SUR L'EMPLOI D'UN THÉORÈME D'ABEL DANS LA THÉORIE DE L'INTÉGRALE DE DIRICHLET

PAR

T. BRODÉN

À LUND.

1. Le théorème III du mémoire d'ABEL sur la série du binôme [1] permet des applications importantes à la théorie de l'intégrale de DIRICHLET. Dans les lignes suivantes, l'auteur se propose d'examiner de plus près ce fait, tout en se rapportant à un de ses travaux antérieurs. [2] Nous avons voulu ainsi contribuer un peu à éclaircir l'applicabilité très étendue des travaux mathématiques d'ABEL.

2. La question de l'admissibilité de l'équation de DIRICHLET

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(+0) \qquad (0 < a < \pi)$$

(où $f(x)$ signifie une fonction finie intégrable avec valeur déterminée de $f(+0)$) se laisse réduire à la même question pour la relation

$$\lim_{\omega=\infty} I = \lim_{\omega=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin\omega\pi x}{x}\,dx \qquad (0 < a < 1) \tag{1}$$

où $f(+0) = 0$. [3]

[1] Journal de Crelle, t. I, p. 314; Oeuvres complètes de N. H. ABEL, édition SYLOW-LIE, t. I, p. 222.

[2] *Über das Dirichlet'sche Integral,* Math. Annalen, t. 52, p. 177—227. Dans le suivant ce travail sera désigné par *D. I.*

[3] Voir *D. I.*, p. 178, 220—21.

Soit $\alpha(\omega)$ une fonction positive de ω pour laquelle $\lim\limits_{\omega=\infty} \alpha(\omega) = 0$. Alors l'intégrale

$$I_a = \int_0^{\alpha(\omega)} f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x} dx$$

tend vers la limite zéro, non seulement dans le cas où

(2) $$\lim \omega \,.\, \alpha = 0$$

mais encore aussitôt que

(3) $$\lim g(\alpha) \,.\, \log (\omega\alpha) = 0,$$

où $g(\alpha)$ signifie la limite supérieure de $|f(x)|$ dans l'intervalle $0 \ldots \alpha$ (et, par conséquent, si $\lim g \,.\, \omega \,.\, \alpha$ disparaît sans que cela arrive pour $\lim \omega \,.\, \alpha$); et la fonction $\alpha(\omega)$ se laisse toujours déterminer de manière à remplir la condition (3) quoique $\lim \omega \,.\, \alpha = \infty$.[1] Cela posé, nous choisissons une fonction α quelconque qui remplisse la condition (2) ou (3) et une quantité constante arbitraire ε entre 0 et 1, et puis nous considérons la valeur limite

(4) $$\lim_{\omega=\infty} \int_0^1 dx \,.\, \left| \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x + 2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x + 2i + 1} \right\} \right|,$$

où les nombres entiers k et m sont déterminés de la manière suivante:

$$\alpha(\omega) < \frac{2k}{\omega} \leqq \alpha(\omega) + \frac{2}{\omega}, \qquad \frac{2m}{\omega} < \varepsilon \leqq \frac{2m+2}{\omega},$$

et où l'on ne fait entrer en ligne de compte que les ω pour lesquels $m - 1$ sera $> k$, ce qui doit arriver toujours pour des ω suffisamment grands, à cause de la supposition $\lim \alpha = 0$. Alors il se laisse prouver d'abord que (4) sera indépendante du choix de la fonction α et de la quantité ε, et puis que $\lim I$ disparaîtra, si $f(x)$ est de nature à faire disparaître (4).[2]

---

[1] *D. I.* p. 179—80. — Une troisième condition suffisante, un peu plus compliquée, pour que $\lim I_a$ disparaisse se trouve mentionnée *D. I.* p. 183.

[2] *D. I.* p. 188.

Cette condition très étendue pour la validité de (1) — elle contient, en effet, comme cas spéciaux toutes ou presque toutes les conditions posées jusqu'ici [1] — peut en premier lieu se spécialiser dans le sens que la valeur numérique de la somme

$$(5) \qquad \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x + 2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x + 2i + 1} \right\}$$

pour une fonction $\alpha(\omega)$ de l'espèce mentionnée ci-dessus et sous la condition $0 < x < 1$ se rapproche uniformément, quand croît ω, de la valeur zéro,[2] ce qui a lieu dans ce cas indépendamment de ε.

Nous supposons maintenant que pour une certaine fonction $\alpha(\omega)$ [remplissant la condition (2) ou (3)] et une certaine valeur ε

$$(6) \qquad -G < \sum_{i=2k}^{p} (-1)^i f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{i}{\omega}\right) < G$$

(avec $0 < x < 1$, mais entre ces limites indépendamment de x) aussitôt que

$$2k \leqq p \leqq 2m - 1,$$

où G signifie une certaine quantité positive finie. Je dis que, dans ce cas, $\lim I = 0$.

Si l'on applique le théorème d'Abel mentionné ci-dessus aux sommes Σ figurant dans les inégalités (6), on reconnaît immédiatement que la valeur numérique de la somme (5) est moindre que

$$\frac{G}{x + 2k}.$$

Donc, si nous supposons d'abord que $\lim \omega \cdot \alpha = \infty$, et, par conséquent, $\lim k = \infty$, un rapprochement uniforme de la somme (5) vers la valeur zéro a lieu, et, selon ce que nous venons de constater, $\lim I = 0$. Si, au contraire, $\lim \omega \cdot \alpha$ est fini ($\geqq 0$), nous prenons une fonction $\alpha_1(\omega)$ pour laquelle $\lim \omega \cdot \alpha_1 = \infty$ (ce qui est possible, voir ci-dessus). Pour les ω

---

[1] Cfr. *D. I.* p. 185—86, 191—92.

[2] ou, plus généralement, d'une fonction $\theta(x)$ de la nature caractérisée en *D. I.* p. 192—93 (»Satz 4» et »Satz 5»).

suffisamment grands sera alors $\alpha_1(\omega) > \alpha(\omega)$, et $k_1 > k$, où k_1 a la même relation à α_1, que k à α. On a donc

$$\sum_{i=2k_1}^{p} F_i = \sum_{i=2k}^{p} F_i - \sum_{i=2k}^{2k_1-1} F_i,$$

où, pour le moment, F_i signifie l'expression sous le signe Σ dans (6); partant, en tout cas,

$$-2G < \sum_{i=2k_1}^{p} F_i < 2G.$$

Comme $\lim \omega \,.\, \alpha_1 = \infty$, il s'ensuit maintenant, tout comme ci-dessus, que $\lim I = 0$. — On doit remarquer que la condition ainsi obtenue, pour que $\lim I = 0$, n'est pas indépendante ni de α ni de ε: si $\alpha_1(\omega) < \alpha_2(\omega)$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ elle peut être remplie pour $\alpha = \alpha_2$, mais non pour $\alpha = \alpha_1$, et pour $\varepsilon = \varepsilon_1$, non pour $\varepsilon = \varepsilon_2$.

De cette proposition on obtient très aisément comme cas spécial la condition de Dirichlet bien connue.[1]

De l'autre côté on peut donner à la proposition démontrée une intéressante interprétation géometrique.[2]

3. Dans le domaine dont il est question, le théorème d'Abel est important aussi sous un autre point de vue. Une conséquence de ce théorème est, comme on sait, le théorème du calcul intégral indiqué par Weierstrass et publié par Du Bois-Reymond (Journal de Crelle t. 69, p. 78; voir aussi Dini, Fondamenti etc. § 204) que l'on désigne souvent par »zweiter Mittelwerthsatz». Et à l'aide de ce théorème, on obtient aisément, si la fonction $f(x)$ est donnée sous la forme d'un produit,

$$f(x) = F(x) \,.\, \varphi(x),$$

certaines conditions pour la validité de l'équation de Dirichlet relatives aux deux facteurs F et φ. A cet égard nous renvoyons le lecteur à *D. I.* p. 216—18 et au livre de M. Dini, Serie di Fourier etc. (Pisa 1880).

---

[1] Voir *D. I.* p. 196.

[2] *D. I.* p. 218—20. — Toute cette suite d'idées se trouve d'ailleurs dans certains rapports à l'article de Kronecker *Über das Dirichlet'sche Integral* (»Sitzungsberichte» de l'académie de Berlin 1885); voir *D. I.* p. 181, 191 etc.