ce théorème:

Si n intégrales distinctes[1] *de différentielles totales, soit*

$$u_j = \int P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_1 + Q_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})dx_2 + \ldots$$
$$+ T_j(x_1, \ldots, x_{n+1})dx_n,$$

attachées à la surface algébrique [à $(n+1)$ dimensions] $S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, engendrent par leur inversion des fonctions uniformes $x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_{n+1}(u_1, \ldots, u_n)$, qui renferment rationnellement les constantes $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$, ces fonctions forment un système (dégénéré ou non) de fonctions abéliennes aux mêmes périodes.

Le théorème est démontré pour $n = 1$ et $n = 2$. On admet qu'il est vrai pour $n - 1$ et on l'établit pour n. A cet effet, on s'appuie sur un lemme entièrement analogue au lemme A du n° 20, et la discussion d'une multiplicité polaire (logarithmique ou non), soit $x_1 = 0$, des intégrales u_j, conduite comme aux n^{os} 22—32, montre que, moyennant une substitution linéaire convenable effectuée sur les u, les fonctions $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont toutes rationnelles soit en u_1, soit en e^{u_1}; dès lors, en raisonnant comme aux n^{os} 12—19, on est aussitôt ramené au cas de $(n-1)$ variables.

Paris, le 15 février 1902.

[1] J'entends par là que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ sont *distinctes*, autrement dit que le déterminant $\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & \ldots & T_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n & Q_n & \ldots & T_n \end{vmatrix}$ n'est pas identiquement nul.