BEWEIS EINES SATZES VON ABEL ÜBER DIE GLEICHUNG $x^n + y^n + z^n = 0$

VON

P. STÄCKEL

in KIEL.

Dass ABEL sich mit der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ beschäftigt hat, zeigt ein Brief von ihm an HOLMBOE aus dem August 1823 (Oeuvres, Nouv. éd. t. II. S. 254—255). Ein darauf bezüglicher Satz, den er in dem Briefe mitteilt, ohne anzugeben, wie er ihn hergeleitet hatte, soll in dem Folgenden bewiesen werden.

Wenn n eine positive ungerade Zahl bedeutet, so ist $u^n + v^n$ durch $u + v$ algebraisch teilbar, und da der Quotient in u und v symmetrisch ist, lässt er sich als ganze rationale Function von $u + v$ und uv darstellen, es besteht also eine Identität der Form:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} = A_0(u + v)^{n-1} + A_1 uv.(u + v)^{n-3} + A_2(uv)^2.(u + v)^{n-5} + \dots$$
$$\dots + A_{\frac{n-3}{2}}(uv)^{\frac{n-3}{2}}.(u + v)^2 + A_{\frac{n-1}{2}}(uv)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Im Besonderen ist der letzte Coefficient

$$A_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n,$$

wie man sofort erkennt, indem man $u = t + x$, $v = -t$ setzt und dann zur Grenze für $x = 0$ übergeht. Mithin gilt die Congruenz:

$$\frac{u^n + v^n}{u + v} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n(uv)^{\frac{n-1}{2}} \pmod{(u + v)^2}.$$

Bezeichnen nunmehr x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeuten soll, so ergiebt sich mittels der soeben bewiesenen Formel die Congruenz:

$$\frac{x^n}{y+z} \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot n(yz)^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{mod. } (y+z)^2),$$

bei der die linke Seite eine ganze Zahl ist.

Man zerlege $y + z$ in Primfactoren. Es sei p eine Primzahl, die in $y + z$ genau k mal enthalten ist. Da sich x^n durch $y + z$ teilen lässt, so muss p auch Primfactor von x sein, und ist p in x genau α mal enthalten, so muss

$$k \leqq \alpha n$$

sein.

Ist $k < \alpha n$, so enthält der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ noch den Primfactor p, folglich ist auch $n(yz)^{\frac{n-1}{2}}$ durch p teilbar. Wenn aber y und z relativ prim sind, so gilt dasselbe von $y + z$ und yz, mithin muss n durch p teilbar und daher $p = n$ sein. Demnach kann die Annahme $k < \alpha n$ nur dann erfüllt sein, wenn $y + z$ durch n teilbar ist. Dann ist es yz nicht, und daher, zufolge der Congruenz, der Quotient $\frac{x^n}{y+z}$ nur durch n selbst, aber durch keine höhere Potenz von n teilbar, also

$$k = \alpha n - 1.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für $p \gtrless n$ notwendig

$$k = \alpha n$$

ist und dass nur folgende zwei Möglichkeiten vorhanden sind:

Erstens: Es ist $y + z$ nicht durch n teilbar. Dann lässt es sich als n^{te} Potenz einer ganzen Zahl u darstellen:

$$y + z = u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = u \cdot u',$$

wo die ganzen Zahlen u und u' relativ prim sind. *Zweitens:* Es ist $y + z$ durch n teilbar, dann lässt es sich in der Form darstellen:

$$y + z = n^{n-1}u^n,$$

und es wird gleichzeitig

$$x = nu \,.\, u',$$

wo nu und u' relativ prim sind.

Entsprechende Gleichungen gelten, wenn y oder z bevorzugt wird. Es ist also entweder gleichzeitig

$$z + x = v^n \quad \text{und} \quad y = v \,.\, v',$$

wo v und v' relativ prim sind, oder

$$z + x = n^{n-1}v^n \quad \text{und} \quad y = nv \,.\, v',$$

wo nv und v' relativ prim sind, und entweder gleichzeitig

$$x + y = w^n \quad \text{und} \quad z = w \,.\, w',$$

wo w und w' relativ prim sind, oder

$$x + y = n^{n-1}w^n \quad \text{und} \quad z = nw \,.\, w',$$

wo nw und w' relativ prim sind.

Da die Zahlen x, y, z paarweise relativ prim sein sollten, kann höchstens eine von ihnen durch n teilbar sein, und es ergeben sich daher durch Combination der Möglichkeiten nur *zwei* wesentlich verschiedene Fälle. Entweder ist keine der Zahlen $y + z$, $z + x$, $x + y$ durch n teilbar und daher

$$y + z = u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n,$$

oder es ist eine von ihnen durch n teilbar, während es die anderen nicht sind. Da alle drei Zahlen x, y, z in der Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

dieselbe Rolle spielen, darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $y + z$ durch n teilbar sei, und erhält dann die Gleichungen:

$$y + z = n^{n-1}u^n, \qquad z + x = v^n, \qquad x + y = w^n.$$

Auf diese Weise ergiebt sich schliesslich ein Satz, der mit dem von ABEL angegebenen im Wesentlichen identisch ist und folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Sind x, y, z von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind, und besteht für sie die Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

in der n eine ungerade Primzahl bedeutet, so sind nur zwei Fälle möglich. *Erstens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = u \,.\, u', \qquad y = v \,.\, v', \qquad z = w \,.\, w',$$

wo u, v, w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist. *Zweitens:* x, y, z lassen sich in je zwei teilerfremde Factoren zerlegen:

$$x = nu \,.\, u', \qquad y = v \,.\, v', \qquad z = w \,.\, w',$$

wo v und w nicht durch n teilbar sind, in der Weise, dass gleichzeitig:

$$x = \frac{-n^{n-1}u^n + v^n + w^n}{2}, \qquad y = \frac{n^{n-1}u^n - v^n + w^n}{2}, \qquad z = \frac{n^{n-1}u^n + v^n - w^n}{2}$$

ist, oder es gelten die durch Vertauschung von x, y, z mit einander hervorgehenden Relationen.