

## SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

R. LIOUVILLE

à PARIS.

ABEL a consacré quelques pages (Oeuvres, tome 2, n° 5), à l'étude des cas dans lesquels on sait intégrer l'équation suivante,

$$(1) \quad (y + s) \frac{dy}{dx} + p + qy + ry^2 = 0,$$

où  $p, q, r, s$  désignent des fonctions de  $x$ .

Ce type d'équations différentielles, le plus simple de tous ceux du premier ordre, après celui de RICCATI, présente, pour cette raison, un véritable intérêt et, depuis les travaux d'ABEL, il a été, à plusieurs reprises et sous des formes diverses, l'objet d'assez nombreuses recherches.

On peut, en ce qui le concerne, se placer à deux points de vue bien différents et presque opposés, selon que l'on s'attache à reconnaître s'il existe une intégrale, dépendant de  $y$  d'une façon indiquée, par exemple algébrique, ou bien à trouver les caractères essentiels de la relation établie, d'après la nature même de l'équation proposée, entre l'inconnue  $y$  et la constante arbitraire qui s'y trouve impliquée, abstraction faite d'ailleurs du choix adopté pour la variable  $x$ .

Voici comment on peut concevoir ce qu'il y a d'essentiel dans une relation de cette espèce: il est clair que, si la formule

$$(1) \quad y = f(x, c),$$

définit, quel que soit  $c$ , une solution de l'équation (1), il est permis de substituer à ce paramètre une fonction  $\varphi(c)$ , quelconque, ne renfermant pas  $x$ ; après cette substitution, l'inconnue,  $y$ , conserve certaines propriétés

inaltérées, parce que c'est en fait une fonction de deux variables; ces propriétés doivent être regardées comme des caractères propres au type d'équations différentielles qu'on étudie; ils sont visiblement liés à la nature de ses invariants, mais, pour découvrir cette liaison si cachée, les moyens dont on dispose ne possèdent jusqu'à présent aucune généralité. Tout se réduit donc encore à la discussion de quelques cas particuliers, les plus nombreux et variés que l'on sache construire, afin de préparer des vues plus étendues sur la question.

C'est ainsi que, dans le Mémoire cité, ABEL déduit d'hypothèses diverses, relatives au multiplicateur, des cas d'intégration, qui semblent même d'abord former une suite indéfinie. J'aurai l'occasion de donner un peu plus de précision à ces résultats.

D'autres, dépendant d'une analyse toute différente, ont été signalés dans des travaux plus récents ou le seront dans cet article.

Je m'attacherai surtout à faire ressortir ce qui est spécial au type d'équations différentielles dont il s'agit.

Enfin, j'aurai quelques remarques à présenter au sujet d'une de ces équations, dont l'intégrale n'est pas connue et ne peut être algébrique, bien que l'on en sache trouver une propriété simple et entièrement explicite.

---

### § 1. *Invariants et forme canonique.*

Au sujet de l'équation générale (1), ABEL démontre d'abord qu'elle peut être réduite à la suivante

$$(2) \quad \frac{zdz}{dx} + p + qz = 0,$$

ou à celle-ci

$$(2') \quad (p + qz) \frac{dz}{dx} + z = 0,$$

$p$  et  $q$  étant des fonctions de la seule variable  $x$ . Dans ce qui va suivre, nous adopterons une forme un peu différente. Si l'on établit entre l'inconnue définie par l'équation (1), et une autre inconnue,  $z$ , cette relation

$$(3) \quad y + s = \frac{1}{z},$$

on reconnaît sans peine que la fonction  $z$  est déterminée par une équation de cette espèce,

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} + a_1 z^3 + 3a_2 z^2 + 3a_3 z + a_4 = 0,$$

dans laquelle  $a_1, a_2, \dots, a_4$  ne dépendent que de  $x$ ; c'est à cette forme que nous nous arrêterons d'ordinaire, mais il va de soi que cette manière de représenter les équations différentielles dont il s'agit n'est d'aucune importance.

Le type (4) se conserve 1° quand on change la variable d'une façon arbitraire, la nouvelle,  $x_1$ , étant liée à l'ancienne par la relation

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x);$$

2° lorsqu'on remplace l'inconnue,  $z$ , par une autre,  $z_1$ , qui lui est liée par la formule,

$$(2) \quad z = z_1 \varphi + \psi$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant des fonctions quelconques de  $x$ . J'ai montré déjà (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 septembre 1886), que, pendant ces transformations, l'expression

$$(6) \quad s_3 = a_2 a'_1 - a_1 a'_2 + a_1^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3$$

est un invariant relatif, *de poids* 3, c'est à dire se reproduit, multipliée par  $\left(\frac{\varphi}{f}\right)^3$  et ne contient pas  $\psi$ ; en outre, si  $s_{2m-1}$  représente un invariant, de poids  $2m - 1$ , il en existe un autre, donné par l'expression

$$(7) \quad s_{2m+1} = a_1 s'_{2m-1} - (2m - 1)[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]s_{2m-1}.$$

Celui-ci est de poids  $2m + 1$  et il est clair que les relations (6) et (7) permettent de construire des invariants absolus, en nombre aussi grand que l'on veut et de définir ainsi les caractères essentiels de chaque équation analogue à (4), par une relation entre deux de ces invariants, (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 12 septembre 1887).

En reprenant ces recherches pour l'équation (4) et les étendant à d'autres types moins particuliers, M<sup>r</sup> APPELL adoptait le même point de vue dans son Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*,

(Journal de Mathématiques, tome 5, 1889). Il donnait alors le moyen de réduire l'équation proposée à la forme canonique,

$$(8) \quad \frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X),$$

dont le seul coefficient variable,  $J$ , est un invariant absolu.

Toutefois ce n'est point ce que j'ai appelé un *invariant proprement dit*, je veux dire qu'il ne se déduit pas de  $a_1, a_2, \dots, a_4$  par de simples opérations algébriques et différentielles; il exige au contraire une quadrature. Par suite, quand les coefficients de l'équation proposée, (4), sont des fonctions algébriques de  $x$ , sa représentante, (8), ne jouit pas, en général, de cette propriété. C'est pour éviter cet inconvénient que nous emploierons une autre équation canonique; voici comment on y parvient.

Soit  $t = s_5^2 s_3^{-5}$ , un invariant absolu, qui sera pris pour la nouvelle variable et soit  $z_1$ , une inconnue liée à  $z$  par la relation

$$(9) \quad z = \frac{s_3^2 z_1}{a_1 s_5} - \frac{\alpha_2}{a_1};$$

Un calcul des plus simples donne, pour l'équation différentielle transformée de (4), la suivante,

$$(10) \quad \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T} \left( z_1^3 + \frac{1-T}{3t} z_1 + \frac{1}{t} \right) = 0,$$

dans laquelle,

$$(11) \quad T = \frac{3s_3 s_7 - 5s_5^2}{s_5^2},$$

est un invariant absolu. L'équation (10) est canonique, puisque ses coefficients sont des invariants absolus et il est clair qu'entre  $T$  et  $t$  il existe une relation, caractéristique pour chaque équation différentielle du type (4). A ce théorème, qui apparait d'abord sur l'équation (10), équivaut celui que M<sup>r</sup> APPELL a démontré dans son Mémoire déjà cité.

Il y a des cas où la forme (10) ne peut être adoptée; il se présentent si  $t = 0$ ,  $t = \infty$  ou  $T = 0$ . Dans la dernière hypothèse,

$$(12) \quad 3s_3 s_7 = 5s_5^2$$

et, d'après l'identité (7), ceci signifie que

$$(13) \quad \frac{3s'_5}{s_5} = \frac{5s'_3}{s_3},$$

c'est à dire  $t = \text{Constante}$ ; quant aux premières hypothèses ( $t = 0, t = \infty$ ), elles sont des cas particuliers de la précédente. J'ai montré ailleurs (C. R. de l'Ac. des Sc., 6 sept. 1886), comment alors l'équation (4) doit être traitée; la propriété essentielle de son intégrale s'exprime, si l'on veut, de cette manière curieuse.

Si l'on introduit une inconnue nouvelle,  $Y$ , ainsi définie,

$$(14) \quad z = \frac{dY}{dx} \varphi(x),$$

après un choix convenable de  $\varphi$ , il y a entre  $Y$  et  $x$ , une équation de cette espèce

$$(15) \quad c_1 f_1(x, Y) + c_2 f_2(x, Y) + c_3 f_3(x, Y) = 0;$$

$c_1, c_2, c_3$  sont des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans  $f_1, f_2, f_3$  et, par suite, figurent toutes trois, au premier degré seulement, dans l'intégrale, (loc. cit., 6 sept. 1886).

J'indiquerai, à la fin de ce Mémoire, § 4, toute une série de cas présentant une grande analogie avec celui qui vient d'être indiqué.

## § 2. Cas d'intégration.

Les exemples traités par ABEL sont tous obtenus par une étude du multiplicateur. On suppose que l'équation différentielle,

$$(16) \quad zz' + p + qz = 0,$$

admette un multiplicateur,  $\mu$ , dont le logarithme soit une fonction entière de  $z$ , les coefficients de cette dernière pouvant d'ailleurs renfermer  $x$ . Les conditions auxquelles cette fonction se trouve ainsi assujettie, quel que soit son degré, sont calculées sans peine et l'on semble posséder par ce moyen une série indéfinie de cas d'intégration. En fait, c'est pour le second degré seulement que la forme explicite de l'équation (16) a été in-

diquée par ABEL. En prenant  $q = 1$ , chose permise si la variable indépendante est choisie comme il convient et posant  $z = \frac{1}{y}$ , on trouve que l'équation (16) équivaut alors à la suivante,

$$(17) \quad y' + \frac{y^3}{x} + 3y^2 = 0.$$

Ses invariants  $t$  et  $T$  s'expriment ainsi,

$$(18) \quad t = \frac{(1 - 3x^2 - 18x^4)^3}{x^2(x^2 - 2)^5}, \quad P = \frac{4(x^3 - 2)(270x^3 - 45x^4 - 24x^2 + 1)}{(1 - 3x^2 - 18x^4)^2} - 5$$

et sont liés par une relation qui caractérise l'équation (17); la courbe, dont  $t$  et  $T$  sont les coordonnées cartésiennes, sera dite *attachée* à l'équation différentielle proposée; on voit qu'elle est unicursale et du degré 10.

Quand  $\log \mu$  est un polynôme cubique en  $z$ , soit

$$(19) \quad \alpha + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3,$$

$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_3$ , sont définies par le système

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha_3}{dx} = 0, & \frac{d\alpha_2}{dx} + 3\alpha_3 = 0, & \frac{d\alpha_1}{dx} + 2\alpha_2 - 3p\alpha_3 = 0, \\ & \frac{d\alpha}{dx} + \alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

où j'ai fait  $q = -1$ . On en déduit

$$(21) \quad p' + 6kxp^2 + 3kp^3 = 0,$$

la constante  $k$  étant arbitraire et l'équation (16) est ainsi donnée d'une façon explicite, si l'on sait obtenir  $p$ .

J'ai donné ailleurs le moyen d'y parvenir (C. R. de l'Ac. des Sc., 12 sept. 1887). Soit en effet,  $Y' = p$ :  $Y$  est déterminée par l'équation suivante

$$(22) \quad \frac{d^2x}{dY^2} - 6k \frac{x dx}{dY} - 3k = 0,$$

dérivée d'une équation de RICCATI fort simple,

$$(23) \quad \frac{dx}{dY} - 3kx^2 - 3kY - 3h = 0.$$

Celle-ci se ramène à l'équation linéaire

$$(24) \quad \frac{d^2u}{dY^2} + qku(kY + h) = 0,$$

dont les solutions s'expriment, comme il est bien connu, par des intégrales définies.

L'équation d'ABEL peut alors être représentée ainsi qu'il suit

$$(25) \quad \frac{dy}{dY} - \frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^3 + \frac{1}{3ku^2} \left[ \left(\frac{du}{dY}\right)^2 - u \frac{d^2u}{dY^2} \right] \frac{1}{\left(\frac{du}{dY}\right)} \cdot y^2 = 0,$$

avec la relation (24) pour déterminer  $u$  et la courbe qui lui est *attachée* est manifestement transcendante.

Quant à l'équation auxiliaire (21), ses invariants  $t$  et  $T$  sont des fonctions rationnelles de  $k^2x^3$ ; il est facile de les calculer et la courbe attachée est unicursale et du degré 8.

Si l'on voulait poursuivre ces recherches, il faudrait d'abord imaginer que  $\log \mu$  est un polynôme du 4<sup>o</sup> degré en  $z$ ; on trouverait alors, pour définir  $p$ , une équation différentielle, du second ordre, non linéaire et bien plus compliquée que l'équation (16). On ne peut donc obtenir explicitement aucune des équations du type (16), auxquelles appartient un multiplicateur de la nature indiquée. Les cas suivants sont plus complexes encore, en sorte que les équations différentielles (17) et (25) doivent être regardées comme représentant toutes celles qu'il est possible d'étudier dans la série indiquée.

Les autres hypothèses, faites par ABEL au sujet du multiplicateur, lui donnent encore deux cas d'intégration; ils correspondent à ces équations,

$$(26) \quad y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3(x^2 + 1)^2}{9x^3} = 0, \quad y' - \frac{4y^2}{3} - \frac{4y^3}{9x^3} [(x^2 + 1)^2 - cx^4],$$

dans lesquelles  $c$  désigne une constante arbitraire. Leurs invariants s'expriment par des fonctions rationnelles de  $x$  et le degré de la courbe attachée, toujours algébrique et unicursale, est assez élevé.

J'ajoute un cas analogue à celui de l'équation (21). Considérons l'équation différentielle

$$(27) \quad y' + (3mx^2 + 4m^2x + m_1)y^3 + 3xy^2 = 0,$$

dans laquelle  $m$  et  $m_1$  sont des constantes à volonté. Si l'on introduit une inconnue nouvelle,  $Y$ , en posant

$$\frac{dY}{dx} = y,$$

on change l'équation précédente en une autre, du second ordre, qui peut ainsi s'écrire

$$(28) \quad \frac{d^2x}{dY^2} - 3x \frac{dx}{dY} - (3mx^2 + 4m^2x + m_1) = 0;$$

or elle est visiblement identique à celle-ci,

$$(29) \quad \frac{d}{dY} \left[ \frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx \right] + 2m \left[ \frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx \right] - m_1 = 0,$$

dont l'intégration s'aperçoit d'abord: elle est donnée par la formule,

$$(30) \quad \frac{dx}{dY} - \frac{3x^2}{2} - 2mx = \frac{m_1 + e^{-mY}}{2m};$$

la transformation

$$x = -\frac{2}{3} \frac{d \log u}{dY}, \quad e^{-mY} = v$$

change l'équation précédente en une autre, linéaire et du second ordre,

$$(11) \quad v^2 \frac{d^2u}{dv^2} + 3v \frac{du}{dv} + \frac{3u}{2m^2} (v + m_1) = 0,$$

d'étude facile, qui définit des transcendentes spéciales.

A l'équation différentielle (27) est attachée une courbe unicursale, du degré 25.

Dans son Mémoire déjà rappelé, M<sup>r</sup> APPELL a signalé un nouveau mode d'intégration; le procédé employé par M<sup>r</sup> APPELL consistait à permuter la variable et l'inconnue dans une équation différentielle du type (1') et à la ramener ensuite à la forme (4), adoptée dans ce travail, à l'aide de la substitution (3). Quand la permutation indiquée est faite dans une équation du type (21), par exemple, l'intégration est immédiate et c'est ainsi que se trouve résolue l'équation différentielle,

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} - y^3 - \frac{3y^2}{x^2} = 0,$$

à laquelle est attachée une courbe unicursale du 10<sup>e</sup> degré.

Enfin, dans deux communications à l'Académie des Sciences, HALPHEN a étudié l'équation

$$(33) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y-1)}$$

et montré comment elle s'intègre, soit à l'aide des fonctions elliptiques, soit même sous forme algébrique. Les rapports de cette équation avec la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques et l'élégante discussion d'HALPHEN lui donnent un intérêt tout particulier. Ce sont ces rapports même qui fournissent les éléments nécessaires à son étude. Il est facile de lui donner la forme (4), en posant

$$(34) \quad 4x - 3y(y+1) = \frac{1}{z},$$

ce qui implique

$$(35) \quad \frac{dz}{dy} - 3y(y+1)(8y-1)z^3 - 2(7y+1)z^2 = 0.$$

La courbe attachée est unicursale, du degré 25.

Une importante propriété de l'équation d'HALPHEN consiste en ceci, c'est qu'elle se change en elle-même par une infinité de substitutions rationnelles.

A ce point de vue, on en peut rapprocher une équation que j'ai signalée ailleurs et qui mérite, semble-t-il, une étude plus complète; le paragraphe suivant lui est consacré.

**§ 3. Examen d'une équation particulière, admettant une transformation rationnelle en elle-même, mais aucune intégrale algébrique.**

L'équation dont je veux parler est la suivante, où  $n_1, n_2$ , sont des paramètres arbitraires,

$$(36) \quad \frac{dy}{dx} + 2y(n_1^2 x^3 - n_2^2 x) + 3n_2 y^2 = 0.$$

Si l'on introduit une inconnue nouvelle,  $Y$ , d'après l'équation  $\frac{dY}{dx} = y$ , elle devient celle-ci,

$$(37) \quad \frac{d^2x}{dY^2} - 3n_2 \frac{dx}{dY} - 2(n_1^2x^3 - n_2^2x) = 0,$$

du second ordre et d'une catégorie pour laquelle a été indiquée une transformation spéciale, (*Sur les invariants de certaines équations différentielles*, Journal de l'École Polytechnique, 59 cahier, 1890). Soit en effet,  $x_1$ , une variable nouvelle ainsi définie,

$$(38) \quad \frac{dx}{dY} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2;$$

on trouve d'abord

$$(39) \quad \frac{dx_1}{dY} = (n_1x + n_2)x_1,$$

et, comme conséquence,

$$(40) \quad \frac{d^2x_1}{dY^2} - 3n_2 \frac{dx_1}{dY} - 2(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) = 0.$$

Ayant donc pris  $\frac{dx_1}{dY} = \frac{1}{y_1}$ , on en conclura

$$(41) \quad \frac{dy_1}{dx_1} + 2y_1^3(n_1^2x_1^3 - n_2^2x_1) + 3n_2y_1^2 = 0,$$

ce qui est, sauf les notations, l'équation proposée elle-même. On en déduit ce théorème:

*L'équation*

$$\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2x^3 - n_2^2x) + 3n_2y^2 = 0$$

*se change en elle-même par la transformation,*

$$(42) \quad \frac{1}{y} + n_1x^2 - n_2x = 2n_1x_1^2, \quad \frac{1}{x_1y_1} = n_1x + n_2,$$

*qui détermine, pour  $x$  et  $y$ , des fonctions rationnelles de  $x_1, y_1, \dots$*

Cette propriété engage à rechercher si l'équation (36), dont la solution n'est pas jusqu'à présent connue, admet une intégrale algébrique. C'est ce point que je vais maintenant étudier.

Il est clair d'abord qu'une telle intégrale, si elle existe, peut être regardée comme rationnelle en  $x$  et  $y$ . J'ometts les preuves de cette proposition, car elles dépendent de principes qui sont bien connus.

Soit donc

$$(43) \quad \frac{R}{S} = \text{constante},$$

cette intégrale,  $R$  et  $S$  étant des polynômes entiers en  $x$  et  $y$ . L'équation différentielle, à laquelle elle satisfait, possède une homogénéité particulière: lorsqu'on y remplace  $y$  par  $ky$ ,  $x$  par  $k^{-1}x$ ,  $n_1$  par  $n_1k$ , sans toucher à  $n_2$ , elle demeure inaltérée. Il est alors manifeste que  $R$  et  $S$  peuvent être choisis de manière à présenter la même homogénéité. J'écrirai, pour abrégé,

$$2n_1^2 = -\mu$$

et, d'après ce qui précède,  $R$  et  $S$  peuvent être développés selon les puissances entières et positives de  $\mu$ , de cette manière

$$(44) \quad R = R_0 + R_1\mu + \dots, \quad S = S_0 + S_1\mu + \dots;$$

$R_0, \dots, S_1, \dots$  sont encore des polynômes entiers en  $x$  et  $y$ . Pour déterminer les premiers termes de ces développements, je remplace  $\mu$  par zéro dans l'équation (36), qui devient ainsi la suivante

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} - 2n_2^2xy^3 + 3n_2y^2 = 0.$$

Celle-ci s'intègre sans peine; il suffit de poser

$$(46) \quad n_2xy = z$$

et l'on trouve ainsi

$$(47) \quad \frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)} = \text{constante } C.$$

Par suite  $\frac{R_0}{S_0}$  dépend uniquement de l'expression

$$\frac{x(2z-1)^2}{z(z-1)},$$

homogène et de degré égal à 1; ce doit en être une simple puissance,

puisque  $\frac{R_0}{S_0}$  doit être, nous l'avons vu, rationnelle en  $x$  et  $z$  et homogène. Ainsi

$$(48) \quad \frac{R_0}{S_0} = \frac{x^N(2z-1)^{2N}}{z^N(z-1)^N},$$

$N$  étant un nombre entier, qu'on peut toujours supposer positif. Mais  $R_0, S_0$ , sont des polynômes entiers en  $x$  et  $y$ , de sorte que

$$(49) \quad R_0 = x^N(2z-1)^{2N}, \quad S_0 = z^N(z-1).$$

Comme  $R = 0$  doit donner une solution particulière de l'équation (36),

$$(36') \quad \frac{dy}{dx} - y^3(\mu x^3 + 2n_2^2 x) + 3n_2 y^2 = 0,$$

une identité semblable à celle-ci,

$$(50) \quad \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} [y^3(\mu x^3 + 2n_2^2 x) - 3n_2 y^2] = \lambda R,$$

est vérifiée,  $\lambda$  et  $R$  représentant des polynômes entiers en  $\mu$ . Le premier membre de cette équation est, à l'égard de  $\mu$ , de degré plus élevé que le second, d'une unité et l'on en conclut que le développement

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mu + \dots$$

se réduit à ses deux premiers termes, c'est à dire à  $\lambda_0 + \lambda_1 \mu$ ; de plus,  $R$  est homogène et du degré  $N$ ; les deux membres de l'équation (50) sont aussi homogènes et du degré  $N + 1$ ; il en résulte que  $\lambda$  lui-même est homogène et du premier degré. Comme d'ailleurs

$$(51) \quad \frac{\partial R_0}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial y} [2n_2^2 x y^3 - 3n_2 y^2] = \lambda_0 R_0, \quad \text{avec} \quad R_0 = x^N(2z-1)^{2N},$$

on en déduit

$$(52) \quad \lambda_0 = \frac{N(2z-1)^2}{x}.$$

Un calcul semblable, fait au moyen de  $S_0$ , ne fait que confirmer cette expression.

Quant à l'équation différentielle proposée, en y introduisant  $z$  à la place de  $y$ , elle devient

$$(53) \quad \frac{x dz}{dx} - z^3 \left[ 2 + \frac{\mu x^2}{n_2^2} \right] + 3z^2 - z = 0.$$

D'après cela, voici l'équation satisfaite par un terme  $S_n$  quelconque, du développement de  $S$ ,

$$(54) \quad \frac{\partial S_n}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x} \frac{\partial S_n}{\partial z} + \frac{z^3 x}{n_2^2} \frac{\partial S_{n-1}}{\partial z} = \lambda_0 S_n + \lambda_1 S_{n-1}.$$

De plus, à cause de l'homogénéité,

$$(55) \quad S_n = x^{2n} \cdot \sigma_n, \quad \lambda_1 = A_1 x$$

et  $A_1, \sigma_n$  ne dépendent plus que de  $z$ . Ainsi donc

$$(56) \quad z(z-1)(2z-1) \frac{\partial \sigma_n}{\partial z} - [N(2z-1)^2 - 2n] \sigma_n - A_1 \sigma_{n-1} + \frac{z^3}{n_2^2} \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial z} = 0.$$

Si  $S_{n-1}$  est le dernier terme de  $S$ ,  $\sigma_n$  est nulle et il reste

$$(57) \quad \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} \partial z} - \frac{n_2^2 A_1}{z^3} = 0.$$

Or  $\sigma_{n-1}$  est une fonction entière de  $z$  et, comme  $\frac{z^3 \partial \sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} \partial z}$ , d'après l'égalité précédente, est encore un polynôme, il ne peut y avoir, dans  $\sigma_{n-1}$ , aucun autre facteur que  $z$  lui-même. Soit donc  $\sigma_{n-1} = \alpha_{n-1} z^{n'}$ ,  $\alpha_{n-1}$  étant une certaine constante et  $n'$ , un nombre entier positif; nous en devons conclure

$$(58) \quad A_1 = \frac{n' z^2}{n_2^2}.$$

Voici maintenant l'équation différentielle satisfaite par  $R_1$ ,

$$(59) \quad \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{z(z-1)(2z-1)}{x} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{z z^3}{n_2^2} \frac{\partial R_0}{\partial z} = \lambda_0 R_1 + \lambda_1 R_0.$$

Le degré d'homogénéité de  $R_1$  étant  $-(N+2)$ , je puis le représenter ainsi,

$$(60) \quad R_1 = \rho_1 x^{N+2},$$

$\rho_1$  ne dépendant que de  $z$ . Cette dernière fonction satisfait à l'équation suivante

$$(61) \quad z(z-1)(2z-1) \frac{\partial \rho_1}{\partial z} - \rho_1 [N(2z-1)^2 - (N+2)] \\ = A_1(2z-1)^{2N} - \frac{4Nz^3}{n_2^2} (2z-1)^{2N-1},$$

dont tous les termes sont divisibles par  $2z-1$ , excepté le produit  $(N+2)\rho_1$ , au premier membre.

Il faut donc admettre que  $\rho_1$  est divisible par une certaine puissance de  $2z-1$ ; soit

$$\rho_1 = \rho_{1,1}(2z-1)^{\alpha_1},$$

$\alpha_1$  désignant un nombre entier positif. L'équation (61) devient ainsi

$$(62) \quad z(z-1)(2z-1)^{\alpha_1+1} \frac{\partial \rho_{1,1}}{\partial z} + (2z-1)^{\alpha_1} \rho_{1,1} [2\alpha_1 z(z-1) - N(2z-1)^2 + N+2] \\ = (2z-1)^{2N-1} \left[ (2z-1) A_1 - \frac{4Nz^3}{n_2^2} \right].$$

Cela étant, si  $\alpha_1$  était supérieur à  $2N-1$ , tout serait, dans l'identité divisible par  $(2z-1)^{2N-1}$  et, la division faite,  $2z-1$  resterait en facteur dans tous les termes du premier membre; il n'en pourrait être ainsi pour le second. Si  $\alpha_1$  était inférieur à  $2N-1$ , après division des deux membres par  $(2z-1)^{\alpha_1}$ , il faudrait conclure que

$$\rho_{1,1} [2\alpha_1 z(z-1) - N(2z-1)^2 + N+2]$$

est encore divisible par  $2z-1$ , ce qui est impossible, puisque  $2z-1$  ne divise plus  $\rho_{1,1}$  et, pour  $\alpha_1 < 2N-1$ , ne peut non plus diviser le trinôme entre parenthèses. La conséquence est

$$\alpha_1 = 2N-1,$$

ce qui change l'équation (62) en celle-ci,

$$(63) \quad z(z-1)(2z-1) \frac{\partial \rho_{1,1}}{\partial z} - 2\rho_{1,1}(z^2 - z - 1) = (2z-1) A_1 - \frac{4Nz^3}{n_2^2}.$$

On en déduit

$$(64) \quad \rho_{1,1} = \frac{H(2z-1)^5}{z^2(z-1)^2},$$

avec

$$(65) \quad H = \int \frac{z(z-1)A_1 dz}{(2z-1)^5} - \frac{4N}{n_2^2} \int \frac{z^4(z-1) dz}{(2z-1)^5}.$$

Soit, pour un instant

$$z = z' + \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$(66) \quad H = \int \frac{z'^2 - \frac{1}{4}}{2^5 z'^5} A_1 dz' - \frac{N}{n_2^2} \int \frac{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right) \left(z'^2 + \frac{1}{2}\right)^3}{2^4 \cdot z'^6} dz'.$$

La première des deux intégrales qui entrent dans cette formule s'exprime encore ainsi,  $A_1', A_1'', \dots$  désignant les dérivées successives de  $A_1$ ,

$$\frac{1}{2^5} \left[ \frac{A_1'}{48z'^3} + \frac{A_1}{16z'^4} + \int \left( A_1 - \frac{A_1''}{48} \right) \frac{dz'}{z'^3} \right].$$

Or

$$(67) \quad \int \left( A_1 - \frac{A_1''}{48} \right) \frac{dz'}{z'^3} = \left( \frac{A_1'}{48} - A_1 \right) \frac{1}{2z'^2} + \left( A_1' - \frac{A_1'''}{48} \right) \frac{1}{2z'} + \frac{1}{2} \int \left( A_1'' - \frac{A_1^{IV}}{48} \right) \frac{dz'}{z'}.$$

Le logarithme, s'il y en avait un dans  $H$ , proviendrait du dernier terme de l'équation précédent, où il aurait pour coefficient

$$(68) \quad \frac{1}{2^5} \left( A_1'' - \frac{A_1^{IV}}{48} \right)_{(z'=0)},$$

et de la seconde intégrale que contient  $H$ , où il entrerait multiplié par  $\frac{N}{16n_2^2}$ . Aucun logarithme ne pouvant subsister, tous calculs faits, dans  $H$ , il faut que

$$(69) \quad \left( A_1'' - \frac{A_1^{IV}}{48} \right)_{(z'=0)} = \frac{4N}{n_2^2}.$$

Mais,  $A_1$  étant donné par la formule (58),  $A_1^{IV} = 0$ ,  $A_1'' = \frac{2n'}{n_2^2}$ , en sorte que  $n' = 2N$ , c'est à dire

$$(70) \quad A_1 = \frac{2Nz^2}{n_2^2}.$$

Ceci permet de simplifier l'équation (65), qui devient

$$(71) \quad H = -\frac{2N}{n_2^2} \int \frac{z^3(z-1)dz}{(2z-1)^6} = -\frac{N}{2^5 n_2^2} \int \frac{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z' + \frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}.$$

L'intégration en est immédiate et introduit une constante arbitraire; l'expression de  $\bar{H}$ , qui en résulte, multipliée par

$$2^5 \cdot \frac{z'^5}{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right)^2},$$

doit donner le polynôme entier,  $\rho_{1,1}$ . Or on reconnaît sans peine que le produit de  $z'^5$  par l'intégrale

$$\int \frac{\left(z'^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z' + \frac{1}{2}\right)^2 dz'}{z'^6}$$

est un polynôme que ne divise pas  $z'^2 - \frac{1}{4}$ , ce qui implique contradiction.

L'équation différentielle proposée n'admet donc aucune intégrale algébrique. La courbe qui lui est attachée est une des moins compliquées qui se soient rencontrées jusqu'ici.

Lorsqu'on y prend  $T$  et  $\tau = \frac{1}{t}$  pour les coordonnées cartésiennes, c'est une cubique unicursale, définie, si l'on veut, par les équations

$$(72) \quad \tau = -\frac{9n_2^2}{7^3} \cdot \frac{u^2}{(u+n_2^2)^3}, \quad T = \frac{31u^2 + 8n_2^2 u - 8n_2^4}{7(u+n_2^2)^2},$$

ou par celle qui en résulte, après l'élimination de  $u$ . Cette dernière est facile à construire d'après les propriétés mises en évidence par les relations (72).

L'équation  $\frac{dy}{dx} + 2y^3(n_1^2 x^3 - n_2^2 x) + 3n_2 y^2 = 0$  offre cet intérêt, c'est qu'on en connaît une propriété simple, celle de n'être point altérée par les substitutions rationnelles (42); cependant son intégrale ne peut être algébrique, en sorte qu'elle définit une transcendante, vraisemblablement nouvelle.

Ses seuls points critiques correspondent aux valeurs infinies de  $x$  et aux valeurs,  $x_0$ , de cette même variable, qui rendent l'une des solutions,  $y$ , infinie. Auprès des dernières, deux solutions présentent cette singularité; leurs produits par  $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$  sont des séries, d'abord convergentes, développées selon les puissances entières et positives de  $x - x_0$ .

Les formules (42), où l'on regarde  $x_1$  et  $y_1$  comme les variables primitives, montrent que tous les points critiques à distance finie correspondent, soit à  $x_1 = 0$ , soit à  $x = -\frac{n_2}{n_1}$ . Leur distribution dans le plan, pour chaque solution particulière, est ainsi rattachée par des formules commodes aux valeurs que reçoit, en un point ordinaire, une autre solution, liée à la première d'une façon connue.

On peut rapprocher du cas précédent celui d'une équation du second ordre, qui se change aussi en elle-même par des substitutions qu'on sait calculer.

Voici d'une façon précise, la proposition dont il s'agit, que je me borne à énoncer.

»L'équation différentielle

$$y'' - \alpha y^3 - \frac{y}{6} \left( \frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{7\alpha'^2}{\alpha^2} \right) = 0,$$

quelle que soit la fonction de  $x$  désignée par  $\alpha$ , se reproduit, si l'on remplace  $y$  par une nouvelle inconnue

$$y_1,$$

ainsi définie,

$$y' + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} y^2 + \frac{\alpha' y}{6\alpha} = y_1^2 \alpha^{\frac{1}{2}} .»$$

Il est manifeste que la méthode employée dans ce paragraphe est susceptible de s'appliquer, sans modifications essentielles, à des exemples très variés.

Je l'ai employée notamment pour étudier ce qui correspond à l'une des relations les plus simples qu'on puisse établir entre  $T$  et  $\tau$ , (exception faite de  $T = 0$ , déjà traitée), je veux dire le cas défini par l'égalité

$$(73) \quad T = \alpha \tau$$

$a$  désignant une constante. L'équation différentielle est alors celle-ci

$$(74) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{a} \left[ \frac{y^3}{x^3} + \frac{1-ax}{3x} y + \frac{1}{x} \right] = 0.$$

En y substituant  $\frac{y}{\mu}$  et  $\frac{x}{\mu}$ , au lieu de  $x$  et  $y$ , on voit d'abord qu'elle peut s'écrire

$$(75) \quad 9ax^3 \frac{dy}{dx} - [3y^3 + (\mu - 3ax)xy + 3\mu^2x] = 0;$$

le paramètre  $\mu$  joue ici le même rôle que dans l'équation (36') et permet une analyse toute semblable. Malgré la simplicité apparente de la relation (73), j'ai pu me convaincre ainsi qu'il n'existe pour l'équation (74) aucune intégrale algébrique. J'ometts, pour abrégér, les preuves de cette proposition.

Quant à la recherche des transformations telles que (42), elle est analogue à celle des intégrales algébriques, mais constitue en général un problème plus compliqué, que je ne veux point aborder dans ce travail.

---

#### § 4. *Nouvelles intégrations. — Liens qui existent, entre les équations différentielles proposées et certains systèmes linéaires.*

L'un des cas remarquables d'abord dans l'étude de l'équation différentielle

$$(76) \quad \frac{dy}{dx} + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0,$$

est, on l'a vu, celui qui correspond à l'hypothèse  $t = \text{constante}$ , ou bien, ce qui est la même chose,  $T = 0$ . L'intégration résulte alors des relations que présente l'équation proposée avec un système d'équations linéaires qui lui est associé, (§ 1, in fine).

Les cas, auxquels est consacré ce paragraphe, doivent être rapprochés de celui-là, mais leur complication est beaucoup plus grande. Voici comment on y parvient:

Soit  $z$  une fonction de deux variables,  $x$  et  $y$  et, d'une façon générale

$$z^{(i,k)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

l'une quelconque de ses dérivées partielles. Je considère trois équations linéaires, aux dérivées partielles du troisième ordre,

$$(77) \quad \begin{cases} z^{(1,2)} + p_{3,0} z^{(0,3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p_{k,i} z^{(i,k)} = 0, \\ z^{(2,1)} + p'_{3,0} z^{(0,3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p'_{k,i} z^{(i,k)} = 0, \\ z^{(3,0)} + p''_{3,0} z^{(0,3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p''_{k,i} z^{(i,k)} = 0, \end{cases}$$

ayant 7 solutions communes distinctes, tous les coefficients  $p_{k,i}, \dots, p'_{k,i}, \dots, p''_{k,i}, \dots$ , dépendant uniquement de la variable  $x$ . Si j'établis entre cette variable et  $y$  une relation quelconque,  $z, z^{(1,0)}, z^{(0,1)}, \dots$ , deviennent des fonctions de  $x$ , entre lesquelles sont établies en particulier les équations suivantes,

$$(78) \quad \begin{cases} dz^{(1,0)} - z^{(2,0)} dx - z^{(1,1)} dy = 0, & dz^{(0,1)} - z^{(1,1)} dx - z^{(0,2)} dy = 0, \\ d^2 z^{(1,0)} - z^{(2,0)} d^2 x - z^{(1,1)} d^2 y + S_{3,0} z^{(0,3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} S_{k,i} z^{(i,k)} = 0, \\ d^2 z^{(0,1)} - z^{(1,1)} d^2 x - z^{(0,2)} d^2 y + R_{3,0} z^{(0,3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} R_{k,i} z^{(i,k)} = 0, \end{cases}$$

après qu'on a posé, pour abrégé,

$$(79) \quad \begin{cases} R_{3,0} = -dy^2 + 2p_{3,0} dx dy + p'_{3,0} dx^2, & R_{k,i} = 2p_{k,i} dx dy + p'_{k,i} dx^2, \\ S_{3,0} = p_{3,0} dy^2 + 2p'_{3,0} dx dy + p''_{3,0} dx^2, \\ S_{k,i} = p_{k,i} dy^2 + 2p'_{k,i} dx dy + p''_{k,i} dx^2; \end{cases}$$

tant que la liaison entre  $x$  et  $y$  reste arbitraire, il n'existe, entre  $z, z^{(1,0)}, z^{(0,1)}$  et leurs différentielles des deux premiers ordres, aucune relation qui ne contienne aussi  $z^{(0,3)}$ ; mais le contraire est vrai pour un choix convenable de la liaison supposée entre  $x$  et  $y$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , représentant des multiplicateurs, déterminés de cette manière,

$$(80) \quad \begin{cases} \alpha_1(S_{0,2} - d^2 x) + \alpha_2 R_{0,2} - \beta_1 dx = 0, \\ \alpha_1(S_{1,1} - d^2 y) + \alpha_2(R_{1,1} - d^2 x) - \beta_1 dy - \beta_2 dx = 0, \\ \alpha_1 S_{2,0} + \alpha_2(R_{2,0} - d^2 y) - \beta_2 dy = 0, & \alpha_1 S_{3,0} + \alpha_2 R_{3,0} = 0, \end{cases}$$

il est satisfait à cette équation,

$$(81) \quad \alpha_1 d^2 z^{(1.0)} + \alpha_2 d^2 z^{(0.1)} + \beta dz^{(1.0)} + \beta_2 dz^{(0.1)} + \sum_{(i+k \leq 1)} (\alpha_2 R_{k,i} + \alpha_1 S_{k,i}) z^{(i,k)} = 0,$$

qui est bien de l'espèce demandée. Comme d'ailleurs les équations (80) sont homogènes et linéaires, il en résulte

$$(82) \quad (R_{3.0} dy + S_{3.0} dx)(dx d^2 y - dy d^2 x) + (R_{3.0} S_{0.2} - R_{0.2} S_{3.0}) dy^2 \\ + (R_{3.0} S_{1.1} - R_{1.1} S_{3.0}) dx dy + (R_{3.0} S_{2.0} - R_{2.0} S_{3.0}) dx^2 = 0,$$

ce qui est, pour  $y$ , une équation différentielle, du second ordre. On voit, d'après (79), qu'elle exprime  $dx d^2 y - dy d^2 x$  par une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme, du 6° degré, homogène, en  $dx$ ,  $dy$  et le dénominateur, un polynôme du 3° degré.

L'équation (82) se réduit évidemment au premier ordre, si l'on écrit  $\frac{dy}{dx} = v$ . Cette substitution faite, s'il arrive que le dénominateur divise exactement le numérateur, tous deux étant regardés comme des fonctions entières de  $v$ , cette inconnue se trouve définie par une équation du type (76). Nous allons voir comment sa signification même en fait connaître un mode d'intégration.

Et, d'abord, le système (77) s'intègre sans peine. Soient  $P_{k,i}$ ,  $P'_{k,i}$ , ..., des quantités définies par les relations

$$(83) \quad \begin{cases} P'_{k,i} + p_{3.0} P_{k,i} + p_{k-1,i} - p_{0.2} p'_{k,i} - p'_{1.1} p_{k,i} = 0, \\ p_{3.0} P'_{k,i} - p'_{3.0} P_{k,i} + \frac{\partial p_{k,i}}{\partial x} + p_{k,i-1} - p'_{k-1,i} - p_{0.2} p''_{k,i} \\ \quad + (p'_{0.2} - p_{1.1}) p'_{k,i} + (p'_{1.1} - p_{2.0}) p_{k,i} = 0; \end{cases}$$

les trois équations aux dérivées partielles dont il s'agit, ayant 7 solutions communes, équivalent au système suivant d'équations différentielles totales linéaires,

$$\begin{cases} dz^{(0.3)} + [P'_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} P'_{k,i} z^{(i,k)}] dx + [P_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} P_{k,i} z^{(i,k)}] dy = 0, \\ dz^{(2.0)} + [p''_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p''_{k,i} z^{(i,k)}] dx + [p'_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p'_{k,i} z^{(i,k)}] dy = 0, \\ dz^{(1.1)} + [p'_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p'_{k,i} z^{(i,k)}] dx + [p_{3.0} z^{(0.3)} + \sum_{(i+k \leq 2)} p_{k,i} z^{(i,k)}] dy = 0, \end{cases}$$

$$(84) \left\{ \begin{aligned} dz^{(0,2)} + \left[ z^{(0,3)} p_{3,0} + \sum_{(i+k \leq 2)} p_{k,i} z^{(i,k)} \right] dx - z^{(0,3)} dy &= 0, \\ dz^{(1,0)} - z^{(2,0)} dx - z^{(1,1)} dy &= 0, \\ dz^{(0,1)} - z^{(1,1)} dx - z^{(0,2)} dy &= 0, \\ dz - z^{(1,0)} dx - z^{(0,1)} dy &= 0. \end{aligned} \right.$$

Imaginons que ces équations soient ajoutées, après multiplication par des facteurs,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7$ , où n'entre pas  $y$ . Ceux-ci peuvent être choisis de manière à vérifier l'identité,

$$(85) \quad \frac{\partial \log}{\partial y} [\lambda_1 z^{(0,3)} + \lambda_2 z^{(2,0)} + \lambda_3 z^{(1,1)} + \lambda_4 z^{(0,2)} + \lambda_5 z^{(1,0)} + \lambda_6 z^{(0,1)} + \lambda_7 z] + m = 0,$$

dans laquelle  $m$  est une constante. Il s'ensuit, à cause de (84), les identités,

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 (P_{3,0} + m) + \lambda_2 p'_{3,0} + \lambda_3 p_{3,0} - \lambda_4 &= 0, \dots, \\ \lambda_1 P_{1,0} + \lambda_2 p'_{1,0} + \lambda_3 p_{1,0} + m \lambda_6 - \lambda_7 &= 0, \\ \lambda_1 P_0 + \lambda_2 p'_0 + \lambda_3 p_0 + m \lambda_7 &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui font connaître, non pas les quantités  $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ , mais leurs rapports à l'une d'elles. Celle-ci même est déterminée, si l'on veut que la condition

$$(87) \quad \frac{\partial}{\partial x} [\lambda_1 z^{(0,3)} + \lambda_2 z^{(2,0)} + \lambda_3 z^{(1,1)} + \lambda_4 z^{(0,2)} + \lambda_5 z^{(1,0)} + \lambda_6 z^{(0,1)} + \lambda_7 z] = 0,$$

soit remplie; de cette dernière il résulte en effet

$$(88) \quad \frac{d\lambda_1}{dx} = \lambda_1 P'_{3,0} + \lambda_2 p''_{3,0} + \lambda_3 p'_{3,0} + \lambda_4 p_{3,0}, \dots, \quad \frac{d\lambda_7}{dx} = \lambda_1 P'_0 + \lambda_2 p''_0 + \lambda_3 p'_0 + \lambda_4 p_0,$$

Or le système proposé, (77), ayant sept solutions distinctes, il est clair qu'il peut être satisfait à la fois aux équations (85) et (87), en sorte que les relations, entre  $P_{k,i}, \dots, p'_{k,i}$ , et leurs dérivées, déduites de cet ensemble, sont précisément celles qui assurent l'intégrabilité de ce système.

Soient

$$m^4 + m^3 P_{3,0} + m^2 P_{2,0} + m P_{1,0} + P_0 = M'',$$

$$m^3 p'_{3,0} + m^2 p'_{2,0} + m p'_{1,0} + p'_0 = M',$$

$$m^3 p_{3,0} + m^2 p_{2,0} + m p_{1,0} + p_0 = M;$$

les équations (86) ont pour conséquence celle-ci,

$$(89) \quad \begin{vmatrix} M'' & , & M' & , & M \\ P_{0,2} & , & p'_{0,2} + m & , & p_{0,2} \\ mP_{1,1} + P_{0,1} & , & mp'_{1,1} + p'_{0,1} & , & m^2 + mp_{1,1} + p_{0,1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est algébrique en  $m$  et du septième degré. Le coefficient de la puissance la plus élevée de  $m$  est l'unité; tous les autres doivent être aussi des constantes, d'ailleurs arbitraires, ce qui donne sept équations; sept autres s'obtiennent d'une façon semblable, en substituant, dans les relations (86), différenciées, les expressions (88) de  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \lambda_7}{\partial x}$ . Les nouvelles constantes qui s'introduisent ont les mêmes valeurs que les précédentes et l'on a par ce moyen toutes les conditions d'intégrabilité du système (77), sous une forme qui présente des avantages particuliers.

La conclusion de cette analyse est que l'inconnue  $z$  s'exprime par une formule de cette espèce,

$$(90) \quad z = \sum_{(1 \leq i \leq 7)} c_i \zeta_i(x) e^{m_i y},$$

$m_1, m_2, \dots$  étant les racines de l'équation (89), les  $\zeta_i$  des fonctions qu'on sait construire, et les  $c_i$  des constantes arbitraires;  $z^{(1,0)}, \dots, z^{(0,8)}$ , sont données par des formules analogues, qui s'en déduisent. Je suppose maintenant que les équations (77) ne soient pas données, mais seulement l'équation différentielle (82), qui leur est associée. Celle-ci ne changerait pas, si  $z$  était multipliée par une fonction donnée quelconque, c'est un point que met en lumière sa définition même. Je puis donc faire que le déterminant,  $\delta$ , des solutions du système (84) soit une constante et, comme

$$(91) \quad d \log \delta + (P'_{3,0} + p_{2,0} + p'_{1,1} + p''_{0,2}) dx + (P_{3,0} + p_{1,1} + p'_{0,2}) dy = 0,$$

c'est établir les deux équations

$$(92) \quad P'_{3,0} + p_{2,0} + p'_{1,1} + p''_{0,2} = 0, \quad P_{3,0} + p_{1,1} + p'_{0,2} = 0;$$

elles remplacent, avec l'hypothèse d'après laquelle  $d\delta$  s'évanouit, l'une des sept premiers conditions d'intégrabilité. Mais cells-ci, jointes aux deux relations précédentes, permettent de calculer  $P_{3,0}, P'_{3,0}, P''_{3,0}$  et  $p_{k,i}, p'_{k,i}, p''_{k,i}$ , pour  $i + k$  inférieur ou égal à  $z$ , étant donnés les coefficients qui figurent

dans l'équation (82), si par exemple  $p_0, p'_0, p''_0$ , sont déjà nuls, ce que je vais supposer.

Il est ainsi associé, à l'équation (82), un système linéaire (77), dont la détermination est complète. Il reste à vérifier les dernières conditions d'intégrabilité, dont le nombre est réduit à six par les hypothèses faites sur  $p_0, p'_0, p''_0$ .

Cela fait, je dis que l'équation (82) peut être intégrée sans peine. Elle implique en effet la relation (81), dans laquelle  $z^{(1,0)}, z^{(0,1)}$  et  $z$  sont maintenant connues et représentées par des formules analogues à (90). Celle-ci constitue donc, entre  $x, y$  et ses deux premières dérivées, une équation contenant, d'une façon linéaire et homogène, sept constantes arbitraires. Elle comprend toutes les solutions de l'équation différentielle proposée et l'on peut d'abord, à l'aide de cette dernière, en éliminer  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ; elle

reste ainsi rationnelle à l'égard de  $\frac{dy}{dx}$ ; mais l'équation dont l'agissait est celle, du premier ordre, qui se déduit de (82) par la substitution  $\frac{dy}{dx} = v$ .

L'intégrale de celle-ci résulte des considérations précédentes. Il suffit en effet de différentier cinq fois l'équation (81) et d'en faire disparaître les dérivées de  $y$ , d'ordre supérieur à l'unité, à l'aide de l'équation différentielle elle-même, (82). On a ainsi construit un système de six équations linéaires et homogènes entre les sept quantités  $c_i e^{m_i y}$ ; leurs coefficients sont des fonctions de  $x$  et de  $v$ , rationnelles pour cette dernière variable et, comme l'expression

$$[c_i c_k^{-1} e^{(m_i - m_k)y}]^{m_i - m_k} [c_i c_k^{-1} e^{(m_i - m_k)y}]^{m_k - m_i}$$

est une simple constante, il suffit d'y remplacer les facteurs  $c_i e^{m_i y}$ , dont les rapports seuls  $y$  figurent, par les valeurs proportionnelles, qui fait connaître le système indiqué, pour obtenir l'intégrale cherchée. Le cas où l'une des racines  $m$  est égale à zéro ne fait pas exception et n'exige même en général aucune modification essentielle des calculs précédents.

Si les différences de trois racines  $m_i$  sont des nombres rationnels, l'intégrale obtenue est algébrique à l'égard de l'inconnue  $v$ , mais son degré est d'ordinaire fort élevé.

J'ajoute qu'il est facile de former effectivement des équations différentielles de l'espèce qui vient d'être étudiée, car il est visiblement possible

de former des systèmes, tels que (77), ayant 7 solutions communes distinctes et nous avons montré comment s'en déduit l'équation (82).

Quant à celles du type proposé,

$$(93) \quad \frac{dv}{dx} + a_1 v^3 + 3a_2 v^2 + 3a_3 v + a_4 = 0,$$

nous les avons vues apparaître quand l'expression  $R_{3,0}dy + S_{3,0}dx$  divise exactement celle-ci,

$$(94) \quad (R_{2,0}S_{0,2} - R_{0,2}S_{3,0})dy^2 + (R_{3,0}S_{1,1} - R_{1,1}S_{3,0})dxdy + (R_{3,0}S_{2,0} - R_{2,0}S_{3,0})dx^2;$$

Mais il reste à voir comment, l'équation (93) étant donnée, on y peut rattacher une équation (82), remplissant s'il est possible les conditions déjà mentionnées.

$a_1, a_2, \dots, a_4$  étant des fonctions connues de  $x$ , tous les coefficients  $p_{k,i}, p'_{k,i}, p''_{k,i}$ , dans lesquels  $i + k$  est égal à 2, sont exprimés, par suite de la divisibilité supposée, au moyen de  $p_{3,0}, p'_{3,0}, p''_{3,0}$ . Ces derniers coefficients, en même temps, qu'une relation invariante entre  $a_1, a_2, \dots, a_4$ , résultent des conditions d'intégrabilité auxquelles le système (77) est assujéti et l'équation (82) est ainsi déterminée d'une façon complète. On peut donc toujours vérifier si une équation différentielle donnée, du type (93), correspond à un système (77) intégrable et construire, lorsqu'il en est ainsi, l'expression

$$(95) \quad R_{3,0}dy + S_{3,0}dx,$$

sorte de multiplicateur qui permet de lui donner la forme (82) et, comme conséquence, de l'intégrer.

Des considérations semblables s'appliquent, sans difficultés nouvelles, à toute une série de cas, dont le précédent est le plus simple; mais les calculs qu'ils exigent sont trop longs pour présenter une utilité véritable; leur existence est, pour la théorie des équations différentielles du type (4), le seul point qu'il importe de connaître.

S<sup>t</sup> Mandé, le 30 décembre 1901.