LETTRE

A Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences.

PAR

I. RICHARD

à DIJON.

Dans son numéro du 30 mars 1905, la *Revue* signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles.

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement:

Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes:

Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

Donc: Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

«Soit p la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p+1$, si p n'est égal ni à huit, ni à neuf, et l'unité dans le cas contraire.» Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{\text{ième}}$ chiffre serait le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.»

Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est à dire par un nombre fini de mots; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

Telle est la contradiction.

Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne peut l'être que par un nombre infini de mots. *Il n'y a donc pas contradiction.*

On peut encore remarquer ceci: L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Ce second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre *N' différent de N*, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le $k^{\text{ième}}$ chiffre de N' n'est pas égal au $k^{\text{ième}}$ chiffre du $k^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E.