NOTE ÜBER DIE SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN DER ZWEI ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN GEMEINSAMEN WURZELN

(Auszug aus einem Briefe an den Herausgeber)

VON

LEOPOLD GEGENBAUER

in WIEN.

Unter den kleineren Arbeiten ABEL's befindet sich ein Aufsatz, der dadurch von besonderem Interesse ist, dass er, wenigstens für einen besonderen Fall, die Theorie des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen auf die Theorie der symmetrischen Functionen direct zurückführt. Es ist dies die im 17. Bande von GERGONNE's Annales de Mathématiques pures et appliquées erschienene Arbeit *Recherches de la quantité qui satisfait à deux équations algébriques données*, welche lange Zeit in Vergessenheit geraten war — wurde sie doch erst in die zweite Auflage von ABEL's Oeuvres complètes aufgenommen — und auch heute noch zu wenig beachtet zu werden scheint. Daselbst wird für eine rationale Function $\frac{F(x_1)}{G(x_1)}$ der den ganzen Functionen

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

und $g(x)$ gemeinsamen Wurzel x_1 unter der Voraussetzung, dass diese Functionen nur einfache Wurzeln besitzen und dass sie *nur* diese eine Wurzel gemein haben, der Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F(x_\lambda)}{G(x_\lambda)}\theta(x_\lambda)R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}}{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} \theta(x_\lambda)R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}}$$

aufgestellt, in welchem $\theta(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, welche für keine der Grössen x_λ unendlich und für x_1 nicht Null wird, $R_{g(x), h(x)}$ die Resultante der Gleichungen $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ und

$$f_k(x; (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_k}) = \frac{f(x)}{(x - x_{\lambda_1})(x - x_{\lambda_2}) \ldots (x - x_{\lambda_k})}$$

ist. Aus derselben folgt für den grössten gemeinsamen Theiler $x - x_1$ der beiden Functionen die Darstellung

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (x - x_\lambda)\, \theta(x_\lambda)\, R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)}}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \theta(x_\lambda) R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)}}.$$

Auf die Bedeutung dieser ABEL'schen Form des grössten gemeinsamen Theilers hat KRONECKER in seinen algebraischen Vorlesungen wiederholt hingewiesen und zugleich eine Ausdehnung derselben für den Fall gegeben, dass dieser Theiler von einem beliebigen Grade ist, wobei er allerdings die angegebene Beschränkung bezüglich der Wurzeln der beiden Functionen beibehielt. Für denselben stellte er den Ausdruck

$$\frac{\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} (x - x_{\lambda_1})(x - x_{\lambda_2}) \ldots (x - x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}$$

auf und für das Vorhandensein eines grössten gemeinsamen Theiles vom Grade r erhielt er als notwendige und hinreichende Bedingungen die Relationen

$$R_{g(x), f(x)} = 0, \qquad R^{(1)}_{g(x), f(x)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)} = 0, \quad \ldots,$$

$$R^{(r-1)}_{g(x), f(x)} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}} R_{g(x), f_{r-1}(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{r-1}})} = 0,$$

$$R^{(r)}_{g(x), f(x)} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})} = 0$$

wo die Summationen in der k-fachen Summe bezüglich der Grössen λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ über alle Combinationen k^{ter} Classe der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ohne Wiederholung auszudehnen sind.

Ich habe in meiner in der zweiten Abtheilung des 110. Bandes der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien enschienenen Mittheilung *Über die Abel'sche Darstellung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen* gezeigt, dass die KRONECKER'schen Bedingungen und seine Darstellung des Theilers unter gewissen Bedingungen auch noch beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln bestehen bleiben und weiters bewiesen, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine ganze Function $f(x)$ vom Grade n genau $r \leqq n$ unter einander verschiedene Wurzeln besitzt darin bestehen, dass die $(n - r + 1)^{\text{te}}$ von den symmetrischen Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $f(x)$

$$D_{f(x)} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k=0, 1, \ldots, n-1)}, \qquad D^{(1)}_{f(x)} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k=0, 1, 2, \ldots, n-2)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_{f_1(x; x_\lambda)},$$

$$D^{(2)}_{f(x)} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} D_{f_2(x: x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})} = \left| s_{i+k} \right|_{(i, k=0, 1, 2, \ldots, n-3)}, \quad \ldots$$

in denen $D_{h(x)}$ die Discriminante von $h(x)$, und s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen x_λ ist, die *erste* nicht verschwindende ist, und dass diese dann dies Produkt aus den Ordnungszahlen der unter einander verschiedenen Wurzeln von $f(x)$ und der Discriminante jener Gleichung (Stammgleichung) ist, der diese genügen. Für den grössten gemeinsamen Theiler von $f(x)$ und $f'(x)$ gab ich den Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} (x - x_{\lambda_1})(x - x_{\lambda_2}) \ldots (x - x_{\lambda_{n-r}}) \left| s_{i+k}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right|}{\left| s_{i+k} \right|} \qquad (i, k=0, 1, 2 \ldots, n-r)$$

an, in welchem mit $s_\tau^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})}$ die τ^{te} Potenzsumme der von $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{n-r}}$ verschiedenen r Wurzeln bezeichnet ist. In die Reihe der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist in den einzelnen Formeln jede Wurzel so oft aufzunehmen, als ihre Ordnungszahl angibt.

Der grösste gemeinsame Theiler von zwei ganzen Functionen ist eine *symmetrische* Function der den zwei Functionen gemeinsamen Wurzeln; die eben angeführten Resultate lassen sich auch, wie man aus meinen a. a. O. gegebenen Auseinandersetzungen ersieht, auf dem von mir eingeschlagenen Wege sofort dahin erweitern, dass sie die Darstellung irgend einer rationalen symmetrischen Function der r den Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$

gemeinsamen Wurzeln $x_1, x_2 \ldots, x_r$ liefern. Man erhält für eine solche Function $S(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ die Darstellung

$$\frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} S(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}$$

wo $S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})$ eine beliebige rationale symmetrische Function ist, welche für keines der in betracht kommenden Wertsysteme unendlich und für das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nicht Null wird.

Ist

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_r)},$$

wo $F(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ und $G(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ganze symmetrische Functionen sind und setzt man

$$S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) = G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}),$$

so erhält man die Beziehung

$$(1) \qquad S(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} F(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r} G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}},$$

Für eine symmetrische Function der den Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ gemeinsamen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, ergeben sich die Darstellungen

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} S(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) S_1(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}{\left| s_{i+k} \right|}, \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

$$(2) \qquad S(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} F(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho} G(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_\rho}) \left| s_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)} \right|}. \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

Um eine Anwendung dieser allgemeinen Formeln zu liefern, will ich zunächst die Bedingungen dafür ermitteln, dass die drei ganzen Functionen $f(x), g(x), h(x)$ einen grössten gemeinsamen Theiler vom Grade $s \leqq r$ besitzen, wenn die ersten zwei einen solchen vom Grade r besitzen.

Aus der Formel (1) ergiebt sich unmittelbar die Relation

$$R^{(\lambda)}_{h(x),\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r} R^{(\lambda)}_{h(x),\,(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})(x-x_{\lambda_r})} R_{g(x),\,f_r(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r} R_{g(x),\,f_r(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}$$

$$= \frac{R^{(\lambda)}_{h(x),\,g(x),\,f(x)}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r} R_{g(x),\,f_r(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}$$

und daher hat man den Satz:

Ist von den symmetrischen Functionen

$$R_{g(x),f(x)}\ ,\ R^{(1)}_{g(x),f(x)}\ ,\ R^{(2)}_{g(x),f(x)}\ ,\ \ldots$$

die $(r+1)^{\text{te}}$ und von den symmetrischen Functionen

$$R_{h(x),g(x),f(x)}\ ,\ R^{(1)}_{h(x),g(x),f(x)}\ ,\ R^{(2)}_{h(x),g(x),f(x)}\ ,\ \ldots$$

die $(s+1)^{\text{te}}$ die erste nicht verschwindende, so hat der grösste gemeinsame Theiler der drei ganzen Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ den Grad s, während die zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen solchen vom Grade $r \geqq s$ besitzen.

Als Anwendung der Formel (2) sollen die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen eine ganze Function $f(x)$ vom Grade nr unter einander verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_r$ besitzt, von denen $r-s$ $(s \leqq r)$ einfach sind.

Aus (2) folgt die Relation

$$D^{(\sigma)}_{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\rho)} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}} \left| s^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}}_{i_1+k_1} \right| \left| s^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}}_{i+k} \right|}{\left| s_{i+k} \right|}$$

$$(i,k=0,1,2,\ldots,r-1;\ i,k_1=0,1,2,\ldots,n-\rho-\sigma-1)$$

wo mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *alle* den Gleichungen $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ gemeinsamen Wurzeln bezeichnet sind, so dass sie also die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_r$, jede so oft geschrieben als ihre Ordnungszahl anzeigt, sind, und mit $s^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}}_{\tau}$ die τ^{te} Potenzsumme der Grössen $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{n-r}}$ bezeichnet ist.

Man hat daher den Satz:

Ist unter den symmetrischen Functionen der n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung $f(x)=0$

$$\left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-1)}\ ,\qquad \left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-2)}\ ,\qquad \left| s_{i+k} \right|_{(i,k=0,1,2,n-3)}\ ,\ \ldots$$

die $(n - r + 1)^{\text{te}}$ und unter den symmetrischen Functionen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\, i_1, k_1 = 0, 1, 2, \ldots, n-\rho-1)},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k = 0, 1, 3, \ldots, r-1;\, i_1, k_1 = 0, 1, 2, \ldots, n-\rho-2)},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \left| S_{i_1+k_1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} \right| \left| S_{i+k}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, k = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\, i_1, k_1 = 0, 1, 2, \ldots, n-\rho-3)},$$

. . . .

die $(s + 1)^{\text{te}}$ die erste nicht verschwindende, so besitzt $f(x)\, r$ unter einander verschiedene Wurzeln, von denen $r - s$ einfach sind.