

SUR LA STRATIFICATION D'UNE MASSE FLUIDE EN ÉQUILIBRE

PAR

VITO VOLTERRA

A ROME.

1. ABEL a été amené par un problème de mécanique à envisager pour la première fois la question de l'inversion des intégrales définies. En effet c'est le problème des *tautochrones* généralisé qui l'a conduit, par un vrai coup de génie, à sa célèbre formule d'inversion qui se trouve dans le mémoire qu'il a publié en 1823 sous le titre: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*¹. Cette formule qui correspond à un cas très-particulier d'inversion a reçu bien d'applications dans beaucoup de questions de physique mathématique, de mécanique et d'analyse. LIOUVILLE peu de temps après ABEL, et sans connaître son résultat, a tâché de résoudre une classe intéressante de questions par l'invention d'un nouveau calcul qu'il appelait des différentielles à indices quelconques.

Mais les formules de LIOUVILLE ne sont que des transformations de celle d'ABEL.

On a donné après un grand nombre de démonstrations du résultat trouvé par ABEL, et on en a multiplié les applications; cependant rien de réellement nouveau n'a été fait, par rapport à la question de l'inversion, jusqu'à l'année 1884 M. SONINE a donné dans les *Acta Mathematica* une

¹ *Magazin for Naturvidenskaberne*, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823. — *Oeuvres*, Christiania 1881, T. 1^{er} page 11.

Voir aussi le Mémoire: *Resolution d'un problème de Mécanique*. *Journ. f. d. reine und ang. Math. her. v. CRELLE*, Bd. 1, Berlin 1826. — *Oeuvres*, Christiania 1881, T. 1^{er} page 97.

nouvelle formule. M. SONINE envisage aussi un cas particulier d'inversion, mais sa formule n'est pas une transformation de celle qui avait été donnée par ABEL, mais c'est une vraie généralisation de cette formule.

Dans quelques travaux que j'ai publiés en 1896 et 1897¹ j'ai donné la solution de la question générale de l'inversion des intégrales définies. Cette solution peut s'obtenir en supposant seulement certaines conditions peu restrictives sur la continuité et sur l'ordre d'infini des fonctions qui paraissent dans les calculs.

Cependant il y a des cas pratiques dans lesquels ces conditions ne sont pas vérifiées, et il faut alors recourir à des artifices particuliers, quelque fois très-pénibles pour arriver au but. Dans cette Note j'envisage précisément un de ces cas qui ressort d'une question de mécanique céleste. Le problème se réduit à la détermination d'une fonction inconnue qui paraît sous une intégrale définie, tout à fait comme dans le problème des courbes tautochrones étudié par ABEL. Mais, si l'on veut résoudre ce cas dans toute sa généralité, il faut imaginer des méthodes nouvelles.

2. Je vais maintenant éclaircir en quelques mots la question de mécanique céleste à laquelle je me rapporte.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui tourne autour d'un axe avec une vitesse uniforme, joue un rôle très-important dans l'astronomie théorique, parce que c'est le fondement du calcul de la figure des corps célestes.

Un examen approfondi des stratifications qui sont compatibles avec l'équilibre n'est pas très-avancé, et presque tous les résultats rigoureux qu'on a là-dessus sont des résultats négatifs. Cependant même des résultats négatifs ont un grand intérêt dans ce genre de recherches. Pour mettre cela en pleine lumière, il suffit de remarquer que, même dans le cas des fluides homogènes, on ne possède pas des méthodes directes par lesquelles on peut

¹ *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1896.

Sulla inversione degli integrali definiti. Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma 1896.

Sulla inversione degli integrali multipli. Ibid. 1896.

Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti. Annali di Matematica, Milano 1897.

déterminer des figures d'équilibre. Les calculs classiques de MAC-LAURIN et de JACOBI, par exemple, ne sont que des vérifications que les ellipsoïdes peuvent être des figures d'équilibre. C'est pourquoi il y a un vrai intérêt à établir que certaines formes ou certaines stratifications sont impossibles. Mais dans la plupart des cas ces propositions négatives ne s'obtiennent qu'avec beaucoup d'effort.

Entre toutes ces propositions il y en a une qu'il est intéressant de mettre hors de doute d'une manière rigoureuse et complète. Rapportons nous aux méthodes de MAC LAURIN et de JACOBI. Leurs succès ressort de la forme extrêmement simple du potentiel d'un ellipsoïde homogène. Or l'expression du potentiel reste aussi simple lorsque l'ellipsoïde étant hétérogène est stratifié par couches homothétiques et concentriques. Il s'agit donc de vérifier s'il y a des figures d'équilibre des fluides ainsi stratifiés.

Au premier abord cette question semble déjà tranchée d'une manière négative par les remarquables résultats de M. HENRY et de M. POINCARÉ; mais puisque ces auteurs se rapportent à une masse discontinue, on comprend, si on regarde plus de près, que la proposition n'est pas encore complète¹.

Le but de ce mémoire est d'établir d'une manière générale cette proposition négative. C'est la généralité qu'on laisse à la densité qui engendre la difficulté de la question². En effet on ne peut pas employer les procédés de M. HENRY et de M. POINCARÉ, et dès qu'on impose à la densité la seule condition d'être une fonction intégrable, on tombe sur un problème d'inversion qui n'est soluble que par des méthodes nouvelles.

Nous partagerons notre recherche en trois parties. Dans le premier § nous établirons la relation (A) fondamentale entre deux fonctions inconnues. En utilisant cette relation nous envisagerons dans le second § le cas de l'ellipsoïde de révolution, et dans le troisième § celui de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

¹ Voir la 1^{ère} Note à la fin du Mémoire.

² Voir la II^{ème} et la III^{ème} Note à la fin du Mémoire.

I.

1. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les axes d'un ellipsoïde. Si on le rapporte à ses axes principaux, son équation sera

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Chaque ellipsoïde interne homothétique et concentrique aura pour équation

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - h \quad (0 < h < 1).$$

Si la matière qui remplit l'ellipsoïde est stratifiée par couches homothétiques et concentriques, la densité ρ sera une fonction de h . Nous supposons que $\rho(h)$ soit une fonction positive finie et intégrable. Dans cette hypothèse, l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles $\rho(h)$ est continue, est condensé dans toute partie du domaine $(0, 1)$.

A cause de la définition de la densité, on a que la masse d'une portion quelconque de l'ellipsoïde, et sa fonction potentielle ne changeront pas en changeant les valeurs de $\rho(h)$ dans les points où cette fonction n'est pas continue, pourvu qu'elle reste toujours intégrable.

C'est pourquoi nous pourrions changer d'une manière arbitraire les valeurs données de la densité $\rho(h)$ dans les points où elle est discontinue en conservant pour cette fonction la propriété d'être intégrable, et on pourra remplacer la primitive expression de la densité par la nouvelle expression.

Cela posé, il est connu que la fonction potentielle dans tout point x, y, z qui fait partie de la masse de l'ellipsoïde est donnée par

$$V = \pi abc \int_0^\infty \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}}$$

où

$$(3) \quad \mu = 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}, \quad D = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)$$

$$\varphi(\mu) = \int_0^\mu \rho(\mu) d\mu.$$

2. Supposons maintenant que l'ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z . Il faut distinguer deux cas: celui où l'on peut trouver deux nombres h_0 et h_1 tels que

$$0 < h_0 < h_1 < 1$$

$\rho(h)$ étant constant pour toutes les valeurs de h comprises entre h_0 et h_1 ; et le cas où cette condition n'est pas vérifiée.

Dans le premier cas on peut démontrer que l'équilibre de la masse fluide n'est pas possible, en réduisant ce cas à celui envisagé par M. POINCARÉ. En effet, si l'équilibre était possible, il subsisterait même en retranchant la portion de fluide comprise entre la surface libre et l'ellipsoïde qui correspond au paramètre h_0 . Alors on trouverait un fluide dont la partie externe est homogène et en même temps est comprise entre deux ellipsoïdes qui ne sont pas homofocaux. Cette condition est incompatible avec l'équilibre¹.

3. Nous allons donc envisager le second cas. La fonction potentielle de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge est donnée par

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Pour l'équilibre il faut que W soit constante sur les surfaces où la densité est constante. Il faudra donc que l'on ait

$$W = \phi(h),$$

c'est pourquoi on aura l'équation

$$(A) \quad \pi abc \int_0^\infty \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \phi(h).$$

4. Il est facile de démontrer que si $\omega \lesssim 0$ l'ellipsoïde ne peut pas se réduire à une sphère.

En effet pour $a = b = c$, on aurait

$$\mu = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + \lambda} \quad h = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}$$

c'est pourquoi V et ϕ seraient des fonctions de $x^2 + y^2 + z^2$.

¹ Journal de Mathématiques fondé par J. LIOUVILLE. IV Série. T. VI, 1890, page 69.

Écrivons maintenant l'équation (A) sous la forme

$$V - \phi = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette équation serait absurde si $V - \phi$ était une fonction de $x^2 + y^2 + z^2$.

Il faut donc envisager deux cas:

1^{er} cas $a = b \geq c$

2^{ème} cas $a \geq b$.

II.

1. Soit $a = b$. En posant $x^2 + y^2 = r^2$ nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} \mu = 1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}, \\ h = 1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h.$$

L'équation (A) s'écrira

$$\pi^2 a^2 c \int_0^\infty \varphi \left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2} r^2 + \phi(h),$$

et si nous dérivons par rapport à r^2 , on aura puisque ρ est intégrable,

$$-\pi^2 c \int_0^\infty \rho \left(\frac{\lambda}{c^2 + \lambda} - \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{a^2(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} h \right) \frac{(a^2 - c^2)\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\sqrt{D}} d\lambda = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$(2) \quad \pi^2 c \rho = \chi,$$

l'équation précédente deviendra

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \chi(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega^2}{2(a^2 - c^2)}.$$

χ est une fonction positive. On en tire

$$a > c,$$

c'est à dire l'axe de rotation est le petit axe de l'ellipsoïde.

2. En posant

$$(4) \quad \frac{r^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = \xi, \quad \frac{r^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} = \theta$$

on aura

$$\mu = 1 - \xi$$

$$(5) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = -\frac{1}{\theta}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial r^2} = \frac{1}{(a^2 + \lambda)\theta}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2 + \lambda)\theta}.$$

Prenons dans le premier membre de l'équation (3) pour variable d'intégration ξ au lieu de λ ; cette équation s'écrira

$$\int_0^{\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \chi(1 - \xi) \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} d\xi = \frac{\omega^2}{2(a^2 - c^2)}.$$

Si nous dérivons par rapport à r^2 et à z^2 en remarquant que la quantité sous l'intégrale s'annule à la limite supérieure, non aurons

$$(6) \quad \int_0^{\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \chi(1 - \xi) \frac{\partial}{\partial r^2} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] d\xi = 0,$$

$$(6') \quad \int_0^{\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \chi(1 - \xi) \frac{\partial}{\partial z^2} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] d\xi = 0.$$

Or, par des calculs qui ne présentent pas de difficultés, on trouve, ayant égard aux relations (5),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r^2} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^3 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \cdot \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}}, \\ & \frac{\partial}{\partial c^2} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^3 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}} \theta} \right] \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}} \theta} \cdot \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans les équations (6) et (6') les premiers membres des équations précédentes par les seconds membres, et en faisant des intégrations par parties, on peut écrire les équations (6) et (6') sous la forme

$$(6_a) \quad \int_0^{\frac{r^2 + c^2}{a^2 + c^2}} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \theta} \right] d\xi = 0,$$

$$(6'_a) \quad \int_0^{\frac{r^2 + c^2}{a^2 + c^2}} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}} \theta} \right] d\xi = 0,$$

où l'on a posé

$$(7_a) \quad f(\xi) = -\chi(1 - \xi) \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}} d\xi.$$

3. Supposons maintenant $z = 0$, et posons

$$\frac{r^2}{a^2} = y, \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \varepsilon.$$

En vertu des équations (4) nous aurons

$$\lambda = a^2 \frac{y - \xi}{\xi}, \quad a^2 + \lambda = a^2 \frac{y}{\xi}, \quad c^2 + \lambda = a^2 \frac{y - \varepsilon \xi}{\xi}, \quad \theta = \frac{a^2 y}{\xi^2},$$

et par suite les relations (6^a), (6'^a) et (7^a) deviendront, pour $z = 0$,

$$(6_b) \quad \int_0^y f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon \xi)^{\frac{3}{2}}} d\xi = 0,$$

$$(6'_b) \quad \int_0^y f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon \xi)^{\frac{5}{2}}} d\xi = 0,$$

$$(7_b) \quad f(\xi) = \left[-\chi(1 - \xi) \xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \xi^{\frac{1}{2}} d\xi \right] \frac{1}{a^3 y^{\frac{3}{2}}},$$

ou même

$$(6_c) \quad \int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon \xi)^{\frac{3}{2}}} d\xi = 0,$$

$$(6'_c) \quad \int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon \xi)^{\frac{5}{2}}} d\xi = 0,$$

$$(7_c) \quad \psi(\xi) = -\chi(1 - \xi) \xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \xi^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Il est évident que $\psi(\xi)$ et $\chi(1 - \xi)$ sont des fonctions continues pour les mêmes valeurs de ξ .

4. Cela posé dérivons l'équation (6_b) par rapport à y .
 \bar{y} étant une valeur de y pour laquelle $f(y)$ est continue, on aura

$$-\psi(\bar{y}) \frac{1}{\bar{y}^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\bar{y}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{-\frac{1}{2} \bar{y} + \frac{3}{2} \xi - \varepsilon \xi}{(\bar{y} - \varepsilon \xi)^{\frac{5}{2}}} \right\} d\xi = 0.$$

Ajoutons cette équation à l'équation (6') après l'avoir multipliée par $\frac{3}{2} - \varepsilon$.

On trouvera

$$-\phi(\bar{y}) \frac{1}{\bar{y}^2 (1-\varepsilon)^2} + \int_0^{\bar{y}} \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\bar{y}(1-\varepsilon)}{(\bar{y}-\varepsilon\xi)^2} d\xi = 0,$$

d'où

$$(8) \quad \frac{1}{\bar{y}^2 (1-\varepsilon)^2} \phi(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(\bar{y}-\varepsilon\xi)^2} d\xi.$$

L'expression $\int_0^y \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^2} d\xi$ est une fonction continue de la variable y

pour toute valeur y comprise entre 0 et 1. Donc en vertu de la relation (8) on pourra rendre continue la fonction $\phi(y)$ en changeant ses valeurs dans les points de discontinuité. On ne pourra avoir d'exception que pour la valeur $y = 0$.

De même, à cause des relations (7.) et (2), $\chi(1-\xi)$ et $\rho(1-\xi)$ deviendront des fonctions continues (excepté tout au plus pour $\xi = 0$) en changeant leurs valeurs dans les points de discontinuité. Par suite, en prenant garde à ce que nous avons remarqué au 1^{er} §, nous pouvons supposer que $\rho(1-\xi)$, $\chi(1-\xi)$ et $\phi(\xi)$ soient des fonctions continues. Tout au plus elles pourraient n'avoir pas une valeur déterminée pour $\xi = 0$.

5. La fonction $\frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^2}$ croît lorsqu'on fait croître ξ entre 0 et y ;

par conséquent $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^2}$ est positive. C'est pourquoi

$$\int_0^y \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^2} d\xi = \phi_1 \int_0^y \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^2} d\xi = \phi_1 \frac{1 - (1-\varepsilon)^2}{y^2 (1-\varepsilon)^2}$$

en désignant par ϕ_1 une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\phi(\xi)$, ξ étant comprise entre 0 et y .

L'équation (8) deviendra donc

$$\phi(y) = \phi_1 \left(1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}} \right).$$

Il est facile de démontrer que cette équation ne peut être vérifiée que si les valeurs $\phi(y)$ sont nulles.

En effet, si $\phi(y)$ n'est pas nul, on tire de l'équation précédente

$$\frac{\phi(y)}{\phi_1} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Le second membre étant positif, on peut remplacer $\phi(y)$ et ϕ_1 par leurs valeurs absolues, et l'on a

$$\frac{|\phi(y)|}{|\phi_1|} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Soit M la limite supérieure des valeurs absolues de $\phi(y)$, y étant comprise entre 0 et 1.

On aura

$$\frac{|\phi(y)|}{M} \leq 1 - (1 - \varepsilon)^{\frac{5}{2}}.$$

Mais $\phi(y)$ peut s'approcher de M autant que l'on veut, de sorte que le premier membre étant proche de l'unité autant que l'on veut, l'équation précédente est absurde.

6. $\phi(\xi)$ étant nul, on tire de l'équation (7c)

$$\chi(1 - \xi)\xi^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi)\xi^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

χ est donc une fonction dérivable par rapport à ξ pour $0 < \xi < 1$. Par la dérivation on trouve

$$\chi'(1 - \xi) = 0$$

d'où l'on déduit que χ et ρ sont constantes. Cette condition est incompatible avec l'hétérogénéité de l'ellipsoïde, et cela démontre que lorsque l'ellipsoïde est un ellipsoïde hétérogène de révolution, par rapport à l'axe de rotation, l'équilibre n'est pas possible.

III.

1. Envisageons maintenant le cas où $a < b$. En posant $r^2 = x^2 + y^2$, on aura, à cause de l'équation (2) du 1^{er} Article,

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{r^2}{b^2} - h + \frac{x^2}{c^2} \right),$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{r^2}{a^2} - h + \frac{x^2}{c^2} \right),$$

et par suite, en vertu de la formule (3),

$$(1) \quad \mu = 1 - \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} r^2 - \frac{a^2 b^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} h - \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)} \right) \frac{x^2}{c^2}.$$

Dérivons maintenant la relation (A) par rapport à z^2 . On trouvera, à cause de l'équation précédente,

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \varphi'(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)} \right) = 0.$$

Supposons que c ne soit pas la plus petite des trois quantités a, b, c . Puisque λ est une quantité positive, on aurait

$$\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{c^2}} > \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)} > 0.$$

Tous les facteurs qui paraissent sous la dernière intégrale seraient donc des quantités positives et par suite l'équation (2) ne serait pas possible. Il faut donc que c soit plus petite que a et b . L'ellipsoïde sera à trois axes inégaux, et l'on pourra arranger les trois quantités a, b, c par ordre de grandeur en écrivant

$$a > b > c.$$

2. Dérivons maintenant l'équation (A) par rapport à r^2 . En prenant garde à l'équation (1) nous aurons

$$(3) \quad \pi abc \int_0^\infty \varphi'(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega^2}{2}.$$

Posons

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = \xi.$$

En regardant λ comme une fonction de ξ, x^2, y^2, z^2 , définie par l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = -\frac{1}{\Omega}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{(a^2 + \lambda)\Omega}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y^2} = \frac{1}{(b^2 + \lambda)\Omega}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2 + \lambda)\Omega}$$

où l'on suppose

$$\Omega = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}.$$

Pour calculer l'intégrale qui paraît dans l'équation (3), prenons ξ comme variable d'intégration au lieu de λ , nous aurons

$$(3') \quad \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} d\xi = \frac{\omega^2}{2}$$

étant

$$\chi(1-\xi) = \pi abc \varphi'(\mu).$$

Dérivons l'équation (3') par rapport à x^2, y^2, z^2 . Puisque à la limite supérieure de l'intégrale on a $\lambda = 0$, nous trouverons

$$(4) \quad \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial x^2} d\xi = 0, \quad \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial y^2} d\xi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial z^2} d\xi = 0,$$

ayant posé

$$H = \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} (c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega}.$$

Or, on trouve par des calculs très-simples,

$$\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \right] \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \cdot \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \right] \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \cdot \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \Omega} \right] \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \Omega} \cdot \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}}.$$

C'est pourquoi les équations (4) s'écriront, par des intégrations par parties,

$$(4.) \quad \begin{cases} \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \right) d\xi = 0, \\ \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}} \Omega} \right) d\xi = 0, \\ \int_0^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}(c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}} \Omega} \right) d\xi = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$f(\xi) = -\chi(1 - \xi) \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \frac{1}{(a^2 + \lambda)^{\frac{5}{2}} \Omega} d\xi.$$

3. Supposons maintenant $y = z = 0$, et posons

$$\frac{x^2}{a^2} = u, \quad \varepsilon_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Il viendra

$$\lambda = a^2 \frac{u - \xi}{\xi}, \quad a^2 + \lambda = a^2 \frac{u}{\xi}, \quad b^2 + \lambda = a^2 \frac{u - \varepsilon_1 \xi}{\xi}, \quad c^2 + \lambda = a^2 \frac{u - \varepsilon_2 \xi}{\xi},$$

$$\Omega = \frac{\xi^2}{a^2 u},$$

et les équations (4₁) s'écriront

$$(4') \quad \int_0^u \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

$$(4'') \quad \int_0^u \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{5}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

$$(4''') \quad \int_0^u \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u - \xi}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{3}{2}}} \right] d\xi = 0,$$

où

$$(5) \quad \phi(\xi) = -\chi(1 - \xi) \xi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi) \xi^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Dérivons (4') par rapport à u .

\bar{u} étant un point de continuité de ϕ , on aura

$$0 = -\phi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{\bar{u}} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{u} - \xi}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{5}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{u} - \xi}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{3}{2}}} \right] d\xi.$$

Ajoutons (4'') et (4''') après avoir multiplié par $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$ respectivement.

On obtiendra

$$(6) \quad \phi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\bar{u}} \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u} - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}} (\bar{u} - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi.$$

En répétant la discussion que nous avons faite dans l'Art. précédant, on trouve qu'on peut toujours supposer que les fonctions $\chi(1 - \xi)$, $\rho(1 - \xi)$, $\psi(\xi)$ soient continues pour $0 < \xi < 1$.

Or $\frac{1}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}}(u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}}$ est une fonction croissante par rapport à ξ , étant $0 \leq \xi \leq u$; par suite l'équation (6) s'écrira

$$\psi(u) \frac{1}{u^2(1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}} = \psi_1 \int_0^u \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(u - \varepsilon_1 \xi)^{\frac{3}{2}}(u - \varepsilon_2 \xi)^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi,$$

où ψ_1 est une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, étant $0 < \xi < u$.

On tire de là

$$\psi(u) = \psi_1 \left(1 - (1 - \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}}(1 - \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Il n'y a maintenant qu'à répéter les considérations faites à la fin de l'Art. II pour voir que $\psi(u) = 0$, et par suite ρ est une quantité constante.

Donc, même si l'ellipsoïde est à trois axes inégaux l'équilibre n'est pas possible lorsqu'il est hétérogène.

Note I^{ère}.

On peut montrer d'une manière très-simple que les raisonnements qu'on fait dans le cas de l'ellipsoïde discontinu, c'est à dire formé par un nombre fini de couches homogènes de densités différentes superposées les unes aux autres, ne peuvent pas s'appliquer, en général, au cas de l'ellipsoïde continu. Pour cela nous allons donner une démonstration directe, fort-simple, de la proposition qu'un ellipsoïde discontinu formé par n couches homogènes limitées par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, ne peut pas être en équilibre lorsqu'il tourne avec une vitesse constante autour d'une axe. On verra tout de suite que cette démonstration élémentaire ne peut pas s'étendre au cas où le nombre des couches augmente indéfiniment jusqu'à former un ellipsoïde continu.

On peut réduire le cas général où l'on a n couches au cas où l'ellipsoïde n'est formé que de deux couches. En effet supposons qu'il y ait équilibre pour l'ellipsoïde à n couches. Il y aura toujours équilibre en retranchant un nombre quelconque de couches extérieures, car ces couches n'exercent aucune attraction à l'intérieur.

Il y aura donc équilibre si l'ellipsoïde est réduit aux deux couches les plus internes ou même au noyau central. Mais le noyau étant en équilibre, l'équilibre subsisterait même si les deux couches avaient la même densité du noyau. Il faudrait donc que la fonction potentielle d'une masse remplissant la couche extérieure avec une densité égale à la différence des densités des deux couches fût constante sur la surface externe. Or cela est contraire aux propriétés de la fonction potentielle des couches ellipsoïdiques.

Note II^{ème}.

Lorsqu'on suppose que la densité, à partir d'une certaine profondeur jusqu'au centre de l'ellipsoïde, va toujours en croissant ou en décroissant, alors les développements analytiques que nous avons donnés auparavant ne sont plus nécessaires pour la démonstration. Par des calculs très-simples on peut arriver au but. On peut même l'atteindre sans recourir à des calculs, mais par une discussion élémentaire.

En effet il suffit de remarquer que la masse fluide se maintient en équilibre en retranchant toute la partie extérieure et en gardant seulement celle renfermée à l'intérieur d'un ellipsoïde E concentrique et homothétique à l'ellipsoïde primitif, où la densité croît ou décroît toujours du centre jusqu'à la périphérie.

Cela posé décomposons cette masse M , par un ellipsoïde homothétique et concentrique E' en deux parties. Celle interne M' se maintient d'elle-même en équilibre par la rotation ω . Or on voit tout de suite qu'en prenant une masse M'' homothétique à M' de sorte que M' et M'' aient la même densité aux points qui se correspondent par homothétie, cette masse sera en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire ω autour de l'axe qui correspond par homothétie à l'axe de rotation M' . Si nous prenons maintenant M'' de manière qu'elle occupe l'espace renfermé

dans un ellipsoïde E' égal à E , nous aurons les deux masses M et M' qui sont renfermées à l'intérieur de deux ellipsoïdes égaux et sont en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire autour de deux axes correspondants.

Si nous prenons une troisième ellipsoïde E'' égale à E et à E' et y renfermons une masse M'' dont la densité en chaque point soit la différence des densités correspondantes de M et de M' , cette masse sera en équilibre d'elle-même étant en repos. Or la masse M'' a en tout point une densité positive, c'est pourquoi on voit aisément que l'équilibre n'est pas possible.

Note III^{ème}.

Je vais exposer une nouvelle démonstration de l'incompatibilité de l'équilibre d'une masse tournant uniformément, avec sa stratification par ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Je dirai après pourquoi je ne l'ai pas préférée à celle que j'ai donnée dans le cours du travail précédent.

Partons de l'équation (A) (Art. I^{er}) qu'on peut écrire

$$V = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h),$$

d'où l'on tire

$$(B) \quad \Delta^2 V = -2\omega^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} \Delta h + \frac{\partial \psi}{\partial h} \Delta^2 h,$$

étant

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Or par le théorème de Poisson

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho(h),$$

et à cause de l'équation (2) du 1^{er} Article

$$\Delta h = 4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right),$$

$$\Delta^2 h = -2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Donc, afin que l'équation (B) soit satisfaite, il faut que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} = 0$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (B), que la densité doit être constante.

Cette démonstration est très-simple; mais elle suppose que le théorème de Poisson soit vérifié et pour cela il ne suffit pas que la densité soit une fonction intégrable. C'est pourquoi nous avons préféré la démonstration que nous avons donnée précédemment, quoique plus compliquée, à celle que nous venons d'exposer.

Cependant il faut remarquer qu'en suivant cette voie, on peut arriver à une conclusion plus générale.

En effet, par cette méthode, on peut démontrer le théorème suivant: *Soit une masse fluide d'une forme et d'une constitution quelconque, pourvu que la densité soit telle que le théorème de Poisson soit applicable. Si dans le domaine d'un point où le fluide est hétérogène et continu, les surfaces où la densité a des valeurs constantes sont des parties de quadriques homothétiques et concentriques, ou des parties de quadriques homofocales, la masse fluide ne sera pas en équilibre si elle tourne uniformément autour d'un axe quelconque.*

Note IV^{ème}.

Nous avons supposé dans le 1^{er} § que la rotation de l'ellipsoïde eût lieu autour de l'un des axes. Il est aisé de prouver que cette hypothèse n'est pas une restriction, car si l'axe de rotation aurait pour équation

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

α, β, γ étant les cosinus de direction de l'axe, il faudrait remplacer dans l'équation (A), le terme $-\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ par

$$-\frac{\omega^2}{2} \left\{ (x - x_0)^2 (\beta^2 + \gamma^2) + (y - y_0)^2 (\gamma^2 + \alpha^2) + (z - z_0)^2 (\alpha^2 + \beta^2) \right. \\ \left. - 2(y - y_0)(z - z_0)\beta\gamma - 2(z - z_0)(x - x_0)\gamma\alpha - 2(x - x_0)(y - y_0)\alpha\beta \right\}.$$

Or puisque le premier membre de l'équation (A) et $\psi(h)$ ne changent pas, en changeant le signe des quantités x, y, z , il faut que l'on ait

$$\frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma}$$

et que deux des cosinus α, β, γ soient nuls.