ÜBER EINEN SATZ VON HERRN PHRAGMÉN

VON

EDMUND LANDAU

in BERLIN.

Herr PHRAGMÉN hat in seiner Arbeit[1] *Sur un théorème de Dirichlet* einen Satz bewiesen, welchem folgende Voraussetzungen zu Grunde liegen:

Es sei

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

eine Folge verschiedener positiver, der Grösse nach geordneter Constanten, welche mit n über alle Grenzen wachsen; ferner sei

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

eine Folge beliebiger reeller Grössen, und es werde eine Function $f(t)$ durch die Gleichung

$$f(t) = \Sigma c_n$$

definiert, wo die Summation sich auf alle Werte von n bezieht, für welche $l_n \leqq t$ ist. Von dieser Function wird angenommen, dass sie sich auf die Form

$$f(t) = ct + t^\gamma \phi(t) \quad (0 < \gamma < 1)$$

bringen lässt, wo c und γ Constanten sind und $\phi(t)$ eine für alle t innerhalb endlicher Schranken gelegene Function von t bezeichnet.[2]

---

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 49, 1892, S. 199—206.

[2] Mit einer häufig angewendeten Abkürzung lässt sich die obige Annahme schreiben

$$f(t) = ct + O(t^\gamma).$$

Dirichlet[1] hatte unter diesen Voraussetzungen, zu denen er die weitere hinzunahm, dass alle c_n positive ganze Zahlen sind, bewiesen:

Die unendliche Reihe

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

convergiert für $\rho > 0$, und, wenn ρ zu 0 abnimmt, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{\rho=0} \rho\varphi(\rho)$$

und ist $= c$.

Herr Phragmén hat in der erwähnten Arbeit aus den obigen Voraussetzungen (wobei die c_n beliebig sind) mehr erschlossen. Er hat bewiesen:

Die Differenz

$$\varphi(\rho) - \frac{c}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

lässt sich in eine mindestens für $0 < \rho < \frac{1}{2}(1-\gamma)$ convergente Potenzreihe

(1) $$a_0 + a_1\rho + \ldots + a_m\rho^m + \ldots$$

entwickeln.

Er hat dadurch gezeigt, dass die in der Halbebene $R(\rho) > 0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

definierte analytische Function $\varphi(\rho)$ über ein Stück der Geraden $R(\rho)=0$ fortsetzbar ist. Sein Satz besagt nämlich, dass die Function sich im Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\frac{1}{2}(1-\gamma)$ regulär verhält, abgesehen vom Punkte $\rho = 0$, welcher für $c \lesseqgtr 0$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum c ist.

[1] *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 19, 1839, S. 326—328; Werke, Bd. 1, 1889, S. 415—417.

Ich behaupte nun, dass der Convergenzradius der Potenzreihe (1) nicht nur $\geqq \frac{1}{2}(1-\gamma)$ ist, wie der Phragmén'sche Satz aussagt, sonders stets mindestens doppelt so gross, also $\geqq 1-\gamma$.[1] Dies ist in dem allgemeineren Satze[2] enthalten:

Die Function $\varphi(\rho)$ ist über die Gerade $R(\rho)=0$ fortsetzbar und verhält sich in der Halbebene $R(\rho)>\gamma-1$ regulär, abgesehen für $c \gtrless 0$ vom Punkte $\rho=0$.

Dieser Satz wird im Folgenden bewiesen werden.

§ 1.

Nach Voraussetzung giebt es eine Constante C, so dass in

$$f(t)=\sum_{l_n \leqq t} c_n = ct + t^\gamma \psi(t) \tag{2}$$

für alle t

$$|\psi(t)| < C \tag{3}$$

ist.

---

[1] Dieser Werth $1-\gamma$ lässt sich nicht mehr vergrössern, wie das einfache Beispiel $l_n=n$, $c_n = 1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}$ $(0<\gamma<1)$ zeigt. Hier ist

$$f(t)=\sum_{n=1}^{t}\left(1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}\right)=t+O(t^\gamma);$$

andererseits ist der Convergenzradius der Potenzreihe (1) genau $1-\gamma$, da $\rho=\gamma-1$ eine singuläre Stelle der für $R(\rho)>0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}}{n^{1+\rho}}$$

definierten Function $\varphi(\rho)=\zeta(1+\rho)+\zeta(2-\gamma+\rho)$ ist, also auch von $\varphi(\rho)-\frac{1}{\rho}$.

[2] In dem Spezialfalle $l_n=n$ habe ich diesen Satz schon auf S. 77—79 der Arbeit bewiesen: *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903.

Daraus lässt sich im Falle $c \gtrless 0$ folgern: für jedes positive ε ist von einer gewissen Stelle $\nu = \nu(\varepsilon)$ an (also für alle $n \geqq \nu$) die Ungleichheitsbedingung

$$l_n \leqq l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon} \tag{4}$$

erfüllt.

In der That ist

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) = c(t + t^{\gamma+\varepsilon}) + (t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - ct - t^\gamma \psi(t)$$
$$= ct^{\gamma+\varepsilon} + (t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - t^\gamma \psi(t),$$

also

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) > ct^{\gamma+\varepsilon} - C(t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma - Ct^\gamma, \tag{5}$$

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) < ct^{\gamma+\varepsilon} + C(t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma + Ct^\gamma. \tag{6}$$

Die rechte Seite von (5) bezw. (6) ist im Falle $c > 0$ bezw. $c < 0$ für alle hinreichend grossen t positiv bezw. negativ, also nicht Null; daher muss zwischen t (excl.) und $t + t^{\gamma+\varepsilon}$ (incl.) mindestens ein l liegen. Wird $t = l_{n-1}$ genommen, so zeigt dies, dass wirklich von einer gewissen Stelle an das auf l_{n-1} folgende nächste l, d. h. l_n, höchstens gleich $l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}$ ist.

Diese Thatsache wird in § 4 angewendet werden.

§ 2.

Es ergiebt sich aus (2), wenn unter l_0 und $\psi(l_0)$ Null verstanden wird,

$$c_n = f(l_n) - f(l_{n-1}) = cl_n + l_n^\gamma \psi(l_n) - cl_{n-1} - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1}),$$

also für $R(\rho) > 0$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cl_n - cl_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n^\gamma \psi(l_n) - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}},$$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^\gamma \psi(l_n) \left(\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}} \right). \tag{7}$$

§ 3.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass die zweite unendliche Reihe in (7) für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ gleichmässig convergiert. Da (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}} = (1 + \rho) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}}$$

ist, genügt es für diesen Zweck, die gleichmässige Convergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^\gamma \phi(l_n) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}} \tag{8}$$

in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ zu beweisen, wo ε eine beliebige positive Grösse bezeichnet.

Der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes von (8) ist nach (3) für jene ρ

$$\leqq C l_n^\gamma \left| \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}} \right| < C l_n^\gamma \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} < C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{u^\gamma du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} = C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon l_1^\varepsilon}$$

convergiert, ist die Reihe (8), wie behauptet, für $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ gleichmässig convergent. Ihr Produkt mit $1 + \rho$, d. h. das zweite Glied der rechten Seite von (7) stellt also eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function dar.

§ 4.

Für $c = 0$ ist hiermit der auf S. 197 ausgesprochene Satz schon bewiesen.

Für $c \gtrless 0$ reduziert sich die Aufgabe darauf, nachzuweisen, dass die für $R(\rho) > 0$ durch den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

definierte Function in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ regulär ist. Dies braucht natürlich nur für $c = 1$ bewiesen zu werden.

Es ist bei Integration auf geradlinigem Wege für $R(\rho) > 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}},$$

folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right) + \frac{1}{l_1^\rho} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}\right).$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite $\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right)$ und $\frac{1}{l_1^\rho}$ stellen ganze transcendente Functionen von ρ dar; es braucht also nur bewiesen zu werden, dass die unendliche Reihe auf der rechten Seite eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function definiert. Da sich durch partielle Integration

$$-(1 + \rho) \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}}\, du = \left[\frac{u - l_{n-1}}{u^{1+\rho}}\right]_{l_{n-1}}^{l_n} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

$$= \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

ergiebt, ist für jenen Nachweis hinreichend, die gleichmässige Convergenz der Reihe

$$(9) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}}\, du$$

für $R(\rho) > \gamma - 1 + 2\varepsilon$ festzustellen, wo ε eine beliebige positive Grösse ist.

Nach (4) ist von einer gewissen Stelle an

$$l_n - l_{n-1} \leqq l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon},$$

also

$$\left| \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}} du \right| < \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_n - l_{n-1}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du \leqq \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du < \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du$$

$$= \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}};$$

hieraus folgt die gleichmässige Convergenz der Reihe (9) für

$$R(\rho) > \gamma - 1 + 2\varepsilon$$

und damit der auf S. 197 ausgesprochene Satz.

Berlin, den 19ten October 1904.