ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN KOEFFIZIENTEN.

VON

OSKAR PERRON

in MÜNCHEN.

1. Sind die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

in der Umgebung einer Stelle $x=a$ in LAURENTsche Reihen entwickelbar, so bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle Integrale an dieser Stelle sich bestimmt verhalten, bekanntlich darin, dass die Funktionen

$$(x-a)p_1(x),\ (x-a)^2 p_2(x),\ \ldots,\ (x-a)^m p_m(x)$$

regulär sind, d. h. keine negativen Potenzen von $x-a$ mehr enthalten. Sind diese Bedingungen nicht alle erfüllt, so ist der Punkt $x=a$ eine Stelle der Unbestimmtheit. Im allgemeinen verhalten sich dann auch *alle* Integrale unbestimmt, indem die eventuell vorhandenen Reihen der Form

$$(x-a)^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu (x-a)^\nu,$$

welche die Differentialgleichung *formal* befriedigen, für alle x divergieren. Ausnahmsweise können unter diesen Reihen aber auch konvergente sein. Diejenigen Differentialgleichungen, bei denen dies eintritt, sodass an der Unbestimmtheitsstelle doch einzelne Partikulärintegrale sich bestimmt verhalten, sind von Herrn

THOMÉ eingehend untersucht worden;[1] doch konnte Herr THOMÉ kein Kriterium angeben, welches mit Sicherheit die Existenz eines solchen Integrales anzeigt. Die sehr komplicierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind erst durch die schönen Untersuchungen des Herrn HELGE VON KOCH mit Hilfe unendlicher Determinanten aufgedeckt worden.[2] Indes hat Herr VON KOCH seiner ausführlichen Untersuchung die Annahme zu Grunde gelegt, dass der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung verschwindet. Wenn man dies auch durch eine geeignete Transformation stets erzielen kann, so werden doch durch diese Transformation im allgemeinen die Integrale, die sich bestimmt verhalten, in solche transformiert, die sich unbestimmt verhalten, sodass ein Rückschluss aus der Anzahl der sich bestimmt verhaltenden Integrale der transformierten Gleichung auf die entsprechende Anzahl der ursprünglichen Gleichung nur ausnahmsweise gestattet ist.

Ich behandle nun im folgenden auf einem neuen und, wie ich glaube, einfacheren Weg lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten *rationale* Funktionen von x sind, deren keine identisch zu verschwinden braucht. Dabei bediene ich mich zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Integrale der Form

$$(x-a)^{\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}(x-a)^{\nu}$$

nicht unendlicher Determinanten, sondern derjenigen Resultate, die ich in einer vorausgehenden Arbeit über lineare Differenzengleichungen[3] gewonnen habe, und die mir für den vorliegenden Zweck besonders bequem erscheinen. Ohne jedoch näher auf die Natur der notwendigen und hinreichenden Bedingungen einzugehen, gelange ich dann zu einigen speziellen Klassen von Differentialgleichungen, bei denen eine Anzahl von Partikulärintegralen an einer einzelnen singulären Stelle oder auch in der ganzen Ebene holomorph sind.

§ 1.

2. Die Stelle a, an der die Integrale untersucht worden sollen, mag der einfacheren Schreibweise halber in den Nullpunkt verlegt werden. Wir bringen dann die Differentialgleichung auf die »Normalform«:

---

[1] *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bde 74 ff.

[2] *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.* Acta mathematica, 18 (1894). Siehe auch zwei Noten in den Comptes rendus, 116 (1893) pag. 91 und 365.

[3] Seite 109 dieses Bandes.

$$\sum_{i=0}^{m} x^i (c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + \cdots + c_{i,r}x^r)\frac{d^i y}{dx^i} = 0, \tag{1}$$

wobei die Polynome

$$P_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + \cdots + c_{i,r}x^r \qquad (i = 0, 1, \ldots m)$$

als teilerfremd vorausgesetzt werden dürfen. Es können dann insbesondere die Zahlen $c_{i,0}$ nicht alle verschwinden, weil sonst die Polynome $P_i(x)$ den gemeinsamen Faktor x hätten; daher ist

$$|c_{0,0}| + |c_{1,0}| + \cdots + |c_{m,0}| > 0. \tag{2}$$

Ferner darf auch

$$|c_{0,r}| + |c_{1,r}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0 \tag{3}$$

angenommen werden. Denn wenn alle $c_{i,r}$ verschwinden würden, so wären die Polynome $P_i(x)$ alle von geringerem als dem r^{ten} Grad, und es könnte dann r durch eine kleinere Zahl ersetzt werden. Endlich ist auch

$$|c_{m,0}| + |c_{m,1}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0, \tag{4}$$

weil sonst die Differentialgleichung von geringerer als der m^{ten} Ordnung wäre.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich alle Integrale im Nullpunkt bestimmt verhalten, lautet jetzt einfach: $c_{m,0} \neq 0$. Wenn diese erfüllt, und wenn ausserdem noch $c_{i,k} = 0$ ist für $i + k < m$, so haben alle Koeffizienten der Differentialgleichung den Faktor x^m, und der Nullpunkt ist dann nicht nur keine Stelle der Unbestimmtheit, sondern überhaupt kein singulärer Punkt mehr.

Wir brauchen indes ausser den Ungleichungen (2), (3), (4) keinerlei Voraussetzungen über die Koefficienten $c_{i,k}$ zu machen, sondern werden alle Fälle der Bestimmtheit und Unbestimmtheit gemeinsam behandeln können. Vorwegzunehmen ist lediglich der Fall $r = 0$. Die Differentialgleichung hat dann die einfache Gestalt:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \frac{d^i y}{dx^i} = 0 \qquad (c_m \neq 0)$$

und lässt sich folglich ohne weiteres integrieren. Wie bekannt, entsprechen nämlich einer k-fachen Wurzel ϱ der »determinierenden Fundamentalgleichung«

$$c_0 + c_1\varrho + c_2\varrho(\varrho - 1) + \cdots + c_m\varrho(\varrho - 1)\ldots(\varrho - m + 1) = 0$$

die k Integrale

$$x^\varrho,\ x^\varrho \log x, \ldots x^\varrho (\log x)^{k-1},$$

womit dieser einfache Fall bereits erledigt ist.

3. Von jetzt ab sei daher

$$r > 0. \tag{5}$$

Substituiert man dann die Reihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu} \tag{6}$$

in die Differentialgleichung (1), so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$c_{0,h} + c_{1,h}\varrho + c_{2,h}\varrho(\varrho - 1) + \cdots + c_{m,h}\varrho(\varrho - 1)\ldots(\varrho - m + 1) = f_h(\varrho) \tag{7}$$
$$(h = 0, 1, \ldots r)$$

gesetzt wird, zur Berechnung der Koeffizienten D_ν die Formeln:

$$\begin{aligned}
&D_0 f_0(\varrho) = 0\\
&D_1 f_0(\varrho + 1) + D_0 f_1(\varrho) = 0\\
&D_2 f_0(\varrho + 2) + D_1 f_1(\varrho + 1) + D_0 f_2(\varrho) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_{\nu+r} f_0(\varrho + \nu + r) + D_{\nu+r-1} f_1(\varrho + \nu + r - 1) + \cdots + D_\nu f_r(\varrho + \nu) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen der Forderungen (2) und (3) sind speziell die Funktionen $f_0(\varrho)$ und $f_r(\varrho)$ nicht identisch Null. Ist nun etwa $c_{1,0} = c_{2,0} = \cdots = c_{m,0} = 0$, reduciert sich also $f_0(\varrho)$ auf die Konstante $c_{0,0}$, welche dann von Null verschieden sein muss, so gibt es offenbar kein Integral der verlangten Form. Denn wenn die Entwicklung etwa genau mit der ϱ^{ten} Potenz beginnt, also $D_0 \neq 0$ ist, so widerspricht dies der ersten der Gleichungen (8).[1] Als eine notwendige Bedingung für die Existenz von Integralen der Form (6) finden wir daher

$$|c_{1,0}| + |c_{2,0}| + \cdots + |c_{m,0}| > 0. \tag{9}$$

[1] Wie Herr Thomé l. c. Bd. 74 gezeigt hat, kann es überhaupt immer höchstens so viele sich bestimmt verhaltende Integrale, also a fortiori höchstens so viele Integrale der Form (6) geben, als der Grad des Polynoms $f_0(\rho)$ beträgt.

Diese Bedingung sei erfüllt, sodass $f_0(\varrho)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert. Bedeutet dann ϱ_0 eine beliebige Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$, und setzen wir in dem hypothetischen Integral (6) speciell $\varrho = \varrho_0$, so wird die erste der Bedingungsgleichungen (8) von selbst erfüllt. Die Gesamtheit der übrigen aber teilen wir in folgender Weise in zwei Klassen.

Da, wie schon bemerkt, die Polynome $f_0(\varrho)$ und $f_r(\varrho)$ nicht identisch verschwinden, so kann man eine Zahl N angeben, derart, dass für $\nu \geqq N$:

$$f_0(\varrho_0 + \nu + r) \neq 0, \quad f_r(\varrho_0 + \nu) \neq 0 \tag{10}$$

wird. Denkt man sich die Koeffizienten $c_{i,k}$ nicht als numerisch gegebene Konstanten, sondern als variable Parameter, so wird man für diese zunächst einen Bereich T abgrenzen, von der Beschaffenheit, dass für alle Parameterwerte im Bereich T die Wurzeln der Gleichungen $f_0(\varrho) = 0$ und $f_r(\varrho) = 0$ unter einer endlichen Schranke liegen. Dann kann man N derart wählen, dass für $\nu \geqq N$ die Ungleichungen (10) im ganzen Bereich T gelten. Nach dieser Festsetzung nehmen wir in die eine Klasse die 2^{te}, 3^{te}, ... $(N + r)^{\text{te}}$ der Gleichungen (8) auf. Diese lauten, wenn wir die einzelnen Summanden der linken Seiten in umgekehrter Reihenfolge schreiben:

$$\begin{array}{l} D_0 f_1(\varrho_0) + D_1 f_0(\varrho_0 + 1) = 0 \\ D_0 f_2(\varrho_0) + D_1 f_1(\varrho_0 + 1) + D_2 f_0(\varrho_0 + 2) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ D_{N-1} f_r(\varrho_0 + N - 1) + D_N f_{r-1}(\varrho_0 + N) + \cdots + D_{N+r-1} f_0(\varrho_0 + N + r - 1) = 0. \end{array} \tag{11}$$

In die andre Klasse nehmen wir alle übrigen der Gleichungen (8). Also, wenn man durch den ersten Koeffizienten, der ja gemäss unsrer Wahl der Zahl N von Null verschieden ist, dividiert:

$$D_{\nu+r} + \frac{f_1(\varrho_0 + \nu + r - 1)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{f_r(\varrho_0 + \nu)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq N). \tag{12}$$

In diesen Gleichungen ist auch der letzte Koeffizient nach Annahme stets von Null verschieden.

4. Nun sei $c_{m,e}$ die erste der Zahlen

$$c_{m,0},\; c_{m,1},\; \ldots\; c_{m,r},$$

welche nicht gleich Null ist (nach (4) sind ja nicht alle gleich Null). Es ist dann auch $f_e(\varrho)$ das erste der Polynome

$$f_0(\varrho),\ f_1(\varrho),\ \dots\ f_r(\varrho),$$

welches genau vom m^{ten} Grad ist; die vorhergehenden sind von geringerem; die nachfolgenden jedenfalls nicht von höherem Grad.

Die Gesamtheit der Gleichungen (12) ist daher, als Differenzengleichung aufgefasst, ganz von der Art, wie ich sie in der genannten Arbeit studiert habe, und aus dem Theorem pag. 129 folgt sogleich, dass es genau $r-e$ linear unabhängige Systeme

$$D_\nu^{(1)},\ D_\nu^{(2)},\ \dots\ D_\nu^{(r-e)} \qquad (\nu = N,\ N+1,\ N+2,\ \dots) \tag{13}$$

gibt, welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, und für welche ausserdem

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots\ r-e)$$

ist. Bei jeder Lösung D_ν von (12) dagegen, die sich nicht linear aus $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \dots$ $D_\nu^{(r-e)}$ zusammensetzt, ist D_ν für unendlich viele Werte von ν grösser als eine positive Potenz von $\nu!$. In diesem letzteren Falle divergiert also die Reihe

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu}$$

für alle Werte von x. Der erste Fall dagegen kann offenbar durch e von einander unabhängige Gleichungen

$$\gamma_{K,0} D_N + \gamma_{K,1} D_{N+1} + \cdots + \gamma_{K,r-1} D_{N+r-1} = 0 \qquad (K = 1,\ 2,\ \dots\ e) \tag{14}$$

charakterisiert werden. Die Koeffizienten $\gamma_{K,i}$ sind dabei bis zu gewissem Grad willkürlich. Eindeutig bestimmt sind nur die Verhältnisse der Determinanten ihrer Matrix, und zwar dadurch, dass die $r-e$ Wertesysteme (13) den Gleichungen (14) genügen müssen. Diese Wertesysteme und folglich die genannten Determinantenverhältnisse hängen natürlich von den $c_{i,k}$ ab; doch will ich auf die Natur dieser Abhängigkeit hier nicht näher eingehen.

5. Seien jetzt, sofern dies möglich ist, die $N+r$ Zahlen

$$D_0,\ D_1,\ \dots\ D_{N+r-1} \tag{15}$$

derart gewählt, dass sie den Gleichungen (11) und (14) Genüge leisten. Wenn man dann die folgenden D_ν aus (12) berechnet, so wird es eine Zahl M geben, derart, dass $|D_\nu| < M^\nu$ ist. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu} \tag{16}$$

in einem gewissen Kreis, und stellt folglich ein Integral von (1) dar.

Wenn dagegen die Zahlen (15) nicht allen Gleichungen (11) und (14) Genüge leisten, so stellt die betreffende Reihe (16) gewiss kein Integral dar. Denn damit sie überhaupt konvergiert, sind ja die Bedingungen (14), und damit sie ein Integral darstellt, auch (11) erforderlich.

Hieraus folgt aber, dass es genau soviel linear unabhängige Integrale der Form (16) *gibt, als die Gleichungen* (11), (14) *linear unabhängige Lösungen haben.*

Dies sind aber zusammen $N + r - 1 + e$ homogene lineare Gleichungen mit $N + r$ Unbekannten. Die Matrix ihres Koefficientensystems ist:

$$\left|\begin{array}{llllll} f_1(\varrho_0) & f_0(\varrho_0+1) & & & & \\ f_2(\varrho_0) & f_1(\varrho_0+1) & f_0(\varrho_0+2) & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f_r(\varrho_0+N-1) & f_{r-1}(\varrho_0+N) & \cdots & f_0(\varrho_0+N+r-1) \\ & & & \gamma_{1,0} & \cdots & \gamma_{1,r-1} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \gamma_{e,0} & \cdots & \gamma_{e,r-1} \end{array}\right| \tag{17}$$

Sei R der »Rang» dieser Matrix, sodass also nicht alle R-reihigen Determinanten verschwinden, wohl aber alle $(R+1)$-reihigen. Dann haben die Gleichungen bekanntlich $N + r - R$ linear unabhängige Lösungen, also gibt es ebenso viele Integrale der verlangten Form. Umgekehrt, wenn es $N + r - R$ Integrale gibt, dann haben die Gleichungen ebensoviele Lösungen, und der Rang der Matrix ist daher gleich R. Setzen wir noch $N + r - R = s$, so folgt hieraus das

Theorem I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale der Form*

$$y = x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

hat, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, besteht darin, dass die Matrix (17) *vom Rang $N + r - s$ ist.*

Bemerken wir, dass die gefundenen Integrale nicht notwendig zum Exponenten ϱ_0 gehören in dem Sinn, dass die Entwicklung wirklich mit der Potenz x^{ϱ_0} beginnt; es kann sehr wohl in allen Integralen auch $D_0 = 0$ sein.

6. Die Bedingung des Theorems leidet an dem Übelstand, dass darin die $\gamma_{K,i}$ vorkommen, deren Abhängigkeit von den im Bereich T liegenden Parametern $c_{i,k}$ sehr kompliciert ist. Man kann indes leicht eine Bedingung angeben, die von den $\gamma_{K,i}$ frei und die wenigstens hinreichend ist. Sei nämlich die Matrix

$$A_N \equiv \left\| \begin{array}{llllll} f_1(\varrho_0) & f_0(\varrho_0+1) & & & & \\ f_2(\varrho_0) & f_1(\varrho_0+1) & f_0(\varrho_0+2) & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & f_r(\varrho_0+N-1) & f_{r-1}(\varrho_0+N) & \dots & f_0(\varrho_0+N+r-1) \end{array} \right\|$$

vom Rang R_N; dann ist der Rang der Matrix (17) offenbar $\leqq R_N + e$. Daher die Anzahl der fraglichen Integrale nach obigem $\geqq N + r - R_N - e$. Setzt man also diesmal $N + r - R_N = s$, so ergibt sich:

Korollar I. *Wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, und wenn von den Zahlen*

$$c_{m,0},\ c_{m,1},\ \dots\ c_{m,r}$$

die e ersten verschwinden, während $c_{m,e} \neq 0$ ist, so gibt es mindestens $s - e$ linear unabhängige Integrale der gleichen Form wie in Theorem I.

7. Man bemerke, dass diese hinreichende Bedingung mit wachsendem N sich zwar *formal* ändert, indem die Determinanten, deren Verschwinden und Nichtverschwinden sie ausdrückt, immer andere und andere werden. *Inhaltlich* aber bleibt die Bedingung, solange der Bereich T für die $c_{i,k}$ festgehalten wird, bei wachsendem N konstant, insofern die Bedingung für N diejenige für $N + 1$ nach sich zieht, und umgekehrt. Man kann also durch Vergrösserung von N keinerlei Reduktion der Bedingung erhoffen.

Hierzu genügt es zu beweisen, dass wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, der Rang von A_{N+1} gleich $N + 1 + r - s$ sein muss, oder also, dass die Gleichung

$$R_{N+1} = R_N + 1$$

besteht. Nun ergibt sich aber einerseits schon aus dem Begriff des Ranges die Ungleichung

$$R_{N+1} \leqq R_N + 1 .$$

Anderseits aber kann man auch aus einer nichtverschwindenden R_N-reihigen Determinante der Matrix A_N leicht eine nicht verschwindende $(R_N + 1)$-reihige der Matrix A_{N+1} bilden, indem man nämlich die letzte Zeile und Kolonne von

A_{N+1} hinzunimmt, wodurch die ursprüngliche Determinante nur mit der von Null verschiedenen Zahl $f_0(\varrho_0 + N + r)$ multipliziert wird. Es ist daher auch

$$R_{N+1} \geqq R_N + 1,$$

und folglich in der Tat

$$R_{N+1} = R_N + 1. \quad \text{W. z. b. w.}$$

8. Bemerken wir noch folgenden Spezialfall. Sei p eine positive ganze Zahl, und es möge etwa ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der $\frac{p(p+1)}{2}$ Gleichungen

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots; \; h + i < p)$$

sein. Dann ist insbesondere $f_0(\varrho_0) = 0$, und ausserdem enthalten die $p - 1$ ersten Zeilen der Matrix A_N lauter Nullen. Da diese Matrix aber $N + r - 1$ Zeilen hat, so verschwinden demnach gewiss alle

$$N + r - 1 - (p - 1) + 1 = N + r - p + 1$$

-reihigen Determinanten, und der Rang ist daher gleich $N + r - p - \alpha$, wobei $\alpha \geqq 0$ ist. Nach Korollar I gibt es also mindestens $p + \alpha - e$, d. h. a fortiori mindestens $p - e$ Integrale der angebenen Form. Daraus folgt

Korollar II. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots; \; h + i < p),$$

und bedeutet e die gleiche Zahl wie in Korollar I, so hat die Differentialgleichung (1) *wenigstens $p - e$ Integrale der Form*

$$x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu .$$

Speziell für $e = 1$ habe ich diesen Satz bereits in meiner Arbeit »Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen» pag. 473 bewiesen.[1]

§ 2.

9. Unter den im vorigen Paragraphen gefundenen Integralreihen können solche mit *endlicher* Gliederzahl vorkommen, indem die Gleichungen (11), deren Matrix A_N ist, unter Umständen die Lösung

$$D_N = D_{N+1} = \cdots = D_{N+r-1} = 0$$

[1] Mathematische Annalen, Bd. 66.

zulassen, ohne dass gleichzeitig für alle $\nu < N$ auch $D_\nu = 0$ wird. Die betreffenden Integrale sind dann abgesehen vom Faktor x^{ϱ_0} Polynome in x. Man kann leicht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben für die Existenz einer bestimmten Anzahl solcher Integrale.

Um zunächst eine notwendige Bedingung zu erhalten, sei ϱ_0 so angenommen, dass $D_0 \neq 0$ ist, und das betreffende Polynom sei dann etwa vom n^{ten} Grad; also

$$D_n \neq 0, \quad D_\nu = 0 \text{ für } \nu > n.$$

Die erste und die $(n + r + 1)^{\text{te}}$ der Bedingungsgleichungen (8) für $\varrho = \varrho_0$ lauten dann:

$$f_0(\varrho_0) = 0; \quad f_r(\varrho_0 + n) = 0.$$

Wenn also die Differentialgleichung (1) ein Integral der Form

$$y = x^{\varrho_0} P(x)$$

haben soll, wo $P(x)$ ein Polynom ist, so muss es notwendig eine ganze Zahl $n(\geqq 0)$ geben, derart, das die zwei Gleichungen

$$f_0(\varrho) = 0, \quad f_r(\varrho + n) = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben. Diese notwendige Bedingung ist sicher dann nicht erfüllt, wenn $f_r(\varrho)$ sich auf eine Konstante reduciert; in diesem Fall kann es also gewiss kein Integral der obigen Form geben.

10. Um nun auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, sei ϱ_0 wieder irgend eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$. Ist D_n wieder die letzte von Null verschiedene der Zahlen D_ν, so ist nach obigem

$$f_r(\varrho_0 + n) = 0.$$

Wenn also eine Zahl N so gewählt wird, dass für $\nu \geqq N$

$$f_r(\varrho_0 + \nu) \neq 0$$

ist, so muss bei jedem Integral der verlangten Form notwendig $D_\nu = 0$ sein für $\nu \geqq N$; daher reducieren sich die Bedingungsgleichungen (8), wenn darin $\varrho = \varrho_0$ gesetzt wird, auf die folgenden:

$$\begin{aligned}
&D_0 f_1(\varrho_0) + D_1 f_0(\varrho_0 + 1) = 0 \\
&D_0 f_2(\varrho_0) + D_1 f_1(\varrho_0 + 1) + D_2 f_0(\varrho_0 + 2) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad D_{N-2} f_r(\varrho_0 + N - 2) + D_{N-1} f_{r-1}(\varrho_0 + N - 1) = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad D_{N-1} f_r(\varrho_0 + N - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Es wird also genau soviele Integrale der verlangten Art geben, als dieses Gleichungssystem linear unabhängige Lösungen hat. Die Matrix dieses Systems sei B_N; sie geht offenbar aus der Matrix A_N hervor, indem man die r letzten Kolonnen wegstreicht. Ist R der Rang der Matrix B_N, so ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen gleich $N - R$. Dies ergibt das

Theorem II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale der Form*

$$y = x^{\varrho_0} P(x)$$

hat, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, und wo $P(x)$ ein Polynom sein soll, besteht darin, dass die Matrix B_N vom Rang $N - s$ ist.

11. Nun kann es ferner vorkommen, dass unter den Integralreihen sich solche finden, die zwar keine mit x^{ϱ_0} multiplicierten Polynome sind, die aber doch beständig konvergieren. Die betreffenden Integrale sind dann, vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen, ganze (transcendente) Funktionen von x. Um die Existenz solcher Integrale in allgemeinster Weise zu prüfen, und um zugleich die Stärke der Konvergenz zu untersuchen, sei $c_{m_h, h}$ die letzte von Null verschiedene unter den Zahlen

$$c_{0,h},\ c_{1,h},\ \ldots\ c_{m,h}.$$

Es ist dann allgemein das Polynom $f_h(\varrho)$ vom Grad m_h. Sollte für einen besonderen Index h vielleicht $f_h(\varrho)$ identisch verschwinden, also die Zahlen $c_{0,h}, \ldots c_{m,h}$ alle gleich Null sein, so versagt diese Definition der Zahl m_h. Wir müssen dann, um genaue Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise in der vorausgehenden Arbeit zu erzielen, $m_h = -\infty$ setzen; für das folgende würde es aber auf das gleiche hinauskommen, wenn wir in diesem Fall $m_h = 0$ definieren würden.

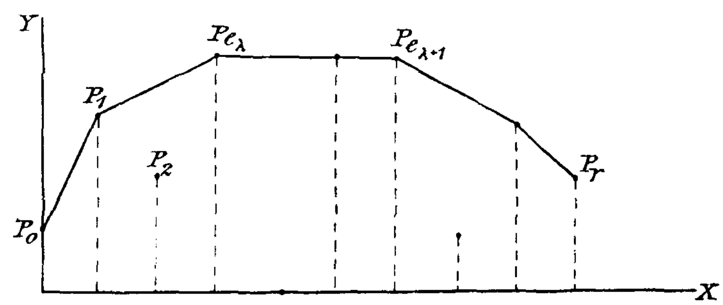
Wir konstruieren jetzt in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen X-Y-Coordinatensystems die $r + 1$ Punkte P_h ($h = 0, 1, \ldots r$) mit den bez. Koordinaten

$$x = h,\ y = m_h \qquad (h = 0, 1, \ldots r),$$

und umspannen diese Punkte mit einem nach der positiven Y-Seite konvexen Newton-Puiseuxschen Polygon (Siehe Figur).

Das Polygon habe $\sigma + 1$ Ecken

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2},\ \ldots\ P_{e_\sigma} = P_r,$$



und die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Polygonseite gegen die X-Achse sei q_λ; also

$$(18) \qquad q_\lambda = \frac{m_{e_{\lambda+1}} - m_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda}.$$

Es ist dann offenbar

$$(19) \qquad q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{\sigma-1}.$$

Betrachten wir nun wieder wie in § 1 die Differenzengleichung

$$(12) \qquad D_{\nu+r} + \frac{f_1(\varrho_0 + \nu + r - 1)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{f_r(\varrho_0 + \nu)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq N),$$

so wird hierin der Koeffizient von $D_{\nu+r-h}$ die Form

$$\frac{f_h(\varrho_0 + \nu + r - h)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} = \frac{c_{m_h, h}}{c_{m_0, 0}} \nu^{m_h - m_0}(1 + \eta)$$

haben, wo η mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Konstruiert man also in Bezug auf diese Differenzengleichung das NEWTON-PUISEUXsche Polygon nach der Vorschrift von § 5 der vorausgehenden Abhandlung (pag. 132), so wird sich diese Konstruktion von der soeben ausgeführten nur dadurch unterscheiden, dass die X-Achse parallel mit sich um die Strecke m_0 verschoben ist. An dem Polygon selbst aber, und insbesondere auch an den Neigungswinkeln seiner Seiten gegen die X-Achse wird nichts geändert. Nach Satz 4 pag. 135 *hat also die Differenzengleichung* (12) *ein Fundamentalsystem von r Lösungen*

$$D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)},$$

die derart in σ Klassen zerfallen, dass die $(\sigma - \lambda)^{\text{te}}$ Klasse $(\lambda = \sigma - 1, \sigma - 2, \ldots 1, 0)$ genau $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ Lösungen enthält, und dass diese Lösungen und ihre linearen Kombinationen den Ungleichungen genügen:

$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_\lambda}$ *für alle hinreichend grossen* ν

$|D_\nu| > m^\nu(\nu!)^{q_\lambda}$ *für unbegrenzt viele* ν.

12. Ich bezeichne nun, der Terminologie von VIVANTI-GUTZMER[1] folgend, als μ-Index einer Potenzreihe $\Sigma D_\nu x^\nu$ oder auch allgemeiner einer Reihe der Form $\Sigma D_\nu x^{\varrho_0+\nu}$ diejenige reelle Zahl μ, welche durch die Forderung eindeutig bestimmt ist, dass bei jedem positiven ε die Ungleichungen

$$|D_\nu| < \frac{1}{(\nu!)^{\mu-\varepsilon}} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu$$

$$|D_\nu| > \frac{1}{(\nu!)^{\mu+\varepsilon}} \text{ für unbegrenzt viele } \nu$$

bestehen. Ist aber $|D_\nu|$ kleiner als eine beliebig hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$, wenn nur ν genügend gross, so ist der μ-Index gleich $+\infty$; dies ist insbesondere der Fall, wenn von einem gewissen ν ab alle D_ν verschwinden, wenn also die Reihe eine *endliche* ist.

Ist der μ-Index positiv, so konvergiert die Reihe beständig; ist er negativ, so divergiert sie beständig. Ist er aber Null, so kann der Konvergenzradius gleich null, endlich oder unendlich sein.

Ich behaupte dann, *dass der μ-Index einer jeden Reihe der Form*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu},$$

welche formal die Differentialgleichung (1) *befriedigt, notwendig eine der Zahlen*

$$-q_0,\ -q_1,\ \ldots -q_{\sigma-1},\ +\infty$$

sein muss. Denn die Koeffizienten D_ν für $\nu \geqq N$ müssen, damit die Reihe die Differentialgleichung (1) formal befriedigt, den Gleichungen (12) genügen, sich also linear aus den r Fundamentallösungen, $D_\nu^{(1)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ zusammensetzen:

$$D_\nu = a_1 D_\nu^{(1)} + a_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + a_r D_\nu^{(r)}.$$

Sind hiebei alle Koeffizienten $a_i = 0$, so ist $D_\nu = 0$ für $\nu \geqq N$, also der μ-Index gleich $+\infty$. Sind aber nicht alle $a_i = 0$, so sei die Zahl λ aus der Reihe $0, 1, \ldots \sigma - 1$ so gewählt, dass die $(\sigma-\lambda)^{\text{te}}$ Klasse die letzte ist, deren Lösungen

[1] *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leigzig 1906, pag. 229.

nicht sämtlich den Koefficienten $a_i = 0$ haben. Dann ergibt sich aus dem oben gesagten unter Berücksichtigung der Ungleichungen (19):

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu$$

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für unbegrenzt viele } \nu,$$

sodass jetzt der μ-Index gleich $-q_\lambda$ ist. W. z. b. w. Zugleich zeigt unsere Analyse, das der μ-Index nur dann gleich $+\infty$ ist, wenn die Reihe abbricht; ferner, dass, wenn der μ-Index gleich Null ist, der Konvergenzradius zwischen positiven Grenzen liegt $\left(\frac{1}{M} \text{ und } \frac{1}{m}\right)$. *Insbesondere ist daher bei einer beständig konvergenten Integralreihe der μ-Index stets positiv, nicht null.*

Damit ist keineswegs gesagt, dass jeder dieser möglichen μ-Indices nun auch wirklich vorkommt. Dies wäre allerdings der Fall, wenn die Koeffizienten D_ν bloss den Gleichungen (12) zu genügen hätten, welche r von diesen Keofficienten willkürlich lassen. In Wirklichkeit sind aber, damit die Differentialgleichung (1) formal befriedigt wird, ausserdem noch die Gleichungen (11) zu erfüllen, welche im allgemeinen diese Willkürlichkeit bedeutend einschränken und dadurch einige der möglichen μ-Indices ausschliessen.

13. Bedeutet D_ν eine beliebige Lösung von (12), die sich schon linear aus den $r - e_\lambda$ Fundamentallösungen der $\sigma - \lambda$ ersten Klassen zusammensetzt, so ist nach obigem gewiss für alle hinreichend grossen Werte von ν

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}.$$

Jede andre Lösung von (12) dagegen, bei deren linearer Zusammensetzung aus den r Fundamentallösungen also auch mindestens eine aus den λ letzten Klassen einen Koefficienten $a_i \neq 0$ hat, genügt eben deshalb und wegen (19) für unbegrenzt viele Werte von ν der mit der vorigen unverträglichen Ungleichung:

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{q_\lambda - 1}.$$

Daraus folgt nun, dass es genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen von (12) gibt, welche der Ungleichung

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

für hinreichend grosse Werte von ν genügen; nämlich die und nur die, welche sich schon aus den $r - e_\lambda$ Fundamentallösungen der $\sigma - \lambda$ ersten Klassen zusammensetzen. Diese $r - e_\lambda$ Lösungen lassen sich offenbar charakterisieren durch e_λ von einander unabhängige Gleichungen:

$$\gamma^{(\lambda)}_{K,0} D_N + \gamma^{(\lambda)}_{K,1} D_{N+1} + \cdots + \gamma^{(\lambda)}_{K,r-1} D_{N+r-1} = 0 \qquad (K = 1, 2, \ldots e_\lambda). \tag{20}$$

Nun kann man an diese Gleichungen ganz die nämlichen Folgerungen knüpfen, wie in § 1 an die analogen Gleichungen (14). An Stelle der Matrix (17) tritt dann offenbar die folgende:

$$\left|\begin{array}{l} f_1(\varrho_0)\, f_0(\varrho_0+1) \\ f_2(\varrho_0)\, f_1(\varrho_0+1)\, f_0(\varrho_0+2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad f_r(\varrho_0+N-1)\, f_{r-1}(\varrho_0+N) \ldots f_0(\varrho_0+N+r-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma^{(\lambda)}_{1,0} \cdots\cdots \gamma^{(\lambda)}_{1,r-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma^{(\lambda)}_{e_\lambda,0} \cdots\cdots \gamma^{(\lambda)}_{e_\lambda,r-1} \end{array}\right|, \tag{21}$$

und man erhält das

Theorem III. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass man die Differentialgleichung* (1) *durch genau s linear unabhängige Reihen der Form*

$$y = x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

formal befriedigen kann, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, und wo

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

für alle hinreichend grossen Werte von ν sein soll, besteht darin, dass die Matrix (21) *vom Rang $N + r - s$ ist.*

Man bemerke, dass es sehr wohl mehr als $r - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen von der in diesem Theorem angegebenen Beschaffenheit geben kann, obwohl die Differenzengleichung (12) nur $r - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen hat, welche der verlangten Ungleichung genügen. Ist die Anzahl der betreffenden Reihen etwa gleich $r - e_\lambda + \alpha$, so ist aber klar, dass sich durch lineare Zusammensetzung daraus mindestens α Reihen ergeben müssen, welche der trivialen Lösung von (12): $D_\nu = 0$ für $\nu \geqq N$ entsprechen. Die Differentialgleichung (1) hat also dann mindestens α Integrale, welche, vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen, Polynome sind.

14. Das Theorem III führt nun wieder leicht zu solchen Bedingungen, die von den $\gamma_{K,i}^{(\lambda)}$ frei sind und die wenigstens hinreichen. Der Process ist dabei wörtlich der gleiche, der zu den Korollaren I, II führte, sodass ich wieder gleich das Resultat angeben kann.

Korollar III. *Wenn die Matrix A_N (pag. 46) vom Rang $N + r - s$ ist, so gibt es mindestens $s - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen der Form*

$$x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu,$$

welche die Differentialgleichung (1) *formal befriedigen, und deren Koeffizienten den Ungleichungen*

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

genügen für alle hinreichend grossen Werte von ν.

Korollar IV. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots; h + i < p),$$

so gibt es wenigstens $p - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen von der in Korollar III angegebenen Beschaffenheit.

Mit diesen Sätzen ist übrigens keineswegs gesagt, dass der μ-Index der betreffenden Reihen gleich $-q_\lambda$ ist, sondern nur dass er nicht kleiner sein kann als $-q_\lambda$. Er kann aber sehr wohl für einige oder alle Reihen auch grösser sein.

15. Die Zahlen $q_0, q_1, \ldots q_{\sigma-1}$, welche den Ungleichungen (19) genügen, können alle positiv sein, d. h. die Seiten des Newtonschen Polygons alle von links nach rechts aufsteigend. In diesem Fall nützen uns die obigen Sätze nichts, da sie ja nur aussagen, dass der μ-Index mindestens gleich einer gewissen negativen Zahl $-q_\lambda$ ist, also die Konvergenz der betreffenden Reihen nicht verbürgen. Da wir überdies aber wissen, dass der μ-Index eine der Zahlen $-q_\lambda$ oder $+\infty$, also im gegenwärtigen Fall entweder negativ oder $+\infty$ sein muss, so kommt eine konvergente Reihe überhaupt nur zu Stande, wenn er $+\infty$ ist. Aber dieser Fall tritt wieder nur ein, wie wir sahen, wenn die Reihe abbricht. Wenn also alle Zahlen q_λ positiv sind, so muss ein Integral der Form $x^{\varrho_0}\sum D_\nu x^\nu$ vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen notwendig ein Polynom sein, sodass dieser Fall nach Theorem II vollständig erledigt werden kann.

Sind dagegen unter den Polygonseiten auch solche, die horizontal verlaufen oder von links nach rechts absteigen, d. h. sind die Zahlen $q_0, q_1, \ldots q_{\sigma-1}$ alle oder zum Teil $\leqq 0$, so wenden wir unsere Resultate speziell auf diejenigen Werte von λ an, für welche $q_\lambda \leqq 0$ ist. Die betreffenden Reihen liefern dann wirkliche Integrale der Differentialgleichung (1), weil die Ungleichungen, denen die D_ν genügen, Konvergenz erzwingen, für $q_\lambda < 0$ sogar beständige Konvergenz.

16. Ein Beispiel mag die Sache illustrieren. Untersuchen wir die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(ax^2 + bx^3)\frac{d^4y}{dx^4} + c\frac{d^3y}{dx^3} + dxy = 0,$$

wo die Konstanten a, b, c, d von Null verschieden sein mögen. Um sie auf die Normalform zu bringen, müssen wir mit x^3 multiplizieren, es kommt dann:

$$x^4(ax + bx^2)\frac{d^4y}{dx^4} + x^3c\frac{d^3y}{dx^3} + dx^4y = 0,$$

also ist $m = 4$, $r = 4$; ferner

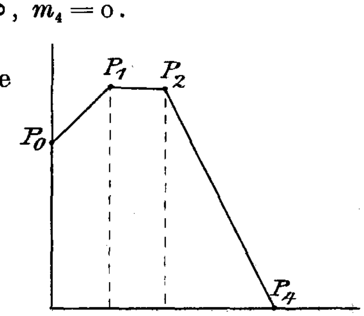
$$c_{4,1} = a,\ c_{4,2} = b,\ c_{3,0} = c,\ c_{0,4} = d,$$

während die übrigen $c_{i,k}$ den Wert Null haben. Die Funktionen $f_h(\varrho)$ sind daher die folgenden:

$$\begin{aligned}
f_0(\varrho) &= c\varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)\\
f_1(\varrho) &= a\varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3)\\
f_2(\varrho) &= b\varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3)\\
f_3(\varrho) &= 0\\
f_4(\varrho) &= d;
\end{aligned}$$

also

$$m_0 = 3,\ m_1 = 4,\ m_2 = 4,\ m_3 = -\infty,\ m_4 = 0.$$



Das Polygon hat infolgedessen die nebenstehende Gestalt und man findet:

$$e_0 = 0,\ e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 4$$

$$q_0 = 1,\ q_1 = 0,\ q_2 = -2.$$

Ferner ist

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0(2) = f_1(0) = f_1(1) = f_2(0) = 0,$$

sodass man bei Anwendung des Korollar IV $\varrho_0 = 0$ und $p = 3$ setzen kann. Man erhält dann mindestens

$$p - e_0 = 3 \text{ Reihen, für welche } |D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_0} = M^\nu \nu!,$$

$$p - e_1 = 2 \text{ Reihen, für welche } |D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_1} = M^\nu,$$

$$p - e_2 = 1 \text{ Reihe, für welche } |D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_2} = \frac{M^\nu}{(\nu!)^2}$$

ist. Es giebt also mindestens drei der Differentialgleichung formal genügende Potenzreihen. Unter diesen finden sich mindestens zwei, die einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben, also zwei im Nullpunkt analytische Integrale. Unter diesen wieder ist mindestens eines, bei dem $|D_\nu| < \frac{M^\nu}{(\nu!)^2}$ ist, welches also eine ganze Funktion von x darstellt. Um deren μ-Index genau festzustellen, beachte man, dass er nur die Werte $-q_2 = 2$ oder $+\infty$ haben kann. Wäre er $+\infty$, so müsste die Reihe abbrechen; die Differentialgleichung hätte dann ein Polynom zum Integral. Dies kann aber nach den Erörterungen am Ende von No. 9 nicht sein, weil sich $f_r(\varrho) = f_4(\varrho)$ auf die Konstante d reduziert. Die Differentialgleichung hat also mindestens eine ganze Funktion zum Integral; diese ist notwendig transcendent, und ihr μ-Index ist gleich 2.

Wenn die Koeffizienten a, b, c, d gewissen Bedingungen genügen, so kann es auch mehr als zwei im Nullpunkt analytische Integrale geben, oder auch mehr als ein Integral, das eine ganze transcendente Funktion ist. Auf keinen Fall aber gibt es mehr als $r - e_1 = 3$ im Nullpunkt analytische Integrale, und auch nicht mehr als $r - e_2 = 2$ Integrale, die ganze Funktionen sind. Denn nach den an Theorem III angeschlossenen Erörterungen müsste die Differentialgleichung dann auch ein Polynom als Integral zulassen, was aber nicht der Fall ist.

17. In den Sätzen dieses Paragraphen sind die des vorigen als Spezialfall enthalten. Denn wenn $c_{m,e}$ die erste der Zahlen $c_{m,h}$ ist, welche nicht verschwindet, wenn also $f_e(\varrho)$ das erste der Polynome $f_h(\varrho)$ ist, welches den m^{ten} Grad erreicht, so ist

$$m_e = m$$

$$m_h \leqq m - 1 \text{ für } h < e.$$

Bei der Konstruktion des Newton'schen Polygons erweist sich demnach der Punkt P_e als Ecke, und zwar sind die Polygonseiten bis zum Punkt P_e aufsteigend, von P_e an aber horizontal oder absteigend. Unter den Zahlen e_λ kommt daher insbesondere die Zahl e vor, und für $e_\lambda = e$ ist

$$q_\lambda \leqq 0, \quad q_{\lambda-1} > 0.$$

Setzt man diese Werte von e_λ und q_λ in die Sätze dieses Paragraphen ein, so gehen die des § 1 daraus hervor.

18. Ein zweiter wichtiger Spezialfall ist folgender.

Sei $c_{m,\varepsilon}$ die *letzte* der Zahlen $c_{m,h}$, welche nicht verschwindet, also $f_\varepsilon(\varrho)$ das letzte der Polynome $f_h(\varrho)$, welches den m^{ten} Grad erreicht. Dann ist natürlich $\varepsilon \geqq e$; ferner

$$m_\varepsilon = m$$

$$m_h \leqq m - 1 \text{ für } h > \varepsilon.$$

Es wird also auch P_ε ein Eckpunkt des NEWTON'schen Polygons; die Seiten sind bis P_e aufsteigend; dann folgt eine horizontale bis P_ε; der Rest ist absteigend. Es wird also unter den Zahlen e_λ auch die Zahl ε vorkommen, und für $e_\lambda = \varepsilon$ ist

$$q_\lambda < 0, \quad q_{\lambda-1} \geqq 0.$$[1]

Man sieht leicht, dass sogar

$$q_\lambda \leqq \frac{-1}{r - \varepsilon}$$

wird. Denn es ist

$$m_{e_\lambda} = m_\varepsilon = m; \quad m_{e_{\lambda+1}} \leqq m - 1; \quad e_\lambda = \varepsilon; \quad e_{\lambda+1} \leqq r;$$

daher

$$q_\lambda = \frac{m_{e_{\lambda+1}} - m_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leqq \frac{-1}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leqq \frac{-1}{r - \varepsilon}.$$

Da alle beständig konvergenten Integralreihen, wie pag. 152 festgestellt wurde, notwendig einen positiven μ-Index haben, sodass der Wert $-q_{\lambda-1}$ dafür nicht mehr in Betracht kommt, so besagt Theorem III für $e_\lambda = \varepsilon$:

Theorem IV. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale hat, welche abgesehen vom Faktor x^{ϱ_0} ganze Funktionen von x sind, besteht darin, dass die Matrix* (21) *für $e_\lambda = \varepsilon$ vom Rang $N + r - s$ ist.*

[1] Offenbar ist $q_{\lambda-1} = 0$ für $e < \varepsilon$; dagegen $q_{\lambda-1} > 0$ für $e = \varepsilon$.

Der μ-Index der betreffenden ganzen Funktionen ist mindestens gleich $\frac{1}{r-\varepsilon}$. *Dabei bedeutet ε die grösste der Zahlen $h = 0, 1, \ldots r$, für welche $c_{m,h} \neq 0$ ist.*

Ebenso folgt aus den Korollaren III und IV:

Korollar V. *Wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, so hat die Differentialgleichung (1) mindestens $s - \varepsilon$ linear unabhängige Integrale von der gleichen Beschaffenheit wie in Theorem IV.*

Korrollar VI. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots; h + i < p),$$

so gibt es mindestens $p - \varepsilon$ derartige Integrale.

19. Wir wollen nun neben der unteren Grenze $\frac{1}{r-\varepsilon}$ für den μ-Index auch eine obere angeben. Zwar kann der μ-Index gleich $+\infty$ sein; aber nur dann, wenn die betreffende ganze Funktion ein Polynom ist. Ist sie dagegen transcendent, so ist der μ-Index eine der Zahlen $-q_\lambda$. Da aber nach Definition

$$-q_\lambda = \frac{m_{e_\lambda} - m_{e_{\lambda+1}}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leqq \frac{m - 0}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leqq m$$

ist, so ergibt sich

Theorem V. *Genügt eine ganze transcendente Funktion von x einer linearen homogenen Differentialgleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so ist ihr μ-Index ein positiver Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner, wobei der Zähler höchstens gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist. Insbesondere ist also der μ-Index selbst höchstens gleich dieser Ordnung.*

Dass der μ-Index wirklich den angegebenen Maximalwert erreichen kann, zeigt das Beispiel der Funktion

$$\sum_{\nu=m-1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!\,(\nu-1)!\ldots(\nu-m+1)!},$$

welche der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$x^{m-1}\frac{d^m y}{dx^m} - y = 0$$

genügt. Allgemeinere Differentialgleichungen dieser Art habe ich in § 7 der zitierten Arbeit in den Mathematischen Annalen behandelt.

Der letzte Teil von Theorem V lässt sich noch folgendermassen verallgemeinern:

Theorem VI. *Wenn mehrere ganze transcendente Funktionen*

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots F_k(x)$$

die Eigenschaft haben, dass auch jede lineare Verbindung

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_k F_k(x)$$

transcendent bleibt, und wenn sie ein und derselben linearen homogenen Differentialgleichung genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so ist die Summe ihrer μ-Indices höchstens gleich der Ordnung dieser Differentialgleichung.

Offenbar kommt nämlich der μ-Index $-q_\lambda$ höchstens so oft vor, als die Differenzengleichung (12) linear unabhängige Lösungen der $(\sigma-\lambda)^{\text{ten}}$ Klasse hat; deren sind es aber $e_{\lambda+1}-e_\lambda$. Also ist die Summe sämtlicher μ-Indices höchstens gleich

$$\sum_{e_\lambda \geqq \varepsilon} (e_{\lambda+1}-e_\lambda)(-q_\lambda) = \sum_{e_\lambda \geqq \varepsilon} (m_{e_\lambda} - m_{e_{\lambda+1}})$$
$$= m - m_r \leqq m. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§ 3.

20. Aus den bisher bewiesenen allgemeinen Theoremen sollen nun noch die wichtigsten darin enthaltenen Spezialfälle hergeleitet werden, welche sich auf die Existenz von Partikulärintegralen beziehen, die in einem singulären Punkt analytisch sind, d. h. gewöhnliche Potenzreihen.

Theorem VII. *Sind die Koeffizienten einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome, so sind in einer s-fachen Nullstelle des Koeffizienten der höchsten Ableitung mindestens $m-s$ Integrale analytisch.*

Beweis. Wählen wir als die betreffende Stelle den Nullpunkt, so hat die Differentialgleichung die Gestalt

$$(22) \qquad x^s Q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + x^{s_1} Q_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{s_{m-1}} Q_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + x^{s_m} Q_m(x)\, y = 0,$$

wobei die Polynome $Q_i(x)$ im Nullpunkt nicht mehr verschwinden. Von den Exponenten $s, s_1, \ldots s_m$ ist mindestens einer gleich Null; sonst könnte man durch x dividieren, und der Nullpunkt wäre dann keine s-fache Nullstelle des höchsten Koeffizienten.

Wir setzen nun der Gleichmässigkeit halber $s = s_0$ und bezeichnen die kleinste der Zahlen

$$s_0 + 0, \ s_1 + 1, \ s_2 + 2, \dots s_m + m$$

mit q. Es ist also

$$(23) \qquad s_i + i \geqq q \qquad (i = 0, 1, \dots m),$$

aber für mindestens einen Index j:

$$(24) \qquad s_j + j = q.$$

Durch Multiplikation mit x^{m-q} gewinnt man dann für die Differentialgleichung (22) die folgende Normalform:

$$(25) \qquad \begin{gathered} x^m (x^{s_0-q} Q_0) \frac{d^m y}{d x^m} + x^{m-1} (x^{s_1+1-q} Q_1) \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + x^{m-2} (x^{s_2+2-q} Q_2) \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} \\ + \cdots + (x^{s_m+m-q} Q_m) y = 0. \end{gathered}$$

Bringt man diese mit (1) zur Deckung, so ist offenbar wegen (24)

$$c_{m-j,0} \neq 0,$$

es ist also die Forderung (2) pag. 141 erfüllt. Ferner ist bei richtiger Wahl der Zahl r natürlich auch (3), endlich auch (4) erfüllt, da ja die Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung ist. Die Gleichung (25) hat also die Form, wie wir sie unsern seitherigen Untersuchungen zu Grunde legten.

Dabei ist unter den Zahlen

$$c_{m,0}, \ c_{m,1}, \ \dots c_{m,r}$$

offenbar c_{m, s_0-q} die *erste* von Null verschiedene, sodass wir

$$e = s_0 - q$$

setzen müssen. Ebenso ist allgemein die erste von Null verschiedene unter den Zahlen

$$c_{i,0}, \ c_{i,1}, \ \dots c_{i,r}$$

diejenige, deren zweiter Index gleich $s_{m-i} + m - i - q$ ist. Es wird also

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h < s_{m-i} + m - i - q.$$

Oder a fortiori, da doch $s_{m-i} \geqq 0$ ist:

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i < m - q.$$

Dies ist aber nach der Definition der Funktionen $f_h(\varrho)$ (pag. 142) offenbar gleichbedeutend mit

$$f_h(i) = 0 \text{ für } h + i < m - q.$$

Bei Anwendung des Korollar II können wir also

$$\varrho_0 = 0, \; p = m - q, \; e = s - q$$

setzen, wodurch wir das Resultat erhalten, dass es mindestens $p - e = m - s$ linear unabhängige Integrale der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

gibt. Damit ist aber Theorem VII bewiesen.

21. Hieraus folgt auch leicht das folgende

Theorem VIII. *Sind die Koeffizienten einer linaren homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome, und ist der Koeffizient der höchsten Ableitung speziell vom s^{ten} Grad, so sind mindestens $m - s$ Integrale im Endlichen überall analytisch, also ganze Funktionen.*

Wie dieses Theorem aus dem vorhergenden hergeleitet werden kann, habe ich l. c. (Math. Annal. Bd. 66 pag. 475 f.) gezeigt, denn dass ich mich dort auf den von Herrn Poincaré angegebenen Spezialfall beschränkt habe, wo auch die übrigen Koeffizienten nur vom s^{ten} Grad sind, spielt dabei keine Rolle. Ich kann also hier von einer Wiederholung dieses Beweises absehen. Der Satz lässt sich aber auch ganz direkt gewinnen ohne den Umweg über Theorem VII. Die Differentialgleichung sei

$$Q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + Q_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + Q_m(x)\, y = 0, \tag{26}$$

wobei also das Polynom $Q_0(x)$ vom s^{ten} Grad ist. Wir untersuchen jetzt die Integrale in der Umgebung einer *regulären* Stelle, welche wir der einfacheren Schreibweise halber in den Nullpunkt legen, sodass $Q_0(0) \neq 0$ ist. Multipliziert man mit x^m so kommt

$$x^m Q_0 \frac{d^m y}{dx^m} + x^{m-1}(x Q_1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + x^{m-2}(x^2 Q_2)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + (x^m Q_m)y = 0. \tag{27}$$

Diese Differentialgleichung hat offenbar wieder die Normalform, wie wir sie unsern früheren Untersuchungen zu Grunde legten, und es ist speziell $c_{m,0} \neq 0$. Weil $Q_0(x)$ vom s^{ten} Grad, so ist ferner unter den Zahlen

$$c_{m,0},\; c_{m,1},\; \ldots\; c_{m,r}$$

offenbar $c_{m,s}$ die *letzte* von Null verschiedene. Bei Anwendung des Korollar VI ist also $\varepsilon = s$ zu setzen. Ausserdem ist

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i < m,$$

was wieder gleichbedeutend ist mit

$$f_h(i) = 0 \text{ für } h + i < m.$$

Wir werden also in Korollar VI noch $\varrho_0 = 0$, $p = m$ einsetzen, und erhalten dann mindestens $p - \varepsilon = m - s$ linear unabhängige Integrale, welche ganze Funktionen von x sind. W. z. b. w.

22. Wenn der Grad der Polynome $Q_i(x)$ genauer angegeben ist, so lassen sich auch nähere Angaben über den μ-Index dieser ganzen Funktionen machen. Seien etwa $Q_1, \ldots Q_m$ nicht von höherem Grad wie Q_0 d. h. höchstens vom s^{ten} Grad. Dann ist

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i > m + s$$

$$c_{m,s} \neq 0.$$

Von den Zahlen

$$c_{0,h},\; c_{1,h},\; \ldots\; c_{m,h}$$

sind daher die $h - s$ letzten gleich Null; also ist, wenn wieder m_h die auf pag. 149 angegebene Bedeutung hat:

$$m_h \leqq m - h + s, \tag{28}$$

$$m_s = m. \tag{29}$$

Bei dem Newtonschen Polygon ist daher der Punkt P_s mit den Koordinaten s, $m_s = m$ ein Eckpunkt. Bis zu ihm steigen die Polygonseiten an oder laufen horizontal. Von da aus aber senken sie sich, und zwar, da die Ordinaten der folgenden Punkte P_{s+j} nach (28) höchstens gleich $m-j$ sind, sodass diese Punkte alle unterhalb oder auf der durch P_s gehenden Geraden

$$y = -x + m + s$$

liegen, *mit einem Neigungswinkel von mindestens* 45° *gegen die X-Achse.* Es ist also

$$q_\lambda \leqq -1,$$

und folglich der μ-Index einer jeden ganzen Funktion, die der Differentialgleichung genügt, mindestens gleich 1. Dies ergibt

Theorem IX. *Sind die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome höchstens s^{ten} Grades, und speziell der Koeffizient der m^{ten} Ableitung genau vom s^{ten} Grad, so ist für jede ganze Funktion, die der Differentialgleichung genügt, der μ-Index mindestens gleich* 1.

Dieses Theorem gilt auch für $s \geqq m$, sofern die Differentialgleichung dann überhaupt ganze Funktionen als Integrale zulässt, was aber nur ausnahmsweise der Fall ist. Für $s < m$ gibt es nach Theorem VIII immer solche Integrale, und zwar mindestens $m - s$ linear unabhängige.

Speziell wird also eine lineare Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten lauter ganze Funktionen als Integrale haben, und deren μ-Indices sind mindestens gleich 1. Da aber anderseits bei einer solchen Differentialgleichung die letzte der Funktionen $f_h(\varrho)$ sich offenbar auf eine Konstante reduziert, so hat sie jedenfalls kein Polynom zum Integral, sodass nach Theorem VI die Summe der μ-Indices ihrer m Integrale höchstens gleich m sein kann. Beide Resultate zusammengenommen besagen aber, dass für jedes Integral der μ-Index genau gleich 1 ist. Dies lässt sich auch leicht direkt bestätigen. Denn jedes Integral setzt sich ja bekanntlich linear zusammen aus m Funktionen der Form

$$x^n e^{\alpha x}.$$

Der μ-Index einer solchen linearen Kombination ist aber, wie leicht zu sehen, der gleiche wie bei der Exponentialfunktion, also in der Tat gleich 1.

München im Dezember 1908.