SUR LA MÉTHODE D'ABEL POUR L'INVERSION DE LA PREMIÈRE INTÉGRALE ELLIPTIQUE, DANS LE CAS OÙ LE MODULE A UNE VALEUR IMAGINAIRE COMPLEXE

PAR

P. MANSION

à GAND.

1. *Objet de cette Note.* La méthode d'ABEL pour opérer l'inversion de la première intégrale elliptique de LEGENDRE et établir les propriétés fondamentales de la fonction inverse est, croyons-nous, l'une des plus simples et des plus naturelles qui aient été proposées dans ce but.

En général, ABEL n'a considéré dans ses Mémoires que des intégrales ou des fonctions elliptiques de module réel. Mais il a fait remarquer que les résultats auxquels il arrive s'appliquent le plus souvent au cas où le module est imaginaire. »Ce théorème, dit-il, en parlant de la double périodicité, a lieu généralement quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire précédent. Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire» (*Oeuvres,* tome I, première édition, p. 254; 2^e^ édition, p. 404—405). Ailleurs »Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu, avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire» (*Ibid.,* première édition, p. 335; 2^e^ édition, p. 528).[1]

---

[1] Les derniers éditeurs d'ABEL disent à ce propos: »Nous avons cherché en vain, dans les manuscrits d'ABEL une indication de la méthode dont il comptait se servir pour étendre ses résultats aux modules imaginaires» (*Oeuvres,* t. II, p. 319).

Nous nous proposons de montrer, dans cette Note [1], que l'on peut étendre, d'une manière naturelle, la méthode d'exposition des principes de la théorie des fonctions elliptiques d'ABEL au cas où le module est une quantité imaginaire complexe. Pour abréger, nous supposerons le module k^2 de la forme $\rho e^{\alpha i}$, ρ étant positif et α compris entre 0 et π. Si α était compris entre π et 2π, le module complémentaire $k'^2 = 1 - k^2$ serait de la forme $\rho' e^{\alpha' i}$, ρ' étant positif et α' compris entre 0 et π. On peut donc faire, par rapport à k'^2, tous les raisonnements que nous allons faire par rapport à k^2, dans les intégrales dont il est question dans les n^os^ 2 et 3. On trouve, en effet, en posant $t_2 = [s^2 : (1 + s^2)]$,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k'^2s^2}},$$

et, de même, en faisant $s^2 = \frac{t^2}{1-t^2}$,

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}.$$

Nous n'employons, dans les démonstrations qui suivent, que des principes tous connus d'ABEL et démontrés dans le *Cours d'analyse* de CAUCHY (1821) ou, pour le théorème du n° 6, V, dans le ***Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*** (Paris, De Bure, 1825), du même géomètre.

2. **Théorème I.** *La courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$x + yi = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

[1] Nous avons donné une esquisse du présent travail (n° 2 et 3, premiers alinéas et les remarques du n° 4) dans les *Annales de la société scientifique de Bruxelles,* 1898, t. XXI, 1^ère^ partie, pp. 90—91, mais sans prouver que sn, cn, dn sont des fonctions bien déterminées. — Dans le même recueil, 1900, t. XXIII, 1^ère^ partie, pp. 55—57, nous avons traité le cas où k^2 est réel, mais non compris entre 0 et 1. — Nous avons annoncé les résultats établis ici dans les thèses 16, 17 et 18 annexées à notre dissertation inaugurale: *Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1870).

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, ρ étant positif, α compris entre o et π, *t variant de* o *à l'unité en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ compté à partir de l'axe des x et n'a aucun point double.*

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2t^2 étant α, celui de $-k^2t^2$ sera $-\pi+\alpha$; celui de $1-k^2t^2$ sera compris entre o et $-\pi+\alpha$. L'argument de $\sqrt{1-k^2t^2}$ sera compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces mêmes quantitées augmentées de π; mais on devra choisir la première valeur, car pour t tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1-k^2t^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de $\sqrt{1-k^2t^2}$ tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1-k^2t^2}$ étant compris entre o et $-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1:\sqrt{1-k^2t^2})$ est compris entre o et $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x+yi$ est la limite de la somme d'expressions $(1:\sqrt{1-k^2t^2})$, multipliées par des quantités positives $(dt:\sqrt{1-t^2})$; l'argument de cette somme et, par suite, de l'intégrale est donc aussi compris entre o et $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ compté à partir de l'axe des x.

Posons $x+yi=re^{\beta i}$, r étant positif. Je dis que β et r croissent en même temps que t. En effet, la valeur absolue de l'argument de $1-k^2t^2$ croît de o à $\pi-\alpha$ quand t varie de o à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $-k^2t^2$; la valeur absolue de l'argument de $\sqrt{1-k^2t^2}$ ou la valeur de l'argument de $(1:\sqrt{1-k^2t^2})$ croît de o à $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha$, quand t varie de o à ∞. L'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même croît donc avec t.

La valeur de r va aussi en croissant avec t, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieure au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1-k^2t^2} = m + ni \quad \text{ou} \quad 1 - \rho t^2 \cos\alpha - i\rho t^2 \sin\alpha = m^2 - n^2 + 2mni,$$

d'où il résulte que

$$2mn = -\rho t^2 \sin\alpha, \qquad -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2}.$$

On aura

$$x + yi = \int_0^t \frac{m-ni}{\sqrt{1-t^2(m^2+n^2)}}\,dt, \qquad \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = \frac{m-ni}{\sqrt{1-t^2(m^2+n^2)}},$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{m}{n} = \frac{\rho t^2 \sin\alpha}{2n^2} > 0.$$

Donc x croît en même que $y = r\sin\beta$, quand t croît de 0 à 1.

La courbe $x + yi = re^{\beta i}$ est donc telle que x, y, r, β croissent avec t et cette courbe n'a aucun point double quand t varie de zéro à l'unité.

3. **Théorème II.** *La courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}},$$

où $k^2 = \rho e^{\alpha i}$, ρ *étant positif,* α *compris entre* 0 et π, s *variant de* 0 à $+\infty$ *en restant réel et les radicaux ayant l'unité pour valeur initiale, est comprise dans l'angle* $\frac{1}{2}\alpha$ *compté à partir de l'axe des* y, *dans l'angle des* x *et des* y *positifs, et n'a aucun point double.*

L'argument de k^2 et, par suite, celui de k^2s^2 étant α, celui de $1+k^2s^2$ est compris entre 0 et α; celui de $\sqrt{1+k^2s^2}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, ou entre ces quantités augmentées de π; mais on doit choisir la première valeur, parce que, pour s tendant vers zéro, l'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ doit tendre vers l'argument de 1; or, dans la seconde hypothèse, l'argument de ce radical tendrait vers π, c'est-à-dire vers l'argument de -1. L'argument de $\sqrt{1+k^2s^2}$ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, celui de $(1:\sqrt{1+k^2s^2})$ est compris entre 0 et $-\frac{1}{2}\alpha$ et celui de $(i:\sqrt{1+k^2s^2})$ entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$.

L'intégrale $x' + y'i$ est la limite de la somme d'expressions $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ multipliées par des quantités positives $(ds : \sqrt{1 + s^2})$; l'argument de la somme et, par suite, celui de l'intégrale sera donc aussi compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$. La courbe est donc comprise toute entière dans l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compté à partir de l'axe des y.

Posons $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$, r' étant positif. Je dis que β' décroît et que r' croît quand s croît. En effet, l'argument de $1 + k^2 s^2$ croît de 0 à α, celui de $\sqrt{1 + k^2 s^2}$ de 0 à $\frac{1}{2}\alpha$ quand s varie de 0 à ∞, comme on le voit en construisant le parallélogramme ayant pour côtés 1 et $k^2 s^2$; la valeur de l'argument de $(i : \sqrt{1 + k^2 s^2})$ décroît donc de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ dans les mêmes circonstances. Il en résulte immédiatement que l'argument de la somme des éléments de l'intégrale et, par suite, celui de l'intégrale elle-même décroît quand s croît.

La valeur de r' va en croissant avec s, parce que le module de la somme de deux ou plusieurs quantités complexes dont les arguments diffèrent de moins de $\frac{1}{2}\pi$ est supérieur au module de chacune d'elles. A mesure que l'on considère un plus grand nombre d'éléments de l'intégrale, le module de leur somme et, par suite, celui de l'intégrale augmente.

Soit

$$\sqrt{1 + k^2 s^2} = m' + n'i \quad \text{ou} \quad 1 + \rho s^2 \cos\alpha + i\rho s^2 \sin\alpha = m'^2 - n'^2 + 2m'n'i,$$

d'où il résulte que

$$2m'n' = \rho s^2 \sin\alpha, \qquad \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2}.$$

On aura

$$x' + y'i = i\int_0^s \frac{m' - n'i}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}}\, ds, \qquad \frac{dx'}{ds} + i\frac{dy'}{ds} = \frac{m'i + n'}{\sqrt{1 + s^2(m'^2 + n'^2)}},$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m'}{n'} = \frac{\rho s^2 \sin\alpha}{2n'^2} > 0.$$

Donc y' croît en même temps que $x' = r'\cos\beta'$ quand s croît de 0 à ∞.

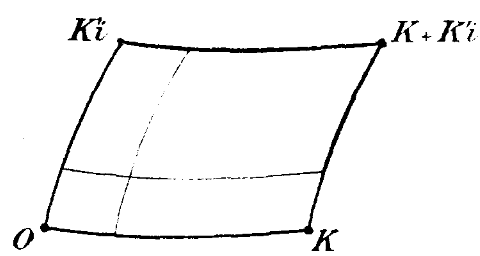
La courbe $x' + y'i = r'e^{\beta' i}$ est donc telle que $x', y', r', -\beta'$ croissent avec s et cette courbe n'a aucun point double quand s varie de 0 à l'infini.

4. **Théorème III.** *Si l'on fait glisser parallèlement à elle-même la première courbe* (x, y) *de manière que son point initial* $(0, 0)$ *décrive la seconde* (x', y'), *ou, inversement, la seconde* (x', y') *de manière que son point initial* $(0, 0)$ *décrive la première* (x, y), *chacune des deux courbes, dans son mouvement, balayera la surface d'un parallélogramme curviligne, en ne passant qu'une seule fois par chacun de ses points.*

Posons

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \qquad K'i = i\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

D'après la définition du parallélogramme curviligne, ses points s'obtiennent en faisant varier t de 0 à 1, s de 0 à ∞, de manière que $x+yi$



varie de 0 à K, $x'+y'i$ de 0 à $K'i$, x, y, x', y' allant d'ailleurs sans cesse en croissant, comme on l'a vu dans les théorèmes I et II. Un point quelconque de ce parallélogramme sera donc représenté par $x+yi+x'+y'i$.

Je dis qu'il est impossible que le même point soit représenté par une expression de même forme $X+Yi+X'+Y'i$, $X+Yi$ étant un point de la première courbe correspondant à une valeur T de la limite supérieure de la première intégrale, $X'+Y'i$ étant un point de la seconde courbe correspondant à une valeur S de la limite supérieure de la seconde intégrale.

En effet, l'égalité

$$x+yi+x'+y'i = X+Yi+X'+Y'i,$$

ou

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + i\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}},$$

peut s'écrire

$$\int_t^T \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = i\int_S^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Or cette dernière égalité est impossible; car, on a vu, dans l'étude des deux courbes, que, à π près, l'argument de la première intégrale est compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, celui de la seconde multipliée par i, entre $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ et $\frac{1}{2}\pi$.

Remarques. I. Il n'est pas sans intérêt d'observer que si l'on pose

$$K = Re^{Bi}, \qquad K'i = R'e^{B'i},$$

on a

$$\frac{1}{2}\pi > B' > \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha > B > 0$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\pi > B' - B > 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{K'i}{K} = \frac{R'}{R}e^{(B'-B)i} = \frac{R'}{R}\cos(B'-B) + i\frac{R'}{R}\sin(B'-B).$$

Le coefficient de i, dans la valeur de $(K'i:K)$, est donc positif.

II. Dans le cas où α est compris entre π et 2π, et, par suite, α' entre 0 et π, on trouve aisément que l'on a

$$0 > B > -\frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' < \pi - \frac{1}{2}\alpha', \qquad \frac{1}{2}\pi < B' - B < \pi$$

et le coefficient de i est encore positif.

5. *Inversion.* I. Posons, dans l'intégrale du n° 2, $t = \sin\varphi$, $z = x + yi$. Nous aurons

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si nous écrivons, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1,

$$\varphi = \operatorname{am} z, \; t = \sin\varphi = \sin\operatorname{am} z = \operatorname{sn} z, \; \sqrt{1-t^2} = \cos\varphi = \cos\operatorname{am} z = \operatorname{cn} z,$$

$$\sqrt{1-k^2t^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \Delta\operatorname{am} z = \operatorname{dn} z,$$

les fonctions $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ seront des fonctions bien déterminées de z, puisque la courbe (x, y) n'a pas de point double, et cela, pour toutes les valeurs de φ, de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Mais rien n'empêche de faire croître φ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, le radical $\sqrt{1-t^2}$ de l'intégrale primitive ayant toujours le signe de $\cos\varphi$. La variable z prendra des valeurs bien déterminées de 0 à K d'abord, puis de K à $2K$, de $2K$ à $3K$, etc. et de même de 0 à $-nK$, n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe (x, y) correspondante s'étendra jusqu'à l'infini dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons immédiatement de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les propriétés fondamentales de sn, cn, dn, *quand* sn *est réel*, mais non le théorème de l'addition:

$$(1) \qquad \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \qquad k^2\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1;$$

$$(2) \qquad D\operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z\operatorname{dn} z, \quad D\operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z, \quad D\operatorname{dn} z = -k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z;$$

$$(3) \qquad \operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \qquad \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \qquad \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z;$$

$$(4) \qquad \operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{cn} 0 = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = 1;$$

$$(5) \qquad \operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{cn} K = 0, \qquad \operatorname{dn} K = k';$$

$$(7) \quad \operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn} z.$$

II. Si l'on fait $t = si$, dans la première intégrale, elle se transforme dans la seconde, considérée au n° 3, savoir:

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = i\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Dans celle-ci on peut faire varier sans inconvénient s de 0 à ∞.

Posons

$$z'i = x' + y'i, \qquad s^2 = \frac{u^2}{1 - u^2}, \qquad u = \sin\psi,$$

il viendra

$$z'i = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + k^2 s^2}} = i\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k'^2 u^2}} = i\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}.$$

On a immédiatement, d'après 5, I, en mettant le module k' en évidence,

$$\sin\psi = \mathrm{sn}(z', k'), \qquad \cos\psi = \mathrm{cn}(z', k'), \qquad \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi} = \mathrm{dn}(z', k).$$

On a aussi

$$t = si = i \operatorname{tang}\psi, \qquad \sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 + s^2} = \frac{1}{\cos\psi}, \tag{8}$$

$$\sqrt{1 - k^2 t^2} = \sqrt{1 + k^2 s^2} = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}{\cos\psi}$$

les signes des expressions en ψ étant déterminées par la valeur initiale des radicaux. Si l'on pose

$$t = \mathrm{sn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1 - t^2} = \mathrm{cn}(z'i, k), \qquad \sqrt{1 - k^2 t^2} = \mathrm{dn}(z'i, k),$$

les fonctions $\mathrm{sn}(z'i, k)$, $\mathrm{cn}(z'i, k)$, $\mathrm{dn}(z'i, k)$ seront des fonctions bien déterminées de $z'i$, puisque la courbe (x', y') n'a pas de point double, pour toutes les valeurs de s de 0 à ∞, ou de φ de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Les relations (8) donneront d'ailleurs, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité, les formules de la transformation imaginaire d'Abel et de Jacobi:

$$\mathrm{sn}(z'i, k) = i\frac{\mathrm{sn}(x', k')}{\mathrm{cn}(x', k')}, \qquad \mathrm{cn}(z'i, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(x', k')}, \tag{9}$$

$$\mathrm{dn}(z'i, k) = \frac{\mathrm{dn}(x', k')}{\mathrm{cn}(x', k')}.$$

Rien n'empêche de faire croitre ψ indéfiniment ou de lui donner des valeurs négatives, les radicaux $\sqrt{1 - t^2}$, $\sqrt{1 - k^2 t^2}$ ayant toujours le signe de $\cos\psi$. La variable $z'i$ prendra des valeurs bien déterminées de 0 à $K'i$ d'abord, de $K'i$ à $2K'i$, de $2K'i$ à $3K'i$, etc., et, de même, de zéro à $-nK'i$,

n étant aussi grand qu'on le veut; la courbe correspondante (x', y') s'étendra de 0 à ∞, dans les deux sens, sans avoir de point double.

Nous tirons sans peine de ce qui précède, *pour la variable* $z'i$, les propriétés fondamentales exprimées par les équations (1), (2), (3) et, de plus, les suivantes:

$$(10)\qquad \operatorname{sn} K'i = i\,.\,\infty,\qquad \operatorname{cn} K'i = \infty,\qquad \operatorname{dn} K'i = k\,.\,\infty;$$

$$(11)\qquad \operatorname{sn}(z'i + 2K'i) = \operatorname{sn} z'i,\qquad \operatorname{cn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{cn} z'i,$$
$$\operatorname{dn}(z'i + 2K'i) = -\operatorname{dn} z'i.$$

Dans ces formules, $\operatorname{sn} z'i$ *est purement imaginaire.*

III. Soit $\xi = z + z'i$, z étant une valeur quelconque considérée au n° 5, I, $z'i$ une valeur quelconque considérée au n° 5, II. Par définition, nous poserons (comme Abel l'a fait dans le cas où k^2 est positif et inférieur à l'unité),

$$(12)\qquad \operatorname{sn}\xi = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z'i \operatorname{dn} z'i + \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{cn}\xi = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i},$$

$$\operatorname{dn}\xi = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} z'i - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} z'i \operatorname{cn} z \operatorname{cn} z'i}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 z'i}.$$

On déduit de là, comme dans le cas où k^2 est positif et inférieur à 1, *pour la variable générale* ξ, les propriétés (1), (2), (3), (7), (11), (9); de plus, les suivantes:

$$(13)\qquad \operatorname{sn}(K + K'i) = \frac{1}{k},\qquad \operatorname{cn}(K + K'i) = -i\frac{k'}{k},\qquad \operatorname{dn}(K + K'i) = 0.$$

$$(14)\qquad \operatorname{sn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{sn}\xi,\qquad \operatorname{cn}(\xi + 2K + 2K'i) = \operatorname{cn}\xi,$$
$$\operatorname{dn}(\xi + 2K + 2K'i) = -\operatorname{dn}\xi,$$

et beaucoup d'autres, en particulier, celles-ci:

$$(15)\qquad \operatorname{sn}(K'i - u) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} u},\qquad \operatorname{cn}(K + K'i - u) = -i\frac{k'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} u},$$
$$\operatorname{dn}(K - u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}.$$

La variable ξ considérée ici est quelconque. D'après sa définition même, on peut la mettre sous la forme $2pK + 2p'K'i \pm \xi_1$, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs; $\xi_1 = z_1 + z_1'i$ correspond à un point du parallélogramme curviligne du n° 4, dont les coordonnées sont $x_1 + x_1'$, $y_1 + y_1'$, si $z_1 = x_1 + y_1 i$ représente un point de la première courbe, $z_1' = x_1' + y_1' i$ un point de la seconde. Puisque ξ_1 ne peut être égal à une somme de la forme $z_1 + z_1'i$ que d'une manière (n° 4), les fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ sont bien déterminées.

6. *Infinis, zéros, périodes de* sn, cn, dn; *théorème de l'addition*; sn *peut prendre toute valeur.*

I. Des formules (1) et (12), il résulte (comme Abel l'a montré, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité), que $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$ ne sont infinis que si $\operatorname{sn} z = 0$, $\operatorname{sn} z'i = \infty$, ce qui donne $2pK + (2p' + 1)K'i$ pour les infinis de ces fonctions, p et p' étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

II. D'après les formules (15), pour que $\operatorname{sn}(K'i - u)$, $\operatorname{cn}(K + K'i - u)$, $\operatorname{dn}(K - u)$ s'annulent, il faut et il suffit que $u = 2pK + (2p' + 1)K'i$. Cette remarque donne immédiatement les zéros des fonctions $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$.

III. Ces fonctions, par suite, ne peuvent avoir pour périodes que $2K$, $2K'i$ ou leurs multiples; car si elles en avaient d'autres, elles auraient d'autres zéros et d'autres infinis que ceux que nous venons de déterminer.

IV. Le théorème de l'addition peut s'établir, dans le cas actuel, comme l'a fait Abel, quand k^2 est positif et inférieur à l'unité. Mais il peut aussi être démontré algébriquement comme il suit: Quand k^2 est positif et inférieur à l'unité, on a identiquement, si $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$,

$$\operatorname{sn} S = \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma+\delta) + \operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha+\beta)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)\operatorname{sn}^2(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\gamma)\operatorname{cn}(\beta+\delta)\operatorname{dn}(\beta+\delta) + \operatorname{sn}(\beta+\delta)\operatorname{cn}(\alpha+\gamma)\operatorname{dn}(\alpha+\gamma)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\gamma)\operatorname{sn}^2(\beta+\delta)}$$

et de même pour $\operatorname{cn} S$, $\operatorname{dn} S$, pourvu que l'on exprime les deux fractions au moyen des fonctions sn, cn, dn de α, β, γ et δ. Les mêmes identités algébriques subsistent si k^2 est imaginaire complexe, quand α et β sont des expressions de la forme z considérées au n° 5, I, γ et δ des expressions de la forme $z'i$ considérée au n° 5, II. Ces identités expriment évidemment alors le théorème de l'addition pour $\operatorname{sn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{cn}(\xi_1 + \xi_2)$, $\operatorname{dn}(\xi_1 + \xi_2)$, si $\xi_1 = \alpha + \gamma$, $\xi_2 = \beta + \delta$.

V. Enfin, la fonction $\operatorname{sn}\xi$ peut prendre une valeur quelconque $\lambda+\mu i$. En effet, posons

$$I=\int_0^{\lambda+\mu i}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe continue qui ne passe par aucun des points $+1$, -1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. On pourra représenter chacune des valeurs de l'intégrale par une expression ξ de la forme $z+z'i$, z variant de 0 à $Z=2pK\pm Z_1$, $z'i$ de 0 à $2p'K'i\pm Z'_1 i$, p et p' étant des entiers positifs ou négatifs, Z_1 correspondant à un point de la courbe du n° 2, $Z'_1 i$ à un point de la courbe du n° 3. — On a identiquement, en posant $\operatorname{sn}\xi=t$,

$$I=\int_0^I d\xi=\int_0^I\frac{d\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi}=\int_0^{\operatorname{sn}I}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Les deux intégrales en t, l'une de 0 à $\lambda+\mu i$, l'autre de 0 à $\operatorname{sn}I$, sont égales quelque rapproché que l'on suppose $\lambda+\mu i$ de 0; autrement dit, l'intégrale de l'expression en t, le long d'un chemin convenable, de $\lambda+\mu i$ à $\operatorname{sn}I$ est nulle quelque rapproché que $\lambda+\mu i$ soit de 0. Cela suppose que l'on ait $\lambda+\mu i=\operatorname{sn}\xi$, dans le voisinage de zéro, puis partout, de proche en proche, comme il est aisé de le voir.