RECHERCHES SUR UN CAS REMARQUABLE D'ÉPREUVES DÉPENDANTES.

PAR

ANDRÉ MARKOFF

À S:T PETERSBOURG.

Le cas remarquable d'épreuves dépendantes, que nous allons étudier, a été indiqué par moi au nombre des exemples [1] de la possibilité d'étendre aux valeurs dépendantes la loi de grands nombres, démontrée par TCHEBYCHEF, si simplement et ingénieusement, pour les valeurs indépendantes dans son mémoire [2] »Des valeurs moyennes».

En employant la méthode de TCHEBYCHEF, j'ai considéré l'espérance mathématique (la valeur probable) du carré d'une certaine somme. Or en considérant aussi les espérances mathématiques des puissances de la même somme, je me suis persuadé, que dans le cas présent ont lieu aussi les formules limites, établies par TCHEBYCHEF pour les valeurs indépendantes dans le mémoire [3] »Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités». Par conséquent notre cas fournit un exemple, à mon avis le premier, des valeurs dépendantes, pour lesquelles, ainsi que pour les valeurs indépendantes, nous pouvons démontrer,[4] que l'intégrale de Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

[1] Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan. II série, T. XV, N. 4.

[2] Oeuvres de P. L. TCHEBYCHEF. T. I, p. 687—694.

[3] Acta mathematica. T. XIV, p. 305—315.

[4] Voir les travaux de TCHEBYCHEF, mentionnés dans le mémoire cité ci-dessus, ma thèse de doctorat »Sur quelques applications des fractions continues algébriques», publiée en russe, le travail de M. C. POSSÉ au même titre, publié en français, et ma note »Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$» (Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg. T. IX, N. 5).

sert de limite à la probabilité que la somme de ces valeurs sera comprise entre des limites fixées.

§ 1. Nous allons considérer les épreuves successives, assujetties par rapport à un événement E aux conditions suivantes:

1) la probabilité de E pour chacune de ces épreuves est égale au même nombre p, tant que leurs résultats restent absolument indéterminés;

2) la probabilité de E pour chaque épreuve est égale à l'autre nombre p_1, si les résultats des épreuves suivantes restent indéterminés et on sait, que l'épreuve immédiatement précédente a fait arriver l'événement E, indépendamment des résultats des autres épreuves;

3) la probabilité de E pour chaque épreuve a la troisième valeur p_2, si les résultats des épreuves suivantes sont indéterminés, comme auparavant, mais l'on sait, que l'épreuve immédiatement précédente a fait arriver l'événement contraire à E, indépendamment des résultats des autres épreuves.

Pour le dire en peu de mots, nous allons nous occuper des épreuves identiques liées en chaîne.

Nous désignons par F l'événement contraire à E et par

$$q,\ q_1,\ q_2$$

les probabilités de F, égales à

$$1-p,\ 1-p_1,\ 1-p_2.$$

Quant aux nombres p, p_1, p_2, nous ne pouvons pas les donner tous trois arbitrairement, car ils sont liés par l'égalité

$$p = p p_1 + q p_2 \tag{1}$$

facile à déduire, en considérant les épreuves voisines.

Ayant égard à cette égalité et en posant

$$p_1 - p_2 = \delta, \tag{2}$$

nous réduirons les six nombres

$$p,\ p_1,\ p_2,\ q,\ q_1,\ q_2,$$

liés par les égalités

$$p + q = p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1 \tag{3}$$

aux trois nombres

$$p,\ q,\ \delta,$$

en établissant les formules

$$(4)\qquad \begin{aligned} p_1 &= p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q, \\ p_2 &= p - \delta p, \quad q_2 = q + \delta p. \end{aligned}$$

En abordant notre problème, nous nous occuperons en premier lieu de la recherche de la fonction génératrice pour la probabilité que dans les n épreuves l'événement E arrivera m fois et l'événement F arrivera $n - m$ fois.

Soit

$$P_{m,k}$$

la probabilité que dans les k premières épreuves l'événement E arrivera justement m fois; soient ensuite

$$P^0_{m,k}, \quad P'_{m,k}$$

les mêmes probabilités à la condition supplémentaire, laquelle pour $P^0_{m,k}$ consiste dans ce que l'événement E n'arrive pas à la $k^{\text{ième}}$ épreuve, et pour $P'_{m,k}$ consiste au contraire dans ce que l'événement E a lieu à la $k^{\text{ième}}$ épreuve; ainsi nous avons

$$(5)\qquad P_{m,k} = P^0_{m,k} + P'_{m,k}.$$

Pour

$$P^0_{m,k}, \quad P'_{m,k}, \quad P_{m,k}$$

nous formons, en introduisant un nombre ξ arbitraire, les trois fonctions génératrices

$$(6)\qquad \varphi_k = \Sigma P^0_{m,k}\,\xi^m, \quad \psi_k = \Sigma P'_{m,k}\,\xi^m, \quad \omega_k = \Sigma P_{m,k}\,\xi^m,$$

qui sont liées, en vertu de (5), par cette formule simple

$$(7)\qquad \omega_k = \varphi_k + \psi_k.$$

Cela étant, il est facile d'obtenir les formules suivantes

$$(8)\qquad \begin{aligned} P^0_{m,k+1} &= q_1\, P'_{m,k} + q_2\, P^0_{m,k} \\ P'_{m,k+1} &= p_1\, P'_{m-1,k} + p_2\, P^0_{m-1,k} \end{aligned}$$

pour passer des k épreuves aux $k + 1$ épreuves, et par conséquent nous avons

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varphi_{k+1} &= q_1\, \psi_k + q_2\, \varphi_k, \\ \psi_{k+1} &= p_1\, \xi\, \psi_k + p_2\, \xi\, \varphi_k. \end{aligned}$$

Or en éliminant des équations (9) l'une ou l'autre des fonctions φ et ψ, nous obtenons pour ces fonctions deux équations tout à fait identiques

$$\varphi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \varphi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \varphi_k = 0,$$
$$\psi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \psi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \psi_k = 0,$$

d'où par l'addition on trouve

$$\omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \omega_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \omega_k = 0. \tag{10}$$

En vertu de cette équation, si l'on pose

$$\Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \dots\dots, \tag{11}$$

en introduisant un second nombre arbitraire t et en déterminant ω_0 par l'égalité

$$\omega_2 - (p_1 \xi + q_2) \omega_1 + (p_1 - p_2) \omega_0 = 0, \tag{12}$$

on trouve

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1 \xi + q_2) t + (p_1 - p_2) \xi t^2},$$

où l'on a

$$L_0 = \omega_0 \text{ et } L_1 = \omega_1 - (p_1 \xi + q_2) \omega_0.$$

D'autre part, il est facile de trouver immédiatement

$$\omega_1 = p \xi + q, \quad \omega_2 = p p_1 \xi^2 + (p q_1 + q p_2) \xi + q q_2,$$

d'où il résulte

$$\omega_0 = 1,$$

et ensuite

$$L_0 = 1 \text{ et } L_1 = (p - p_1) \xi + q - q_2.$$

En substituant ces valeurs de L_0 et L_1 dans l'expression indiquée de $\Omega(\xi, t)$ et en ayant égard aux formules (4) nous parvenons enfin à la formule

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1 - \delta(q\xi + p) t}{1 - \{p \xi + q + \delta(q \xi + p)\} t + \delta \xi t^2}. \tag{13}$$

§ 2. La formule (13) nous servira aux recherches des espérances mathématiques des puissances du nombre d'arrivées de l'événement E: ces espérances mathématiques s'expriment par les sommes

$$\Sigma m^k P_{m,n} (m = 0, 1, 2, \dots, n).$$

D'après ces sommes nous trouverons les sommes

$$\Sigma\,(m-pn)^k\,P_{m,n}\,,$$

qui expriment les espérances mathématiques des puissances de la différence

$$m-pn\,,$$

pn étant égal à l'espérance mathématique de m. Mais en premier lieu il faut considérer l'espérance mathématique du produit

$$m\,(m-1)\ldots.(m-i+1),$$

en remarquant, que celle-ci est égale à la valeur de la dérivée

$$\frac{d^i\,\omega_n}{d\xi^i}$$

pour $\xi=1$ et par conséquent peut être déterminée comme le coefficient de t^n dans le développement de la fonction

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi,t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1}$$

suivant les degrés positifs et croissants de t. Conformément à cela, en différentiant la fonction $\Omega\,(\xi,t)$, déterminée par la formule (13), et en posant $\xi=1$, on trouve

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi,t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1}=\frac{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,i\,p\,t^i}{(1-t)^2}\left\{\frac{p}{1-t}+\frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1}. \tag{14}$$

Au moyen de cette formule, on obtient pour les petites valeurs de i des résultats assez simples; en posant, par exemple

$$i=1,\,2,\,3,\,4,$$

on trouve

l'esp. math. de $m \qquad\qquad = np$

l'esp. math. de $m\,(m-1)=n\,(n-1)\,p^2+2\,pq\delta\,(n-1+(n-2)\,\delta+(n-3)\,\delta^2+\ldots)$

$\ldots\ldots$ de $m\,(m-1)\,(m-2)=n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3$

$$+\,6\,p^2q\,\delta\,((n-1)\,(n-2)+(n-2)\,(n-3)\,\delta+\ldots.)$$

$$+\,6\,pq^2\delta^2\,(n-2+2\,(n-3)\,\delta+3\,(n-4)\,\delta^2+\ \ldots)$$

l'esp. m. de $m(m-1)(m-2)(m-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$

$$+ 12 p^3 q \delta ((n-1)(n-2)(n-3) + (n-2)(n-3)(n-4)\delta + \ldots)$$
$$+ 36 p^2 q^2 \delta^2 ((n-2)(n-3) + 2(n-3)(n-4)\delta + \ldots)$$
$$+ 24 p q^3 \delta^3 (n-3 + 3(n-4)\delta + 6(n-5)\delta^2 + \ldots\ldots).$$

En passant au cas général, nous remarquons, que la fonction

$$\left\{\frac{d^i \Omega(\xi, t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1},$$

en vertu de la formule (14), se décompose en termes

$$\frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-j)}{1.2\ldots j} \cdot \frac{1.2\ldots i\, p^{i-j}(\delta q)^j t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}.$$

En développant ensuite la fraction

$$\frac{t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}$$

en une série suivant les puissances croissantes de t, on trouve que le coefficient de t^n dans cette série s'exprime par la somme

$$\frac{(n-j)(n-j-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots(i-j)} + j\delta \frac{(n-j-1)(n-j-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots(i-j)}$$
$$+ \frac{j(j+1)}{1.2}\delta^2 \frac{(n-j-2)(n-j-3)\ldots\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots\ldots(i-j)} + \ldots\ldots,$$

arrêtée aux termes égaux à zéro; or en ajoutant les plusieurs termes égaux à zéro, on peut prolonger cette somme jusqu'à δ^{n-j-1} inclusivement.

Ayant égard aux produits

$$(n-j-\lambda)(n-j-\lambda-1)\ldots(n-i-\lambda+1),$$

constituant cette somme, nous les réduirons aux polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de n:

$$n^{i-j} - \frac{(i-j)(i+j+2\lambda-1)}{2} n^{i-j-1} + \ldots$$

Par conséquent notre somme se présentera sous la forme d'un polynome

(15) $$C_0\, n^{i-j} + C_1\, n^{i-j-1} + \ldots\ldots,$$

dont les coefficients

$$C_0,\, C_1,\, \ldots.$$

s'expriment par les sommes des premiers $n - j$ termes des séries infinies, qui ne dépendent de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ. D'ailleurs il est facile de se persuader, qu'en vertu des inégalités

$$0 < p < 1,\quad 0 < p_1 < 1,\quad 0 < p_2 < 1$$

le carré de δ doit être plus petit que l'unité et que l'inégalité

$$\delta^2 < 1$$

suffit pour la convergence de notres séries infinies.

Pour notre bu final il est important d'établir la formule conditionnelle

(16) $$1 \,.\, 2 \ldots (i - j)\, C_0 = (1 - \delta)^{-j},$$

où au lieu de la somme infinie

$$1 + j\delta + \frac{j\,(j+1)}{1 \,.\, 2}\,\delta^2 + \frac{j\,(j+1)\,(j+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\,\delta^3 + \ldots,$$

égale à $(1 - \delta)^{-j}$, il faut prendre

$$1 + j\delta + \frac{j\,(j+1)}{1 \,.\, 2}\,\delta^2 + \ldots\ldots + \frac{j\,(j+1)\ldots(n-2)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-j-1)}\,\delta^{n-j-1}.$$

La formule (16) fait évidente la limite de C_0, lorsque n augmente infiniment.

En vertu des calculs indiqués l'espérance mathématique du produit

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1)$$

s'exprime sous la forme d'un polynome, ordonné suivant les puissances entières et positives de n.

Les coefficients de ce polynome s'obtiennent des séries convergentes infinies, qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les degrés croissants de δ, si l'on écarte tous les termes contenant δ^n et les plus grands degrés de δ.

En même temps il est facile de voir, que notre polynome, exprimant l'espérance mathématique de

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1),$$

ne contient les nombres p et q que dans les degrés entiers et positifs, et que dans tous ses termes la somme des degrés de p et de q est égale à i et le degré de p n'est pas moindre que le degré de n.

Enfin si l'on écarte tous les termes, où le degré de p surpasse le degré de n, et l'on désigne le reste de l'expression considérée par le symbole

$$[(m, i)]_0,$$

les calculs indiqués donnent la formule [1]

$$(17) \quad \begin{aligned} [(m, i)]_0 = (np)^i + i(i-1)\frac{\delta q}{1-\delta}(np)^{i-1} + \frac{i(i-1)^2(i-2)}{1.2}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^2 (np)^{i-2} \\ \ldots\ldots + \frac{i(i-1)^2\ldots(i-j+1)^2(i-j)}{1.2\ldots j}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j (np)^{i-j} + \ldots\ldots; \end{aligned}$$

le membre droit de cette formule, développé en série suivant les puissances croissantes de δ, ne doit être prolongé que jusqu'à δ^{n-1} inclusivement.

D'autre part, en exprimant les puissances de m par les produits de la forme considérée, on obtient la formule connue

$$(18) \quad \begin{aligned} m^i = m(m-1)\ldots(m-i+1) + A_{1,i}\, m(m-1)\ldots(m-i+2) + \\ + \ldots. + A_{j,i}\, m(m-1)\ldots(m-i+j+1) + \ldots., \end{aligned}$$

dont les coefficients

$$A_{1,i},\ A_{2,i},\ \ldots,\ A_{i-1,i}$$

ne dépendent pas de m.

On peut calculer $A_{j,i}$ au moyen des égalités [2]

$$(19) \quad \begin{aligned} A_{1,i} = \frac{i(i-1)}{2},\ A_{j,j} = 0 \\ A_{j,i+1} = A_{j,i} + (i-j+1)\, A_{j-1,i} \end{aligned}$$

faciles a déduire; de ces égalités on trouve successivement

---

[1] Nous n'avons pas égard à l'égalité $p + q = 1$.

[2] Les mêmes coefficients $A_{j,i}$ entrent aussi dans la formule

$$\frac{d^i f(e^x)}{dx^i} = e^{xi} f^{(i)}(e^x) + A_{1,i}\, e^{x(i-1)} f^{(i-1)}(e^x) + A_{2,i}\, e^{x(i-2)} f^{(i-2)}(e^x) + \ldots.$$

$$\begin{array}{llllllll}
A_{1,2}=1, & A_{1,3}=3, & A_{1,4}=6, & A_{1,5}=10, & A_{1,6}=15, & A_{1,7}=21, & A_{1,8}=28, & A_{1,9}=36 \\
 & A_{2,3}=1, & A_{2,4}=7, & A_{2,5}=25, & A_{2,6}=65, & A_{2,7}=140, & A_{2,8}=266, & A_{2,9}=462 \\
 & & A_{3,4}=1, & A_{3,5}=15, & A_{3,6}=90, & A_{3,7}=350, & A_{3,8}=1050, & A_{3,9}=2646 \\
 & & & A_{4,5}=1, & A_{4,6}=31, & A_{4,7}=301, & A_{4,8}=1701, & A_{4,9}=6951 \\
 & & & & A_{5,6}=1, & A_{5,7}=63, & A_{5,8}=966, & A_{5,9}=7770 \\
 & & & & & A_{6,7}=1, & A_{6,8}=127, & A_{6,9}=3025 \\
 & & & & & & A_{7,8}=1, & A_{7,9}=255 \\
 & & & & & & & A_{8,9}=1.
\end{array}$$

Or les égalités (19) fournissent aussi la formule

$$A_{j,i}=\frac{i(i-1)\ldots(i-j)}{2\cdot 4\ldots 2j}\left(i^{j-1}+\alpha i^{j-2}+\beta i^{j-3}+\cdots\right) \tag{20}$$

où α, β, ... ne dépendent pas de i.

En nous servant de la formule (20), nous pouvons introduire dans nos calculs les quantités $A_{j,0}$, $A_{j,1}$, ..., $A_{j,j}$, égales à zéro, qui ne se présentent pas dans la formule (18).

Cela étant, il est aisé de parvenir aux conclusions suivantes.

L'espérance mathématique de m^i peut être présentée sous la forme d'un polynome, ordonné suivant les puissances entières et positives de n.

Les coefficients de ce polynome s'obtiennent des séries convergentes qui sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ et ne dépendent pas de n, si l'on écarte tous les termes, contenant δ^n et les plus grandes puissances de δ.

Quant aux nombres p et q, ils n'entrent dans ce polynome qu'aux degrés entiers et positifs, la somme des degrés de p et de q ne surpassant pas i et le degré de p dans chaque terme de ce polynome n'étant pas moindre que le degré de n. Enfin, si l'on écarte tous les termes, où le degré de p surpasse le degré de n, et l'on désigne le reste par le symbole $[m^i]_0$, il est facile d'obtenir la formule

$$\left\{\begin{aligned}
&[m^i]_0=(np)^i+A_{1,i}(np)^{i-1}+A_{2,i}(np)^{i-2}+\cdots \\
&\qquad+\left\{i(i-1)(np)^{i-1}+A_{1,i}(i-1)(i-2)(np)^{i-2}+\cdots\right\}\frac{\delta q}{1-\delta} \\
&\qquad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad+\left\{\begin{aligned}&\frac{i(i-1)^2\ldots(i-j+1)^2(i-j)}{1.2\ldots\ldots j}(np)^{i-j}+ \\ &A_{1,i}\frac{(i-1)(i-2)^2\ldots(i-j)^2(i-j-1)}{1.2\ldots\ldots j}(np)^{i-j-1}+\cdots\end{aligned}\right\}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j \\
&\qquad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

qui a le même sens conditionnel que la formule (17).

§ 3. Passons à l'espérance mathématique des puissances de la différence

$$m - pn.$$

En nous servant de la formule

$$(22) \qquad (m - pn)^k = m^k - k m^{k-1} pn + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} m^{k-2} (pn)^2 - \dots .$$

nous déduisons des résultats précédentes les conclusions suivantes.

L'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

peut être présentée sous la forme d'un polynome

$$(23) \qquad R_k^{(k)} n^k + R_{k-1}^{(k)} n^{k-1} + \dots + R_i^{(k)} n^i + \dots + R_0^{(k)},$$

dont les coefficients

$$R_k^{(k)},\ R_{k-1}^{(k)}, \dots\dots,\ R_i^{(k)}, \dots\ R_0^{(k)},$$

étant des fonctions entières de

$$p,\ q,\ \delta,$$

s'obtiennent des séries convergentes infinies, qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ, par l'écartement de tous les termes contenants δ^n et les plus grandes puissances de δ. Nos calculs font évident aussi, que la fonction $R_i^{(k)}$ contient le facteur p^i et que la somme des degrés de p et de q dans chaque terme de cette fonction ne surpasse pas k.

Nous sommes parvenus au polynome (23), en étudiant les calculs fixés; maintenant il est important de remarquer, que les coefficients $R_i^{(k)}$ du polynome (23) ne dépendent pas de la méthode employée mais sont tout à fait déterminés par la condition qu'ils s'obtiennent de séries, qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ, par l'écartement de tous les termes contenants δ^n et les plus grandes puissances de δ.

Or nous pouvons parvenir à la même expression (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

par une autre voie, en considérant au lieu du nombre des arrivées de l'événement E le nombre des arrivées de l'événement F, contraire à E.

Pour effectuer cette passage de E à F, il faut prendre $n - m$ au lieu de m et transposer p et q, conformément aux formules (4).

De cette manière on remplace la différence

$$m - pn$$

par la suivante

$$n - m - qn,$$

qui ne diffère de la précédente que par le signe $\pm$, car leur somme

$$m - pn + n - m - qn$$

est évidemment égale à zéro.

Par conséquent les puissances paires de ces différences sont égaux et leurs puissances impaires ne diffèrent que par le signe $\pm$.

Il en résulte, que l'expression trouvée (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

ne change pas sa valeur absolue, si l'on transpose p et q; en sorte que cette transposition ne change pas $R_i^{(k)}$, si k est pair, et transforme $R_i^{(k)}$ en $-R_i^{(k)}$, si k est impair.

Cela étant, ayant découvert dans $R_i^{(k)}$ le facteur p^i, nous pouvons assurer, que $R_i^{(k)}$ doit contenir aussi un facteur identique avec q^i en vertu de l'égalité $p + q = 1$.

Par conséquent, si la fonction $R_i^{(k)}$ ne se réduit à zéro, elle doit contenir les termes, où la somme des degrés de p et q n'est pas moindre que $2i$, en vertu de quoi on a

$$2i \leqq k, \tag{24}$$

car la somme des degrés de p et de q dans la fonction $R_i^{(k)}$ ne surpasse pas k.

Donc on a

$$R_{2l-1}^{(2l-1)} = R_{2l-2}^{(2l-1)} = \ldots\ldots = R_l^{(2l-1)} = 0$$

et

$$R_{2l}^{(2l)} = R_{2l-1}^{(2l)} = \ldots\ldots\ldots = R_{l+1}^{(2l)} = 0,$$

l étant un nombre entier positif, et par suite

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m - np}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0 \tag{25}$$

et

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m - np}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = \lim. R_l^{(2l)}. \tag{26}$$

La quantité $R_l^{(2l)}$ se représente, en vertu de nos calculs, sous la forme de telle somme

$$\begin{aligned} & a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l \\ & + b_0 p^{l+1} + b_1 p^{l+1} q + b_2 p^{l+1} q^2 + \ldots . . + b_{l-1} p^{l+1} q^{l-1} \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

dont les coefficients ne dépendent pas de p et de q.

Or cette somme se détermine aisément par la ligne première

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l .$$

En effet, en multipliant les termes de la somme

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l$$

par

$$(1-p)^l,\ (1-p)^{l-1},\ (1-p)^{l-2}, \ldots . ., \ 1-p,\ 1,$$

nous la transformons dans la somme

$$(27)\quad S = a_0 p^l (1-p)^l + a_1 p^l (1-p)^{l-1} q + \ldots + a_{l-1} p^l (1-p) q^{l-1} + a_l p^l q^l ,$$

laquelle est égale à

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{l-1} + a_l)\, p^l q^l$$

et ne se change pas par la transposition de p et q. Il en résulte, que la transposition de p et q ne change pas aussi la différence

$$R_l^{(2l)} - S .$$

D'autre part, il est évident, que cette différence contient le facteur p^{l+1}, et par suite elle doit contenir aussi un facteur identique avec q^{l+1} en vertu de l'égalité $p + q = 1$; ce qui est impossible, si elle ne se réduit à zéro; car elle ne contient que les termes, où la somme des degrés de p et q ne surpasse pas $2l$.

Donc on a

$$(28)\qquad R_l^{(2l)} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{l-1} + a_l)\, p^l q^l ,$$

la somme

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_l p^l q^l$$

étant égale au coefficient de n^l dans l'expression

$$[(m - pn)^{2l}]_0 ,$$

déduite de l'expression (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^{2l}$$

par l'écartement de tous les termes, où le degré de p surpasse l.

Enfin, ayant égard à la formule

$$[(m-pn)^{2l}]_0 = [m^{2l}]_0 - 2lpn[m^{2l-1}]_0 + \frac{2l(2l-1)}{1.2} p^2n^2[m^{2l-2}]_0 - \cdots$$

et en nous servant de l'expression de $[m^i]_0$ trouvée plus haut, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned} a_j : \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j = & \frac{(l+j)(l+j-1)^2 \ldots (l+1)^2 l}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l} \\ & - \frac{2l}{1} \frac{(l+j-1)(l+j-2)^2 \ldots l^2(l-1)}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l-1} \\ & + \frac{2l(2l-1)}{1.2} \frac{(l+j-2)(l+j-3)^2 \ldots (l-1)^2(l-2)}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l-2} \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & \pm \frac{2l(2l-1)\ldots(l+2)}{1.2\ldots(l-1)} \frac{(j+1)j^2(j-1)^2\ldots 2^2.1}{1.2\ldots j} A_{l-j,l+1}, \end{aligned}$$

qui en vertu de la formule (20) nous donne[1]

$$\begin{aligned} a_j &= \Delta^{2l}_{x=0} \frac{(x+j-l)(x+j-l-1)^2 \ldots (x-l+1)^2(x-l)}{1.2.3\ldots j} A_{l-j,x} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \Delta^{2l} \frac{x^{2l}}{1.2\ldots j.2.4\ldots 2(l-j)} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \frac{l(l-1)\ldots(l-j+1)}{1.2.3\ldots j} 1.3.5\ldots(2l-1) \left(\frac{2\delta}{1-\delta}\right)^j \end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l = 1.3.5\ldots(2l-1)\left(1 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right)^l. \tag{29}$$

Ces formules ont évidemment le même sens conditionnel, que la formule (16).

La formule (29) fournit la limite de la somme

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l,$$

lorsque n augmente infiniment.

[1] $\Delta^k f(x)_{x=0} = f(k) - \frac{k}{1} f(k-1) + \frac{k(k-1)}{1.2} f(k-2) - \ldots\ldots \pm f(0).$

Nous parvenons de cette manière à l'égalité

$$\lim_{n=\infty} R_l^{(2l)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l$$

et par suite

(30) $$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l.$$

Donc nous avons

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0$$

et

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l,$$

et en vertu des recherches mentionnées ci-dessus nous pouvons établir la proposition suivante.

La probabilité des inégalités

$$np + t_1 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta} n} < m < np + t_2 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta} n},$$

où n *est le nombre des épreuves considérées,* m *est le nombre d'arrivées de l'événement* E *et* t_1, t_2 *sont deux nombres constants arbitraires, converge à la limite*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

lorsque n *augmente infiniment.*

§ 4. Notre question admet une généralisation considérable, signalée par M. A. Liapounoff; à savoir, en conservant les autres conditions, on peut poser, que la probabilité de E, tant que les résultats de nos épreuves sont absolument indéterminées, n'a pas une même valeur pour toutes ces épreuves, mais dépend de leur position. En abordant cette généralisation de notre question et en désignant par

$$p', p'', \ldots, p^{(n)}, \ldots$$

la probabilité de E pour les épreuves successives, nous obtenons au lieu de (1) l'équation suivante

(31) $$p^{(n)} = p_1 p^{(n-1)} + p_2 (1 - p^{(n-1)})$$

dont la résolution aux termes précédents s'exprime par la formule

$$(32) \qquad p^{(n)} = p + (p' - p)\,\delta^{n-1}.$$

Il est évident de cette formule, que p sert maintenant de la limite, à laquelle s'approche $p^{(n)}$, quand n augmente infiniment.

D'autre part, il est facile d'obtenir, pour la question généralisée, la même équation

$$\omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\,\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\,\xi\,\omega_k = 0,$$

en conservant toutes nos désignations, employées auparavant.

Quant à la fonction $\Omega(\xi, t)$, la fonction génératrice de ω_n, pour la question généralisée elle ne diffère de la fonction $\Omega(\xi, t)$ précédente que par son numérateur; le nouvel numérateur s'obtient du numérateur, trouvé auparavant, par changement de ω_1, la nouvelle expression ω_1 étant égale à $p'\xi + q'$ au lieu de $p\xi + q$. Cela étant, pour la généralisation signalée de notre question il faut et il suffit à la fonction $\Omega(\xi, t)$, trouvée auparavant, ajouter la fonction $\Delta(\xi, t)$, déterminée par la formule

$$(33) \qquad \Delta(\xi, t) = \frac{(p' - p)(\xi - 1)\,t}{1 - \{p\xi + q + \delta(q\xi + p)\}\,t + \delta\xi t^2}.$$

Or d'après l'accroissement de $\Omega(\xi, t)$ il est facile de trouver aussi les accroissements correspondants des espérances mathématiques considérées par nous; car leurs accroissements se déterminent par les mêmes formules, que ces valeurs mêmes, à la seule différence, que la fonction $\Omega(\xi, t)$ doit être remplacée par $\Delta(\xi, t)$.

En premier lieu l'accroissement de l'espérance mathématique du produit

$$m(m-1)\ldots.(m-i+1)$$

s'exprime par le coefficient de t^n dans le développement de

$$(34) \qquad \left\{\frac{d^i \Delta(\xi, t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1} = \frac{1 \cdot 2 \ldots i\,(p' - p)\,t^i}{(1-t)(1-\delta t)} \left\{\frac{p}{1-t} + \frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de t. En étudiant ces coefficients et en passant du produit

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

successivement aux puissances de m et de $m - pn$, on trouvera, que l'accroissement de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

peut être présenté, par la méthode employée ci-dessus, sous la forme d'un polynome

$$T_{k-1}^{(k)} n^{k-1} + T_{k-2}^{(k)} n^{k-2} + \ldots . + T_0^{(k)} \tag{35}$$

analogue au polynome (23).

Les rapports

$$\frac{T_{k-1}^{(k)}}{p' - p}, \quad \frac{T_{k-2}^{(k)}}{p' - p}, \ldots \ldots, \frac{T_0^{(k)}}{p' - p}$$

sont des fonctions entières de p et q; la méthode précédente fait évident aussi, que la fonction

$$T_i^{(k)} : (p' - p)$$

contient la facteur p^i et que la somme des degrés de p et q dans chaque terme de cette fonction ne surpasse pas $k - 1$.

D'autre part il n'est pas difficile de démontrer, par le passage de E à F, que l'accroissement considéré de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

ne change pas sa valeur absolue, si l'on transpose simultanément

$$p \text{ et } q, \quad p' \text{ et } q' = 1 - p'.$$

De là découlent les égalités

$$T_{2l-2}^{(2l-1)} = T_{2l-3}^{(2l-1)} = \ldots = T_l^{(2l-1)} = 0$$

et

$$T_{2l-1}^{(2l)} = T_{2l-2}^{(2l)} = \ldots . = T_l^{(2l)} = 0.$$

Donc la généralisation de notre problème, signalée par M. A. Liapounoff, ne change pas la limite trouvée auparavant, à laquelle converge l'espérance mathématique de

$$\left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^k$$

lorsque n augmente infiniment; et par conséquent, en généralisant de cette manière notre problème, nous pouvons maintenir la proposition, établie plus haut, sur la limite de la probabilité des inégalités

$$np + t_1 \sqrt{2pq\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)n} < m < np + t_2 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n}.$$

§ 5. Nos considérations sont basées en grande partie sur la symétrie de certaines expressions par rapport à p et q. Cette circonstance particulière empêche beaucoup de généraliser nos resultats.

En cherchant à les étendre à des valeurs quelconques liées en chaîne, j'ai modifié les considérations exposées de telle manière qu'il devient superflu de s'appuyer à la symétrie susdite.

Pour ce but nous remarquons que l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^i$$

peut être déterminée immédiatement par le coefficient de t^n dans le développement de la fonction

$$\left\{\frac{d^i\Omega(e^\eta, te^{-p\eta})}{d\eta^i}\right\}_{\eta=0}$$

suivant les puissances positives et croissantes de t. Or en étudiant cette fonction de t et en posant

$$V = 1 - (p_1 e^\eta + q_2)te^{-p\eta} + (p_1 - p_2)e^\eta t^2 e^{-2p\eta}$$

et

$$\Omega(e^\eta, te^{-p\eta}) = \frac{U}{V},$$

nous pouvons nous servir des formules très connues

$$\left(\frac{U}{V}\right)^{(i)} = U\left(\frac{1}{V}\right)^{(i)} + \frac{i}{1}U'\left(\frac{1}{V}\right)^{(i-1)} + \cdots$$

et

$$\left(\frac{1}{V}\right)^{(i)} = \sum \frac{i!\,j!}{V^{j+1}} \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2.3}V'''\right)^\nu}{\nu!} \cdots,$$

où l'on a

$$\lambda + \mu + \nu + \cdots = j \text{ et } \lambda + 2\mu + 3\nu + \cdots = i.$$

Au moyen des ces formules il n'est pas difficile de tirer de l'expression

$$\left\{\frac{d^i\Omega(e^\eta, te^{-p\eta})}{d\eta^i}\right\}_{\eta=0}$$

son terme principal de la forme

$$\frac{A}{(1-t)^{\frac{i}{2}+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{(1-t)^{\frac{i+1}{2}}},$$

déterminant nos resultats.

Nos considérations modifiées peuvent être étendues aussi à des valeurs quelconques liées en chaîne, ce que j'ai fait dans le mémoire »Amplification des théorèmes limites du calcul des probabilités à la somme des valeurs liées en chaîne», publié en russe (Mem. de l'Acad. des sciences de St. Petersbourg. VIII série, Vol. XXII, N. 9).