DEUX THÉORÈMES D'ABEL SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES

PAR

M. HADAMARD

à PARIS.

On sait comment ABEL a fait entrer l'étude de la convergence des séries dans une voie nouvelle en montrant[1] l'impossibilité d'obtenir, par une règle unique, une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Le résultat qu'il a établi peut s'énoncer ainsi:

I. Etant donnée la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

à termes positifs et divergentee, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{2}$$

tendant vers zéro, par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série, sans que la nouvelle série ainsi obtenue

$$\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots \tag{1'}$$

soit convergente.

Inversement, d'ailleurs,

II. Etant donnée une série convergente à termes positifs, on peut toujours trouver une suite de nombres positifs indéfiniment croissants par lesquels on peut multiplier respectivement les termes de cette série sans la rendre divergente.

[1] *Note sur le mémoire n° 4 du second tome du journal de M. Crelle, ayant pour titre »Remarques sur les séries infinies et leur convergence«. — Oeuvres,* tome I, pp. 111—113 de la première édition.

Et ces deux propositions admettent à leur tour la réciproque commune

III. A toute suite

$$(2) \qquad \xi_0\,, \xi_1\,, \xi_2\,, \ldots, \xi_n\,, \ldots$$

de nombres positifs qui croissent indéfiniment, on peut faire correspondre une suite de nombres positifs $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, tels que la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ soit convergente et la série $\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots$ divergente.

Il est d'ailleurs clair que ceci resterait vrai lors même qu'une partie seulement de ξ irait en croissant indéfiniment, les autres restant finis.

Je me suis occupé précédemment[1] de généraliser ces résultats à l'aide de ceux qu'a obtenus DU BOIS-REYMOND; et l'on sait que, depuis, M. BOREL a repris avec succès cet ordre de recherches.[2] Je ne sais s'il a été remarqué que la question peut recevoir une extension de nature différente. Si, en effet, on remarque que la convergence absolue de la série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

entraîne celle de la série (1′) lorsque les ξ sont finis, on voit que la proposition III peut s'énoncer ainsi:

La condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ pour que la convergence absolue de la série (1) *entraîne nécessairement celle de la série* (1′), *est que tous ces nombres ξ_n soient inférieurs en valeur absolue à une limite fixe.*

Cette proposition conduit dès lors à poser la question suivante:

Comment doit être choisie la suite

$$(2) \qquad \xi_0\,, \xi_1\,, \ldots, \xi_n\,, \ldots$$

pour que toute série (1) *convergente* (absolument ou non) *donne, lorsqu'on multiplie ses termes respectivement par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ une série* (1′) *également convergente?*

---

[1] Acta Mathematica, tome 18; 1894.

[2] Indépendamment des résultats que M. BOREL avait obtenus dans ses travaux précédents, ses récentes *Leçons sur les séries à termes positifs* contiennent un ensemble de vues nouvelles et importantes sur ces questions.

Or un autre théorème bien connu d'ABEL, le théorème III de ses *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots,$[1] montre immédiatement la catégorie des suites (2) qui jouissent de la propriété en question comme bien plus étendue qu'on n'aurait pu le supposer au premier abord. Il fait voir, en effet, que la convergence est toujours conservée si les multiplicateurs (2) sont des nombres positifs décroissants; et la même transformation qui conduit ABEL a ce résultat montre[2] que cette propriété subsiste dès que la série

$$(3) \qquad \xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + (\xi_2 - \xi_1) + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n) + \ldots$$

est absolument convergente.

Au reste, il faut remarquer que ce résultat n'est pas essentiellement distinct de celui d'ABEL; car si la série (3) est absolument convergente, la quantité ξ_n (supposée réelle) peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \xi_n = A + \xi'_n - \xi''_n$$

où ξ'_n d'une part, ξ''_n de l'autre, désignent des nombres positifs décroissants pendant que A est une constante.

Je dis que *la condition ainsi trouvée comme suffisante est en même temps nécessaire.*

Supposons, en effet, qu'elle ne soit pas remplie et que la série (3) ne soit pas absolument convergente. Nous pouvons, néanmoins, admettre que ξ_n reste fini (sans quoi nous savons que la suite (2) ne possèderait pas la propriété qui nous intéresse, même pour les séries à termes positifs). Alors, si nous désignons par i, d'une manière générale, les valeurs de n pour lesquelles $\xi_{n+1} - \xi_n$ est positif, et par k celles pour lesquelles cette même quantité est négative, la série à termes positifs

$$\sum (\xi_{i+1} - \xi_i)$$

et la série à termes négatifs

$$\sum (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

---

[1] *Oeuvres*, tome I, page 69 de la première édition; page 222 de l'édition SYLOW et LIE.

[2] DIRICHLET-DEDEKIND, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3e édition, suppl. IX, § 143. — Voir PRINGSHEIM, Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften, I A3, p. 94.

seront divergentes. D'après le théorème I, nous pourrons, sans les rendre convergentes, multiplier les termes de la première par des quantités positives t_i qui tendent vers zéro, et les termes de la seconde par des quantités négatives t_k qui tendent également vers zéro. Dans ces conditions, la somme

$$(\xi_1 - \xi_0)t_0 + (\xi_1 - \xi_2)t_1 + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n)t_n$$

augmentera indéfiniment avec n.

Or par la transformation d'Abel, cette somme s'écrit

$$-\xi_0 t_0 + \xi_1(t_0 - t_1) + \xi_2(t_1 - t_2) + \ldots + \xi_n(t_{n-1} - t_n) + \xi_{n+1}t_n$$

et l'on peut y faire abstraction du premier terme ainsi que du dernier, puisque ξ_n est fini et t_n infiniment petit. Il apparaît alors que la suite (2) ne répond pas à la question, puisque la série $\sum(t_{n-1} - t_n)$ est convergente et la série $\sum \xi_n(t_{n-1} - t_n)$ divergente.

Donc *la condition nécessaire et suffisante cherchée est que la série* (3) *soit absolument convergente.*

Rien n'est d'ailleurs changé à cette conclusion si l'on suppose ξ_n imaginaire, soit

$$\xi_n = \eta_n + i\zeta_n .$$

D'une part, en effet, la convergence absolue de la série $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$ entraîne celle des séries $\sum(\eta_{n+1} - \eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$. D'autre part, lorsqu'on suppose les u réels, la convergence de la série $\sum \xi_n u_n$ exige celle des séries $\sum \eta_n u_n$, $\sum \zeta_n u_n$, de sorte que la suite des η_n et celle des ζ_n doivent satisfaire séparément à la condition qui vient d'être trouvée.

En demandant que la convergence de la série (1) entraîne celle de la série (1') on peut aussi demander, en outre, que, réciproquement, la convergence de celle-ci entraîne celle de la série (1). Alors, à la condition que la série (3) soit absolument convergente, il faudra évidemment ajouter celle que sa somme soit différente de zéro. La double condition ainsi obtenue est d'ailleurs suffisante, car, si $\lim \xi_n \neq 0$, la convergence absolue de la série (3) entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum \left(\frac{1}{\xi_{n+1}} - \frac{1}{\xi_n}\right) = \sum \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_n \xi_{n+1}} .$$

(D'une manière générale, si la fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ admet des dérivées finies, la convergence absolue des séries $\sum(\xi_{n+1}-\xi_n)$, $\sum(\eta_{n+1}-\eta_n)$, $\sum(\zeta_{n+1}-\zeta_n)$ entraîne, en vertu de la formule des accroissements finis, celle de la série $\sum[\varphi(\xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \zeta_{n+1})-\varphi(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)]$).

Considérons, par exemple, la série qu'a formée ABEL dans son Mémoire *sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes*[1] et qui a été étudiée par HALPHEN dans le tome 18 du *Bulletin de la Société Mathématique de France.*[2]

HALPHEN constate (au n° 3 de son Mémoire) que le terme général de cette série est de la forme $\left(A+\frac{B}{n}+\frac{b_n}{n^2}\right)u_n$, où A est indépendant de n et où b_n reste fini, les nombres A et B étant d'ailleurs fonctions de la variable x; et il en déduit que la série $\sum u_n$ est nécessairement convergente si la série d'ABEL converge pour deux valeurs de x qui donnent au rapport $\frac{B}{A}$ des valeurs différentes.

Nous voyons qu'une telle restriction est inutile. La série

$$\sum\left[\left(A+\frac{B}{n}+\frac{b_n}{n^2}\right)-\left(A+\frac{B}{n+1}+\frac{b_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]$$

étant absolument convergente, la convergence de la série donnée ne pourra avoir lieu pour aucune valeur de x n'annulant pas A (c'est à dire, ici, pour aucune valeur de x différente de zéro), si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Comme la particularité $A=0$ qui se présente pour $x=0$ est due à ce que tous les termes de la série d'ABEL (à l'exception du premier) contiennent x en facteur, si nous supprimons ce facteur, nous voyons que la série converge alors pour toutes les valeurs données à x ou ne converge pour aucune.

Nous sommes d'ailleurs à même d'indiquer tous les cas où la série de polynômes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$$

(dans laquelle les P_n sont des polynômes déterminés et les a_n des constantes arbitraires) possède cette propriété de la série d'ABEL: je veux dire

[1] *Oeuvres,* tome II, p. 82 de la 1e édition; p. 73 de la 2e.

[2] p. 67 et suiv.; 1882.

où, pour tout choix des a_n, il y a nécessairement, soit convergence pour toute valeur de x, soit divergence pour toute valeur de x. C'est ce qui aura lieu lorsque la série dont le terme général est

$$\frac{P_{n+1}(x')}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n(x')}{P_n(x)} \tag{4}$$

sera absolument convergente, quels que soient x et x'. Il est évidemment nécessaire, pour cela, que $P_n(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$P_n(x) = \mu_n \sum_{k=1}^{n} p_k(x),$$

les μ_n étant des constantes quelconques et

$$p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_n(x) + \ldots$$

une série de polynômes absolument convergente dans tout le plan et dont la somme ne s'annulle jamais. Cette condition est, d'ailleurs, suffisante. Car, d'après une remarque faite plus haut, la convergence absolue des séries $\sum[P_{n+1}(x) - P_n(x)]$, $\sum[P_{n+1}(x') - P_n(x')]$ (les sommes de ces séries étant différentes de zéro) entraîne la convergence absolue de la série (4).

Quoiqu'il soit, comme on le voit, bien aisé d'obtenir la forme générale des polynômes P_n, ceux-ci présenteraient peut-être quelques propriétés intéressantes: le fait que $\dfrac{P_n(x')}{P_n(x)}$ a une limite semble, par exemple, montrer que leurs zéros vont, en général, en augmentant tous indéfiniment, ainsi qu'il arrive pour la série d'Abel.

On peut remarquer que, si les quantités *réelles* ξ_n tendent vers une limite ξ, on peut toujours les ranger dans un ordre tel que la série $\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)$ soit absolument convergente. Cela est évident si les ξ_n tendent vers ξ par valeurs toutes inférieures ou toutes supérieures; dans le cas contraire, il suffira (ξ étant supposé égal à zéro pour simplifier le langage) de ranger par ordre de grandeur décroissante les termes positifs, par ordre de grandeur croissante les termes négatifs et de ne passer de l'un des groupes à l'autre qu'à des intervalles assez éloignés pour que la série formée par les termes de passage soit absolument convergente.

Il en est tout autrement dans le domaine complexe. Soient, par exemple, $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ les termes (constamment décroissants) d'une série divergente à termes positifs. Décrivons, d'un même point comme centre, des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ de rayons respectifs $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, et, dans le cercle C_p, inscrivons un polygone régulier d'un nombre de côtés assez grand pour que chaque côté soit inférieur à la plus petite des différences $E_{p-1} - E_p$, $E_p - E_{p+1}$. Alors, si nous désignons par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \ldots$ les sommets de ces différents polygones, rangés dans un ordre quelconque, toute ligne brisée assujettie à la condition de passer par tous ces points devra avoir une longueur supérieure à la somme des périmètres des polygones, laquelle croît indéfiniment.

Par contre, il peut se faire que, pour n'importe quel ordre assigné aux ξ, la série (3) soit absolument convergente. C'est ce qui aura lieu évidemment si la série $\sum (\xi - \xi_n)$ converge absolument, et dans ce cas seulement.