SUR UNE SÉRIE D'ABEL

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNE.

1. Dans le mémoire posthume d'ABEL: »Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes»,[1] on trouve, à la page 73, une formule très remarquable; c'est la suivante:

$$\text{(a)}\qquad \varphi(x+\alpha)=\varphi(x)+\alpha\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx}+\frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{1.2}\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2}+\dots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}}{1.2.3\dots n}\frac{d\varphi^n(x+n\beta)}{dx^n}+\dots.$$

Ce développement est obtenu par l'Auteur en appliquant la méthode des fonctions génératrices ou, comme on dit à présent, la transformation de LAPLACE au développement donné par LEGENDRE:[2]

$$\text{(b)}\qquad e^{\alpha v}=1+\alpha ve^{\beta v}+\frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{1.2}v^2e^{2\beta v}+\frac{\alpha(\alpha-2\beta)^2}{1.2.3}v^3e^{3\beta v}+\dots.$$

La formule (a) semble avoir appelé l'attention d'ABEL d'une façon particulière; un autre de ses travaux[3] renferme, en effet, la démonstration de la formule pour le cas où $\varphi(x)=x^n$, d'où résulte immédiatement la même formule pour tout polynôme entier. Dans ce cas, il n'y a rien à remarquer sur notre formule; mais dans des cas plus généraux, elle peut parfaitement

[1] Mém. XI du t. II de l'édition de SYLOW et LIE, p. 67.

[2] *Exercices de calcul intégral,* t. 2, p. 234. On obtient sans peine cette série comme application de la série de LAGRANGE.

[3] Mém. X du t. I de l'édition citée, p. 102.

ne pas être exacte, car le second membre, même s'il est convergent, peut ne pas avoir pour somme le premier membre. C'est là une conséquence de l'application pure et simple de la transformation de LAPLACE, qui échappait naturellement au temps d'ABEL, étant données les connaissances qu'on avait alors sur la théorie des fonctions. En particulier, comme on l'a remarqué depuis longtemps, l'application faite par ABEL de la formule à la fonction $\log x$ est inexacte.

HALPHEN a repris l'étude de la série d'ABEL dans un intéressant mémoire [1] où il donne les conditions sous lesquelles la formule (a) est exacte. La méthode tenue par HALPHEN pour établir cette formule diffère complètement de celle d'ABEL; il s'attache, en effet, à l'étude du système de polynômes

$$P_n(\alpha) = \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1} \tag{c}$$

et cherche les conditions de convergence d'une série ordonnée suivant ces polynômes et les propriétés des fonctions représentées par de semblables séries. Un autre auteur, M. PARETO,[2] a repris la question par la méthode d'ABEL, c'est à dire en partant de la transformation de LAPLACE, mais en précisant les conditions d'application de cette transformation selon des idées plus modernes sur la théorie des fonctions: de cette façon il retrouve, pour la validité de la formule (a), les conditions données par HALPHEN.

2. Le présent travail se propose de reprendre l'étude de la série d'ABEL à un autre point de vue. Au lieu de considérer comme éléments principaux de ce développement les polynômes (c), ainsi que l'a fait HALPHEN, je donne le plus d'importance, en chaque terme de la série, au facteur

$$\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n}, \tag{d}$$

où je considère $\varphi(x)$ comme une fonction analytique arbitrairement variable dans une certaine classe, ou, comme je dis aussi, dans un certain *champ fonctionnel*. Je regarde ce facteur comme le résultat de l'opération

---

[1] *Sur une série d'Abel.* Bulletin de la Soc. Math. de France, T. X, p. 67, 1882.

[2] *Sur les fonctions génératrices d'Abel.* Crelle, t. 110, p. 290, 1892.

V^n, appliquée à la fonction $\varphi(x)$, où $V(\varphi)$ est l'opération $\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx}$; je donne quelques propriétés et des conditions de convergence des opérations représentées par des séries de puissances de V à coefficients quelconques; enfin je passe au cas particulier d'une de ces opérations qui, dans une partie de son champ fonctionnel de convergence, représente $\varphi(x+\alpha)$ et j'obtiens ainsi la série d'ABEL comme spécialisation des opérations susdites.

3. Soit un système de constantes

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_n\,,\ \ldots$$

tel que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

ait un rayon ρ de convergence fini ou infini, mais non nul. Nous allons nous occuper de l'opération représentée par la série

$$A(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n V^n(\varphi). \tag{2}$$

L'ensemble des branches de fonctions analytiques monogènes qui, substituées à $\varphi(x)$ dans cette série, la rendent uniformément convergente dans une aire du plan x, constitue ce que j'appelle le *champ de convergence* de la série. Pour toute fonction appartenant à ce champ, l'opération (2) donne comme résultat une branche de fonction analytique. En outre, cette opération jouit évidemment de la propriété d'être *distributive*, et d'être *permutable* avec l'opération de dérivation.

Il est facile de montrer qu'il existe deux classes distinctes de branches de fonctions, n'ayant pas d'éléments communs, et appartenant l'une et l'autre au champ de convergence de la série (2).

a) J'indique par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions entières

$$\varphi(x)=\sum \frac{k_n}{\lfloor n}\, x^n \tag{3}$$

dont les séries associées[1] $\sum k_n x^n$ ont un rayon de convergence non nul.

---

[1] Au sens de M. BOREL. V. p. ex. Acta math., t. 21, p. 243.

Je considère une fonction (3), et soit r le rayon de convergence de sa série associée; si r_1 est un nombre positif moindre que r, il existe un nombre positif μ tel que

$$|k_n| < \frac{\mu}{r_1^n}, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

et on en conclut immédiatement que si $b = |\beta|$, $|x| = t$, on a

$$\left| \frac{d^n \varphi(x+n\beta)}{dx^n} \right| < \frac{\mu}{r_1^n} e^{\frac{t+nb}{r_1}};$$

par suite, il suffit de la condition

$$e^{\frac{b}{r}} < r\rho \tag{4}$$

pour que la fonction $\varphi(x)$ appartienne au champ de convergence de la série (2). La valeur de x ne figure pas dans cette condition, en sorte que $A(\varphi)$ est une fonction entière. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

I. *Etant donnés* $b = |\beta|$ *et* ρ, *l'équation* $e^{\frac{b}{r}} = r\rho$ *donne pour* r *une racine positive unique* $\bar{r}$. *Les fonctions de l'ensemble* $\mathfrak{M}$ *pour lesquelles on a* $r < \bar{r}$ *constituent un ensemble linéaire* $\mathfrak{M}_1$ *qui appartient tout entier au champ de convergence de* $A(\varphi)$.

En particulier, si $\rho = \infty$, tout l'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient à ce champ de convergence, quel que soit β.

b) J'indique maintenant par $\mathfrak{N}$ l'ensemble des branches de fonctions analytiques régulières dans un domaine de $x = \infty$, et représentées par conséquent par des séries de puissances entières négatives de x. Soit $\varphi(x)$ un élément de cet ensemble:

$$\varphi(x) = \frac{k_0}{x} + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{x^3} + \cdots;$$

soit r le rayon du cercle à l'extérieur duquel la série converge; si r_1 est un nombre positif plus grand que r, il existe un nombre positif μ tel que, pour toute valeur de n, on a

$$|k_n| < \mu r_1^n.$$

Soit maintenant m un nombre entier tel que $m\beta$ soit extérieur au cercle de rayon r; il en sera de même de $n\beta$ pour $n > m$; et si l'on prend un nombre positif t tel que l'on ait

$$t < mb - r,$$

où $b = |\beta|$, pour tout x tel que

$$t < |x| < mb - r \tag{5}$$

et pour $n \geqq m$, les inégalités

$$|x + n\beta| > mb - |x| > r$$

se trouvent vérifiées.

Les séries

$$\frac{d^n\varphi(x + n\beta)}{dx^n} = (-1)^n \frac{\underline{|n}}{(x + n\beta)^n}\left(\frac{k_0}{x + n\beta} + (n + 1)\frac{k_1}{(x + n\beta)^2} + \ldots\right) \tag{6}$$

sont donc convergentes pour toutes les valeurs de x sus indiquées; en substituant aux valeurs absolues des termes de la série (5) les nombres positifs respectivement supérieurs

$$\frac{\mu r_1^n}{(nb - |x|)^n},$$

on trouve sans peine que l'expression asymptotique en n des fonctions (6) n'est pas supérieure à

$$\frac{g_n}{(eb)^n \sqrt{n}},$$

où e est la base de logarithmes, et où g_n tend, pour $n = \infty$, à une valeur finie.

Cela posé, reprenons la série $A(\varphi)$ dont nous négligerons les m premiers termes dont la présence n'a actuellement aucune importance. En indiquant encore par ρ le rayon de convergence de la série (1), les remarques précédentes permettent de conclure immédiatement que

II. *La série, où φ est un élément quelconque de l'ensemble $\mathfrak{M}$*

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n V^n(\varphi)$$

est convergente uniformément pour toutes les valeurs de x données par (5), *pourvu que l'on ait*

$$\rho > \frac{1}{eb}.$$

III. *Il en est de même pour*

$$\rho = \frac{1}{eb}$$

si l'on ajoute la condition que la série

$$\sum \frac{|a_n|}{\sqrt{n}}$$

soit convergente.

Dans les deux cas, tout l'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient donc au champ de convergence de $A(\varphi)$.

IV. *Si la série $\varphi(x)$ est convergente dans tout le plan excepté $x = 0$, sous les conditions des théorèmes II et III la convergence uniforme de la série $A(\varphi)$ s'étend à toutes les valeurs de x, en excluant du plan de la variable les points $-n\beta$ par des aires renfermant chacune un de ces points et aussi petites qu'on voudra.*

4. L'opération V étant permutable avec la dérivation et ayant la même *racine* que celle-ci, c'est à dire la constante, toute opération permutable avec la dérivation et n'admettant pas cette racine pourra, par les principes généraux de la théorie des opérations distributives,[1] s'exprimer par un développement en série de puissances de V à coefficients constants, c'est à dire de la forme (2). Ce développement sera certainement valable pour un ensemble de fonctions, plus ou moins restreint, mais auquel appartiennent les éléments $1, x, x^2, \ldots$. En outre, les coefficients du développement s'obtiennent par la méthode des coefficients indéterminés, en y faisant successivement $\varphi = 1, x, x^2, \ldots$; chacun de ces éléments x^n étant racine de V^n et non des puissances précédentes de V.

[1] V. mon ouvrage *Le operazioni distributive ecc,* in collaborazione on U. AMALDI, p. 45. Bologna, Zanichelli, 1901.

Appliquons cette méthode à la recherche du développement en série de puissances de V de l'opération que j'indique par θ^α, et qui consiste à remplacer, dans une fonction donnée, x par $x+\alpha$. On aura

$$\theta^\alpha(\varphi) = c_0\varphi + c_1 V(\varphi) + c_2 V^2(\varphi) + \ldots;$$

et en faisant ici la fonction φ successivement égale à $1, x, x^2, \ldots$, on obtient immédiatement

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = \alpha, \qquad c_2 = \frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{1.2}, \qquad c_3 = \frac{\alpha(\alpha - 3\beta)^2}{1.2.3}$$

En supposant alors démontrée la formule

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}}{\underline{|n}}$$

jusqu'à une certaine valeur de n, on l'étend à la valeur suivante $n+1$ en s'appuyant sur la formule d'analyse combinatoire

$$m^{m-k}(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1) - m(m-1)^{m-k}(m-2)(m-3)\ldots(m-k)$$
$$+\binom{m}{2}(m-2)^{m-k}(m-3)(m-4)\ldots(m-k-1) - \ldots$$
$$+(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^{m-k}(k-1)(k-2)\ldots 2.1 = 0$$

dont la démonstration n'offre pas de difficultés.

Nous avons ainsi obtenu la série d'Abel, dont les coefficients, c'est à dire les polynômes (c), se sont présentés de la façon la plus naturelle. La méthode suivie enseigne que la formule sera valable, c'est à dire que le second membre sera une série convergente dont la somme sera égale au premier membre, pour un certain ensemble fonctionnel renfermant les fonctions $1, x, x^2, \ldots$. Quant à l'extension de cet ensemble, c'est le théorème I (§ 3) qui va nous permettre de l'évaluer: il s'agit seulement de trouver la valeur de ρ.

Or, l'expression asymptotique des coefficients (c) s'obtient sans difficulté; elle est donnée par

$$(7) \qquad (eb)^n e^{-\frac{a}{b}} n^{-\frac{3}{2}};$$

on déduit de là que

$$\rho = \frac{1}{eb},$$

et par suite, en appliquant le théorème I, on obtient le résultat suivant:

IV. *Si $\bar{r}$ est la racine positive de l'équation*

$$\frac{b}{\bar{r}} e^{\bar{r}+1} = 1,$$

toutes les fonctions de l'ensemble $\mathfrak{M}$ pour lesquelles on a $r < \bar{r}$ appartiennent au champ de validité de la formule d'Abel.[1]

5. Si l'on indique par $A(\varphi)$ la série d'Abel, c'est à dire le second membre de la formule (a), les coefficients de la série $A(\varphi)$ donnent, comme on l'a vu, $\rho = \frac{1}{eb}$; les conditions exigées par le théorème III sont en outre vérifiées, comme le montre l'expression asymptotique (7) des coefficients. On en conclut:

V. *L'ensemble $\mathfrak{M}$ appartient tout entier au champ de convergence de la série $A(\varphi)$.*

Cependant, pour les fonctions de cet ensemble, la série $A(\varphi)$ ne représente pas $\varphi(x+\alpha)$, c'est à dire la formule (a) n'est pas valable: l'exemple de $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, déjà considéré par Halphen, suffit à le prouver. Il n'y a pas là de contradiction, puisque $1, x, x^2, \ldots$ n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathfrak{M}$.

6. Bien que la série $A(\varphi)$, appliquée à une fonction de $\mathfrak{M}$, ne donne pas comme résultat $\varphi(x+\alpha)$, cette série nous donne une fonction $\psi(x, \alpha)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial\psi(x, \alpha+\beta)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x+\beta, \alpha)}{\partial\alpha} \tag{8}$$

propriété qui est vérifiée, en particulier, par les fonctions de $x+\alpha$. En

[1] C'est là la condition obtenue par Halphen, loc. cit., p. 78, et par Pareto, loc. cit., p. 307.

particulier, si $\varphi(x)$ est une fonction entière de $\frac{1}{x}$, la fonction $\psi(x, \alpha)$ est une fonction uniforme de x et de α, entière en α, ayant par rapport à x les points singuliers $-n\beta$, et qui vérifie l'équation (8).

D'autres séries de puissances de V, en outre de la série d'ABEL, donnent naissance à des fonctions qui vérifient l'équation (8). Ce sont les séries

$$\sum \frac{p_n(\alpha)}{\underline{|n}} V^n$$

où les coefficients $p_n(\alpha)$ satisfont à l'équation aux différences mêlées

$$\frac{dp_n(\alpha)}{d\alpha} = np_{n-1}(\alpha - \beta). \tag{9}$$

La solution la plus générale de cette équation est donnée par

$$p_n(\alpha) = c_0 P_n + nc_1 P_{n-1} + \binom{n}{2} c_2 P_{n-2} + \ldots + nc_{n-1} P_1 + c_n,$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes arbitraires et P_n sont les polynômes

$$P_n = \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}$$

qui figurent dans la formule d'ABEL.