EINE AUF UNENDLICHE PRODUKTE SICH BEZIEHENDE FEHLERABSCHÄTZUNGSREGEL

VON

W. FR. MEYER
in KÖNIGSBERG i/P.

(Auszug eines Briefes an den Herausgeber.)

Ich gestatte mir, Ihnen eine allgemeinere, sich auf unendliche Produkte beziehende Fehlerabschätzungsregel mitzuteilen.

Ich schicke einen einfachen Hülfssatz über natürliche Logarithmen voraus. Sei g eine reelle positive Grösse, und es sei bekannt, dass $|lg|$ unterhalb der positiven Grösse γ liege, so soll der Unterschied zwischen g und 1 nach einer für positive und negative Werte von $g-1$ gemeinsamen Regel abgeschätzt werden.

Ist erstens $g > 1$, so hat man nach Voraussetzung:

$$(1) \qquad lg < \gamma, \qquad g < e^{\gamma},$$

also:

$$(2) \qquad g - 1 < e^{\gamma} - 1,$$

oder, wenn man e^{γ} in die Exponentialreihe entwickelt und hinter dem zweiten Gliede abbricht — so dass $\gamma < 2$ vorauszusetzen ist —

$$(3) \qquad g - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Ist zweitens $g < 1$, so wird nach Voraussetzung:

$$(1') \qquad |lg| = l\frac{1}{g} < \gamma, \qquad \frac{1}{g} < e^{\gamma}, \qquad \frac{1}{g} - 1 < e^{\gamma} - 1, \qquad 1 - g < g(e^{\gamma} - 1),$$

also, da $g < 1$, a fortiori:

$$(2') \qquad 1 - g < e^{\gamma} - 1,$$

und, um so mehr, wie oben:

$$(3') \qquad 1 - g < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Demnach liefert die Zusammenfassung von (2), (2'); (3), (3') den fraglichen Hülfssatz:

»*Ist g reell und positiv, $|lg| < \gamma$, $0 < \gamma < 2$, so ist, gleichgültig ob $g \gtrless 1$:*

$$(\mathrm{I}) \qquad |g - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Sei jetzt ein unendliches konvergentes Produkt vorgelegt:

$$(4) \qquad \Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)\ldots(1 + v_\nu)\ldots(1 + v_{\nu+p-1})\ldots,$$

wo die v beliebig positiv und negativ seien; $|v_n|$ sei mit u_n bezeichnet, und von $n \geqq \nu$ an sei $u_n < 1$.

Man betrachte zuvörderst den einfacheren Fall, wo Π *absolut* (und damit unbedingt) konvergiert, wo also die Reihe der u konvergiert.

Es soll der »*Fehler*» des Produktes Π abgeschätzt werden, wenn man hinter dem ν^{ten} Faktor $1 + v_{\nu-1}$ abbricht, d. i. die Differenz $P_{\nu,p} - 1$, wo $P_{\nu,p}$ das *Restprodukt* bedeutet:

$$(5) \qquad P_{\nu,p} = (1 + v_\nu)(1 + v_{\nu+1})\ldots(1 + v_{\nu+p-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatze wird:

$$l(1 + v_n) = \frac{v_n}{1 + \vartheta_n v_n} \qquad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Ist v_n positiv, so hat man $l(1 + v_n) < v_n (= u_n)$. Ist v_n negativ $= -u_n$, so hat man $|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n}$. Mithin ist in beiden Fällen:

$$(6) \qquad |l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n} \qquad (n \geqq \nu),$$

oder, da mit Rücksicht auf $\lim u_n = 0$ alle u_n $(n \geqq \nu)$ unterhalb einer gewissen Grenze u liegen:

$$|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u}, \tag{7}$$

folglich:

$$|lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u}(u_\nu + u_{\nu+1} + \ldots + u_{\nu+p-1}). \tag{8}$$

Die Klammer rechterhand ist der Rest $R_{\nu,p}$ der u-Reihe; da die Reihe der u konvergiert, so bleibt auch $R_{\nu,p}$ unter einer gewissen, von p unabhängigen Grenze R_ν (die mit wachsendem ν gegen Null konvergiert). Damit geht (8) über in:

$$|lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u} R_\nu. \tag{9}$$

Wendet man hierauf den Hülfssatz (I) *an, so hat man für die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$|P_{\nu,p} - 1| < e^{\frac{1}{1-u}R_\nu} - 1 < \frac{\frac{1}{1 - u} R_\nu}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - u} R_\nu}. \tag{II^a}$$

Nunmehr gehe man zu dem Falle über, wo das Produkt Π (gegen einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert) *bedingt konvergiert*, wo also auch die Reihe der v nur bedingt, und zugleich die Reihe der v^2 konvergiert. Der einmal erweiterte Mittelwertsatz liefert:

$$l(1 + v_n) = v_n - \frac{v_n^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1),$$

somit:

$$lP_{\nu,p} = R_{\nu,p} - \frac{1}{2} \sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} \frac{v_n^2}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1), \tag{10}$$

wo

$$R_{\nu,p} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_{\nu+p-1}$$

der Rest der v-Reihe bedeutet.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} R_{n,p} = 0$ lässt sich bei gegebenem $n = \nu$ eine feste obere (positive) Grenze ρ_ν angeben, sodass $|R_{\nu,p}|$ für jedes p unterhalb ρ_ν bleibt.

Mit Rücksicht auf $\lim v_n = 0$ bleibt wiederum von $|v_\nu| = u_\nu$ ab $u_n < u$. Damit geht aus (10) die Ungleichung hervor:

$$(11) \qquad |lP_{\nu,p}| < \rho_\nu + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-u)^2} \sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2.$$

Da aber Σv^2 konvergiert, so bleibt auch $\sum\limits_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2$ bei gegebenem ν und beliebigem p unterhalb einer festen oberen Grenze V_ν. *Mit Rücksicht auf* (I) *liefert demnach* (11) *die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$(\mathrm{II^b}) \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\rho_\nu + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-u)^2} V_\nu} - 1 < \frac{\rho_\nu + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-u)^2} V_\nu}{1 - \frac{1}{2}\rho_\nu - \frac{1}{4} \frac{1}{(1-u)^2} V_\nu}.$$

Auf Grund der Formeln (II^a), (II^b) ist die Fehlerabschätzung für unendliche konvergente Produkte erledigt.

Die in meinem letzten Schreiben mitgeteilten Fehlerabschätzungsregeln für unendliche Produkte lassen sich auf das komplexe Gebiet übertragen. Was zuvörderst den Hülfssatz (I) für den natürlichen Logarithmus angeht, so sei jetzt P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, und

$$|lP| < \gamma \qquad (\gamma \text{ reell, } > 0).$$

Dann wird:

$$e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}},$$

$$e^{|lP|} - 1 = |lP| + \frac{1}{2}|lP|^2 + \dots,$$

$$P - 1 = e^{lP} - 1 = lP + \frac{1}{2}(lP)^2 + \dots,$$

somit:

$$|P - 1| \leqq e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1.$$

Der auf komplexe Grössen ausgedehnte Hülfssatz (I) lautet demnach:

»Bedeutet P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, so folgt aus der Voraussetzung $|lP| < \gamma$, dass:

$$
|P - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.\text{«} \tag{I'}
$$

Es sei jetzt das unendliche Produkt Π vorgelegt:

$$
\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1) \ldots (1 + v_\nu) \ldots (1 + v_{\nu+p-1}) \ldots, \tag{1}
$$

wo die v_i komplexe Grössen seien, deren absolute Beträge $u_i < 1$ vorausgesetzt werden.

Es werde gleich der allgemeine Fall in Betracht gezogen (cf. A. Pringsheim, Math. Annalen, XXII, (1883), p. 480) dass die Reihen der v, $v^2, \ldots, v^{n-1}$ $(n \geqq 1)$ *bedingt* konvergieren, dagegen die Reihe der v^n *unbedingt*.

Bedient man sich also der Bezeichnungen:

$$
\left\{
\begin{aligned}
R_{\nu,p}^{(k)} &= v_\nu^k + v_{\nu+1}^k + \ldots + v_{\nu+p-1}^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\\
R_{\nu,p} &= u_\nu^n + u_{\nu+1}^n + \ldots + u_{\nu+p-1}^n,
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

so wird ν so gross vorausgesetzt, dass die absoluten Werte der $R_{\nu,p}^{(k)}$ nebst $R_{\nu,p}$ bereits unter gewisse Grenzen $\rho_\nu^{(k)}$, V_ν heruntergedrückt seien, die mit wachsendem ν beliebig klein werden:

$$
|R_{\nu,p}^{(k)}| < \rho_\nu^{(k)}, \qquad R_{\nu,p} < V_\nu. \tag{3}
$$

Von u_ν an seien alle $u_i \leqq u$, wo auch u mit wachsendem ν beliebig klein wird.

Dann gilt:

$$
l(1 + v_i) = v_i - \frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{v_i^{n-1}}{n-1} + S_i^{(n)}, \tag{4}
$$

und damit für das Restprodukt $P_{\nu,p}$:

$$
\begin{aligned}
lP_{\nu,p} = \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} l(1 + v_i) = R_{\nu,p}^{(1)} - \frac{1}{2} R_{\nu,p}^{(2)} + \frac{1}{3} R_{\nu,p}^{(3)} - \ldots \\
+ (-1)^n \frac{R_{\nu,p}^{(n-1)}}{n} + \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S_i^{(\nu)}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Nach dem CAUCHY'schen Konvergenzkriterium für die logarithmische Reihe ist aber:

(6) $$\left|\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S_i^{(\nu)}\right| < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u_i} < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u},$$

somit folgt für den absoluten Wert von $lP_{\nu,p}$ gemäss (3):

(7) $$|lP_{\nu,p}| < \rho_\nu^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_\nu^{(2)} + \frac{1}{3}\rho_\nu^{(3)} + \ldots + \frac{1}{n-1}\rho_\nu^{(n-1)} + \frac{1}{n}\frac{V_\nu}{1-u}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichung mit γ, (die für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat) so entsteht auf Grund von (I') *die gewünschte Fehlerabschätzungsregel:* [1]

(II) $$|P_{\nu,p} - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1-\frac{\gamma}{2}}.$$

Für $n = 1$ tritt der einfachste Fall ein, dass das Produkt Π unbedingt konvergiert.

---

[1] Im Falle reeller v, $n = 2$, ist die Regel noch etwas schärfer, als die im ersten Schreiben angegebene, da $\frac{1}{1-u} < \frac{1}{(1-u)^2}$.