SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES SÉRIES DE DIRICHLET.

Par

MARCEL RIESZ

à STOCKHOLM.

(Lettre à M. MITTAG-LEFFLER.)

Je me permets de vous adresser un résumé sommaire des recherches que je vous avais communiquées dans mes lettres du 28 décembre 1909 et du 12 juin 1910.

Considérons une série de DIRICHLET

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

$$(0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1};\ \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty) \tag{2}$$

qui ait la droite de convergence $R(s) = d$, d désignant une quantité réelle, finie. Désignons par $f(s)$ la fonction analytique, représentée par la série dans le demi-plan $R(s) > d$. Comme nous apprend la théorie des séries entières, la droite $R(s) = d_1$ étant la droite de convergence de la série

$$f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns},$$

il y a nécessairement des points singuliers de la fonction $f_1(s)$ sur cette droite. On sait que cela n'est plus vrai en général, quand les λ_n désignent des nombres quelconques (satisfaisant toujours à la condition (2)). P. e. la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \tag{3}$$

a la droite de convergence $R(s) = 0$. Néanmoins, la fonction qu'elle représente dans le demi-plan $R(s) > 0$, est une fonction entière.

Nous sommes forcément conduits à conclure que dans ce cas et dans des cas pareils, c'est une singularité située à l'infini qui détruit la convergence au-delà de la droite de convergence.

Dans deux Notes des »Comptes Rendus» j'ai introduit une méthode de sommation (généralisation de la méthode des moyennes arithmétiques) que j'ai appelée méthode des *moyennes typiques* (5 juillet et 22 novembre 1909). Les expressions fournies par cette méthode convergent aussi ou dans le plan tout entier, ou dans un demi-plan, ou enfin elles divergent partout. C'est le second cas qui nous intéresse surtout. Le demi-plan de sommabilité peut être beaucoup plus étendu que le demi-plan de convergence, mais, pour la droite de sommabilité se présente le même fait qui se présentait pour la droite de convergence. *Elle ne contient pas nécessairement de point singulier sur sa partie finie.*[1]

Je vais montrer que par une généralisation convenable des méthodes fondées sur l'emploi de l'intégrale de LAPLACE-ABEL, on arrive à des expressions limites qui n'ont aucun inconvénient à cet égard. Lorsque la fonction est entière, nos expressions limites la représentent dans tout le plan. Au cas contraire, *la frontière du domaine de convergence contient au moins un point singulier fini.* De plus, par votre artifice d'introduire dans les expressions un certain paramètre tendant vers zéro, *on obtient des expressions limites multiples qui convergent à l'intérieur de l'étoile principale de la fonction et divergent à son extérieur.* Du reste, *la notion d'étoile que vous avez introduite en Analyse, joue ici le même rôle fondamental que dans la théorie des séries entières.*

La recherche des singularités d'une fonction définie par une série de TAYLOR, commence par la détermination du rayon de convergence. Il y correspondrait, pour les séries de DIRICHLET, la détermination de leur abscisse de convergence. Or, comme nous avons dit, la connaissance de cette abscisse et même celle des abscisses de sommabilité, ne nous apprend en général rien sur les singularités situées dans la partie finie du plan. Par contre, les résultats que je viens d'indiquer, nous fourniront immédiatement une méthode générale pour la recherche de ces singularités. Il me semble donc que les méthodes fondées sur l'intégrale de LAPLACE-ABEL ont même une plus grande importance dans le cas général que dans le cas particulier des séries entières.

*

[1] Ce fait a été déjà signalé (à un autre point de vue) par M. BOHR qui appliquait les moyennes arithmétiques entre autres à la série (3).

Permettez-moi de rappeler brièvement les résultats sur les séries entières que je vais généraliser dans la suite.

Envisageons la série entière

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

qui ait le rayon de convergence fini $R \neq 0$, et formons la fonction

$$\Phi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\underline{|n}} x^n, \tag{5}$$

qui, en vertu de notre supposition $R \neq 0$, est une fonction entière en x. Du reste, cette fonction et l'intégrale qui va suivre, interviennent déjà dans des recherches de Laplace et dans celles d'Abel.

M. Borel a démontré que l'on a

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega \tag{6}$$

dans un domaine qu'il appelait »*polygone de sommabilité*», *l'intégrale convergeant uniformément dans tout domaine fini, intérieur à celui-ci.*

M. Phragmén a établi à son tour que *l'intégrale ne peut converger à l'extérieur du domaine de* M. Borel, *ce domaine est* donc bien une »*étoile de convergence*» de l'expression (6) dans le sens que vous avez prêté à ce mot.

Le domaine, fixé par M. Borel, se définit de la manière suivante: Menons par chaque point singulier ξ de la fonction une droite, perpendiculaire au segment $(0, \xi)$. Les points du plan qui sont du même côté de chacune de ces droites que l'origine, constituent l'intérieur du domaine Borel.

On voit que ces points intérieurs x sont aussi caractérisés par le fait qu'on peut décrire autour de $\frac{x}{2}$ un cercle avec un rayon supérieur à $\frac{|x|}{2}$, tel que la fonction $F(x)$ soit régulière à son intérieur et sur sa périphérie.

Vous avez repris la question dans vos quatrième et cinquième Notes, et aussi dans votre conférence de Rome, *en démontrant que la généralisation de l'intégrale ci-dessus permet de représenter la fonction $F(x)$ dans toute son étoile principale.*

Formons la fonction entière

$$\Phi_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\underline{|\alpha n}} x^n; \qquad (0 < \alpha;\ \underline{|\alpha n} = \Gamma(\alpha n + 1)). \tag{7}$$

Vous avez établi l'égalité

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \Phi_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^\infty e^{-\omega} \Phi(\omega^a x)\, d\omega, \tag{8}$$

les intégrales du second membre possédant une certaine étoile de convergence $B^{(a)}$ et la convergence étant uniforme dans tout domaine fini, intérieur à cette étoile. Les étoiles $B^{(a)}$ ont en outre la double propriété extrêmement remarquable qu'elles s'approchent indéfiniment de l'étoile principale de la fonction, quand α tend vers zéro, et du cercle de convergence de la série, quand α croît indéfiniment.

Enfin dans *votre conférence*, vous avez donné le résultat à la fois simple et élégant que voici:

On a uniformément, dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile principale de la fonction, l'égalité:[1]

$$F(x) = \lim_{a=0} \left(a_0 + \frac{a_1}{\underline{|\alpha . 1}} x + \frac{a_2}{\underline{|\alpha . 2}} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha . n}} x^n + \cdots \right) = \lim_{a=0} \Phi_a(x). \tag{9}$$

Cela posé, revenons maintenant à l'étude des séries de DIRICHLET. Posons

$$e^{-s} = x, \tag{10}$$

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}. \tag{11}$$

Nous supposons de nouveau que notre série de DIRICHLET converge dans un certain demi-plan.

Quant à la fonction $F(x)$, selon les formules (10) et (11), elle doit être étudiée (en général), sur *la surface de* RIEMANN de la fonction $\log x$. Dans un certain voisinage de l'origine, $F(x)$ est définie sur tous les feuillets par le développement ci-dessus. On forme ensuite votre étoile principale à l'aide des points singuliers qu'on rencontre, en formant le prolongement analytique de la fonction ainsi définie, le long des demi-droites issues de l'origine.

Envisageons maintenant le plan de la variable s. *Excluons de ce plan les demi-droites parallèles à l'axe réel négatif, allant des points singuliers de la fonction $f(s)$ à l'infini. Le domaine a, qui reste, est la transformée de votre étoile principale par la substitution $s = -\log x$.*

La définition de l'étoile $B^{(a)}$ sur la surface de RIEMANN est essentiellement

[1] En vertu d'un théorème de M. BOREL, généralisé par M. PHRAGMÉN, l'étoile principale n'est pas nécessairement le domaine total de convergence de l'expressionlimite (9).

la même que celle que vous avez donnée pour le plan. Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile A, pour lesquels la courbe

$$(12)\qquad \begin{gathered} R\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 \\ -\alpha\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

est située à l'intérieur de l'étoile A, et appelons $B^{(\alpha)}$ l'étoile auxiliaire, obtenue de cette manière.

En ce qui concerne le plan de la variable $s = \sigma + it$, considérons le contour défini par les relations

$$(13)\qquad \sigma = \alpha \log\left(\cos\frac{t}{\alpha}\right), \qquad \left(-\alpha\frac{\pi}{2} < t < \alpha\frac{\pi}{2}\right)$$

et le domaine qu'il renferme

$$(13')\qquad \sigma < \alpha \log\left(\cos\frac{t}{\alpha}\right), \qquad \left(-\alpha\frac{\pi}{2} < t < \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Le contour passe par l'origine, il est symétrique par rapport à l'axe réel négatif et il a deux arcs allant à l'infini. Il s'approche indéfiniment de l'axe réel négatif, lorsque α tend vers zéro.

Soit ξ un point singulier quelconque de la fonction $f(s)$, et excluons du plan tous les points s tels que le point ayant pour affixe la différence $s - \xi$, tombe à l'intérieur du domaine (13'). Le contour limitant le domaine exclu est évidemment congruent au contour (13) et passe par le point ξ. En reprenant cette opération pour tous les points singuliers de la fonction $f(s)$, désignons par $b^{(\alpha)}$ le domaine restant. Nos formules (12) et (13) montrent que le domaine $b^{(\alpha)}$ dérive de l'étoile $B^{(\alpha)}$ au moyen de la substitution $s = -\log x$. Lorsque α tend vers zéro, le domaine $b^{(\alpha)}$ s'approche indéfiniment du domaine a.

Écrivons encore

$$(14)\qquad \Phi_\alpha(x) = \frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}} x^{\lambda_0} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}} x^{\lambda_1} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}} x^{\lambda_n} + \cdots; \quad \underline{|\alpha\lambda_n} = \Gamma(\alpha\lambda_n + 1)$$

et

$$(15)\qquad \varphi_\alpha(s) = \frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}} e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}} e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}} e^{-\lambda_n s} + \cdots$$

On peut facilement établir que *la série $\varphi_\alpha(s)$ converge partout* et qu'elle *représente* par conséquent une *fonction entière,* lorsque la série $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ a un domaine de convergence (plan entier ou demi-plan).

Ces préliminaires posés, je vais démontrer les théorèmes suivants:

I. *Le point s étant intérieur au domaine $b^{(\alpha)}$ appartenant à notre fonction f, on a l'égalité*

$$(16) \qquad f(s) = F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^v}\, \varphi_\alpha(s - \alpha v)\, e^v\, dv,$$

la seconde intégrale convergeant uniformément pour les points s d'un domaine fini[1] *quelconque, intérieur à $b^{(\alpha)}$ et divergeant à l'extérieur de $b^{(\alpha)}$. La première intégrale a les mêmes propriétés par rapport à l'étoile $B^{(\alpha)}$.*

II. *On a uniformément dans toute région finie*[1] *intérieure à l'étoile principale A, respectivement dans la région correspondante du domaine a*

$$(17) \qquad F(x) = \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}}\, x^{\lambda_0} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}}\, x^{\lambda_1} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}}\, x^{\lambda_n} + \cdots\right) = \lim_{\alpha=0} \Phi_\alpha(x),$$

$$(18) \qquad f(s) = \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}}\, e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}}\, e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}}\, e^{-\lambda_n s} + \cdots\right) = \lim_{\alpha=0} \varphi_\alpha(s).$$

Démonstration. La démonstration de nos énoncés se fonde essentiellement sur un corollaire immédiat du théorème connu que voici:

Supposons que *la série de* Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

converge au point s_0. Il en résulte qu'elle *converge uniformément dans le domaine infini*

$$-\vartheta \leqq \operatorname{Arg}(s - s_0) \leqq \vartheta; \quad 0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Nous n'avons besoin de ce théorème que dans la forme plus restreinte qui suit.

Sous la condition indiquée, *la série converge uniformément dans toute demi-bande infinie, définie par les inégalités:*

$$R(s - s_0) \geqq \delta > 0$$

et

$$|I(s)| \leqq \tau$$

τ désignant un nombre fini, positif quelconque.

---

[1] La marche de notre démonstration va montrer qu'on peut aussi admettre certains domaines infinis.

Pour simplifier la démonstration de (16), supposons d'abord $\alpha = 1$ et considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega.$$

Les raisonnements qu'on trouve dans les travaux de M. BOREL et dans votre quatrième Note, reposent sur le fait que la différence

$$F(x) - \int_0^\infty e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega \tag{20}$$

est égale à une intégrale complexe curviligne (dépendant de ω), dans laquelle intervient la fonction $F(z)$, le chemin d'intégration entourant l'origine et le point x.

Or, dans notre cas actuel, *l'origine est en général un point très singulier de la fonction*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

et les théorèmes de CAUCHY n'étant plus valables à son voisinage, la différence ci-dessus ne peut se mettre sous la forme mentionnée.

Toutefois, la difficulté n'est qu'apparente. En effet, grâce au théorème cité sur la convergence uniforme des séries de DIRICHLET, nous pouvons montrer facilement que la différence ci-dessus s'exprime par la même intégrale curviligne que dans le cas des séries entières, si l'on applique un chemin d'intégration convenable qui passe par l'origine, au lieu de l'entourer.

Décrivons en effet autour de l'origine comme centre un cercle quelconque et traçons deux rayons de ce cercle qui forment avec l'axe réel positif les angles $(1 + \varepsilon)\dfrac{\pi}{2}$ et $-(1+\varepsilon)\dfrac{\pi}{2}$; $(0 < \varepsilon \leqq 1)$. Désignons par U la courbe fermée, composée de ces deux rayons et du plus grand des arcs qu'ils interceptent sur la circonférence. On obtient de la formule de HANKEL par un simple changement de variable la formule suivante:

$$\frac{1}{\underline{|\gamma}} = \frac{1}{2\pi i}\int_U e^{\frac{1}{u}} u^{\gamma} \frac{du}{u} \tag{21}$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif.

Cette formule que vous avez déjà utilisée dans la théorie du prolongement analytique, me sert aussi de point de départ.

En effet, x étant un point donné quelconque, on peut choisir le rayon r du cercle considéré assez petit, pour que rx soit intérieur au cercle de convergence du développement

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}.$$

Dans cette hypothèse, la série

$$F(xu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (xu)^{\lambda_n} \tag{22}$$

est d'après le théorème cité[1] sur les séries de DIRICHLET, uniformément convergente pour les points u de la courbe U. On peut par conséquent intégrer cette série terme à terme le long de cette courbe et écrire

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_U e^{\frac{1}{u}} F(xu)\frac{du}{u} \tag{23}$$

ou par un changement de variable

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{U_x} e^{\frac{x}{z}} F(z)\frac{dz}{z}. \tag{24}$$

U_x désignant la courbe qu'on obtient en multipliant la courbe U par x. Les deux demi-droites dont les segments font partie de la courbe U_x, forment avec le segment $(0, x)$ les angles $\pm(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$. $(0 < \varepsilon \leqq 1)$.

Soit maintenant s un point intérieur au domaine $b^{(1)}$ correspondant à la fonction $f(s)$ et posons de nouveau

$$x = e^{-s}.$$

Dans notre condition, x sera intérieur à l'étoile $B^{(1)}$, on pourrait par conséquent, dans le cas des séries entières, remplacer la courbe U_x par un cercle de centre $\frac{x}{2}$ et de rayon supérieur à $\frac{|x|}{2}$, dans lequel la fonction $F(z)$ serait encore régulière. Nous avons déjà dit que ce cercle ne peut nous servir dans le cas général (le

[1] En effet, si l'on écrit (22) sous la forme $\Sigma\, a_n e^{-\lambda_n s}$, les points s qui correspondent aux points xu, sont tous situés dans une demi-bande (de largeur $(1+\varepsilon)\pi \leqq 2\pi$).

point $z = 0$ étant aussi singulier) que dans une forme modifiée. Reprenons à cet effet les deux vecteurs, issus de l'origine, formant avec le segment $(0, x)$ les angles $\pm (1 + \varepsilon) \frac{\pi}{2}$, et désignons par D et D' leurs points d'intersection avec la circonférence ci-dessus, décrite autour de $\frac{x}{2}$. La courbe H qui va nous servir, sera composée des segments entre l'origine et les points D et D' et du plus grand arc de la circonférence. Comme nous avons supposé que le point x était à l'intérieur de l'étoile $B^{(1)}$, nous pouvons choisir le rayon de la circonférence assez rapproché de $\frac{|x|}{2}$ pour qu'il n'y ait de points singuliers ni sur la courbe H, ni à son intérieur (sauf peut-être le point $z = 0$). On peut par conséquent appliquer le théorème de CAUCHY au domaine entre les courbes U_x et H et écrire

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^{\frac{x}{z}} F(z) \frac{dz}{z} \tag{25}$$

aussi bien que

$$\Phi_1(\omega x) = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^{\frac{\omega x}{z}} F(z) \frac{dz}{z}. \tag{26}$$

Il s'ensuit en intervertissant l'ordre des intégrations:

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^{\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)} \frac{F(z)}{\frac{x}{z} - 1} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{F(z)}{\frac{x}{z} - 1} \frac{dz}{z}$$

c'est à dire

$$F(x) - \int_0^\infty e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^{\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)} \frac{F(z)}{z - x} dz. \tag{27}$$

D'autre part, on a sur la courbe H

$$R\left(\frac{x}{z} - 1\right) < \mu < 0 \tag{28}$$

μ désignant une quantité facile à calculer. Par suite

$$\left| e^{\left(\frac{x}{z}-1\right)} \right| < e^{\mu} < 1 \tag{29}$$

d'où il résulte immédiatement que la dernière intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{\omega}$, c'est à dire

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi_1(\omega x)\, d\omega \tag{30}$$

et

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^v}\, \varphi_1(s - v)\, e^v\, dv. \tag{31}$$

On voit aussi que la première intégrale converge uniformément dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile $B^{(1)}$ et situé sur un nombre fini de feuillets de notre surface de RIEMANN. Nos remarques préliminaires montrent suffisamment que la convergence est uniforme même dans des domaines tels que les points à l'infini du domaine correspondant du plan des s tombent dans un angle

$$-\vartheta \leqq \operatorname{Arg} s \leqq \vartheta; \left[0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right]. \tag{32}$$

Le même raisonnement que M. PHRAGMÉN appliquait aux séries entières, prouve aussi dans notre cas général que les expressions (30) et (31) divergent nécessairement à l'extérieur des domaines correspondants $B^{(1)}$ et $b^{(1)}$.

Soit maintenant α un nombre positif quelconque. La démonstration que vous avez donnée pour vos théorèmes, repose sur les propriétés fondamentales de vos fonctions $E_\alpha(x)$ dont la découverte a inauguré tant de recherches nouvelles.

Ici, je vais suivre une voie directe qui peut avoir un certain intérêt aussi au point de vue des séries entières.

La formule de HANKEL nous donne de nouveau la relation

$$\Phi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}} x^{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_U e^{u^{\frac{1}{\alpha}}} F(xu^\alpha)\frac{du}{u}. \tag{33}$$

qu'on trouve dans votre cinquième Note (pour les séries entières.)

Supposons maintenant que le point s soit intérieur au domaine $b^{(\alpha)}$. On peut alors trouver un contour $H^{(\alpha)}$ passant par l'origine, renfermant le point $x = e^{-s}$ tel que $F(z)$ n'ait de point singulier ni sur ce contour, ni à son intérieur, et de plus que l'on ait

$$R\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) < \mu < 0, \tag{34}$$

pour tous les points z du contour $H^{(\alpha)}$.[1]

Puis, on a par un simple changement de variable

$$(35) \qquad \Phi_\alpha(\omega^\alpha x) = \frac{1}{2\alpha\pi i}\int\limits_{H^{(\alpha)}} e^{\omega\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} F(z)\frac{dz}{z}$$

et

$$(36) \quad \int\limits_0^\infty e^{-\omega}\Phi(\omega^\alpha x)\,d\omega = \frac{1}{\alpha 2\pi i}\int\limits_{H^{(\alpha)}} e^{\omega\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}\frac{dz}{z} - \frac{1}{\alpha 2\pi i}\int\limits_{H^{(\alpha)}}\frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}\frac{dz}{z}.$$

Le point $z = x$ étant un pôle simple, avec le résidu $-\alpha x$, de la fonction

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}$$

la dernière intégrale est égale à $F(x)$. On peut donc écrire

$$(37) \qquad F(x) - \int\limits_0^\infty e^{-\omega}\Phi_\alpha(\omega^\alpha x)\,d\omega = -\frac{1}{\alpha 2\pi i}\int\limits_{H^{(\alpha)}} e^{\omega\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}\frac{dz}{z}.$$

L'inégalité (34) montre très nettement que le second membre tend vers zéro avec α, de sorte que l'on a

$$F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\omega}\Phi(\omega^\alpha x)\,d\omega.$$

Les remarques q e nous avons faites dans le cas $\alpha = 1$, s'appliquent sans difficulté à la convergence uniforme (dans les domaines caractérisés, intérieurs à $B^{(\alpha)}$), et à la divergence (aux points extérieurs à $B^{(\alpha)}$) de notre expression limite.

On voit que l'intégrale

$$(38) \qquad \int\limits_0^\infty e^{-\omega}|\Phi_\alpha(\omega^\alpha x)|\,d\omega$$

[1] Cette inégalité montre qu'on peut choisir la courbe $H^{(\alpha)}$ de plus en plus aplatie et la faire tendre vers le segment $(0, x)$ lorsque α tend vers zéro.

converge aussi uniformément dans les domaines caractérisés, fait déjà observé par M. Borel pour le cas des séries entières et $\alpha = 1$.

Ces résultats nous permettent de *déterminer* par un calcul simple *les sommets de votre étoile principale* appartenant à la fonction $F(x)$.

Considérons une demi-droite issue de l'origine, formant avec l'axe réel positif l'angle t (cet angle pouvant varier entre $-\infty$ et $+\infty$). Déterminons le point d'intersection x_a de cette demi-droite et de la frontière de $B^{(a)}$. Posons

$$x = re^{it}, \quad x_a = r_a e^{it}$$

et

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega} \left| \Phi_a(\omega^a x) \right| d\omega = \int_0^\infty e^{-\omega} \left| \Phi_a(\omega^a r e^{it}) \right| d\omega = \frac{1}{r^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\frac{\omega}{r^{\frac{1}{a}}}} \left| \Phi_a(\omega^a e^{it}) \right| d\omega.$$

La valeur $\dfrac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}}$ est égale à l'abscisse de convergence de la dernière intégrale. Cette abscisse se calcule moyennant une formule de M. Landau, analogue à la formule de M. Cahen pour l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet. On a

$$(40) \qquad \frac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_a(v^a e^{it}) \right| dv}{\omega}$$

$$(41) \qquad \frac{1}{r_a} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \left(\frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_a(v^a e^{it}) \right| dv}{\omega} \right)^a$$

Le sommet $x_0 = Re^{it}$ de l'étoile principale, situé sur la demi-droite considérée, est évidemment donné par la formule

$$(42) \qquad \frac{1}{R} = \lim_{a=0} \overline{\lim_{\omega=\infty}} \left(\frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_a(v^a e^{it}) \right| dv}{\omega} \right)^a.$$

En reprenant un raisonnement de M. Borel,[1] donné au sujet des séries entières (dans le cas $\alpha = 1$), on arrive à une formule plus simple.

En effet les formules (34) et (35) montrent très nettement que pour tout point $x = re^{it}$ intérieur à l'étoile $B^{(a)}$, on a

[1] Borel: Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901 (pp. 138—141).

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}|\Phi_a(\omega^a x)| = \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}|\Phi(\omega^a r e^{it})| = 0$$

donc on a aussi

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{r}\right)^{\frac{1}{a}}} |\Phi_a(\omega e^{it})| = 0$$

et par conséquent à partir d'une certaine valeur de ω, on peut écrire

$$|\Phi_a(\omega e^{it})| < e^{\left(\frac{\omega}{r}\right)^{\frac{1}{a}}}.$$

Il en résulte

$$\frac{\log|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega^{\frac{1}{a}}} < \frac{1}{r^{\frac{1}{a}}}. \tag{43}$$

D'autre part, si le point $x = re^{it}$ est extérieur à l'étoile $B^{(a)}$, l'expression

$$e^{-\omega}|\Phi_a(\omega^a r e^{it})|$$

ne reste pas bornée, car en cas contraire, l'intégrale (16) convergerait en tout point

$$x = r' e^{it}$$

tel que

$$r' < r,$$

c'est à dire $x = re^{it}$ ne serait pas un point *extérieur* à l'étoile $B^{(a)}$.

La quantité r_a a donc la double propriété que pour $r < r_a$, on a à partir d'une certaine valeur de ω l'inégalité (43) et que pour $r > r_a$, on peut trouver des valeurs de ω croissant indéfiniment, pour lesquelles l'inégalité n'est pas remplie. Cela s'exprime par la formule

$$\frac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \frac{\log|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega^{\frac{1}{a}}}, \tag{44}$$

ou

$$\frac{1}{r_a} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \frac{\log^a|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{R} = \lim_{a=0} \overline{\lim_{\omega=\infty}} \frac{\log^a|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega}. \tag{45}$$

Une transformation simple permet de déterminer les points singuliers correspondants de la fonction $f(s)$. Envisageons en effet la droite, parallèle à l'axe réel, avec l'ordonnée t. L'abscisse σ du premier point singulier qu'on rencontre, en prolongeant la fonction $f(s)$ à gauche, le long de cette droite, est donnée par la formule

$$(46) \qquad \sigma = \lim_{\alpha=0} \overline{\lim_{\omega=\infty}} (\alpha \log \log |\varphi_a(-\omega + it)| - \omega).$$

Remarquons que (44) et par conséquent les formules qui en découlent, peuvent être en défaut, quand r_a est infini. Dans ce cas en effet, la formule (44) peut donner au lieu de la valeur zéro, une valeur négative. Mais quand x_a est finie, elle fournit une valeur positive bien déterminée et inversement, si elle fournit une valeur positive, cette valeur est égale à $\frac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}}$.

Ayant fini la démonstration et l'application du théorème I, il ne me reste qu'à démontrer le théorème II, c. à d. la relation

$$(18) \qquad f(s) = \lim_{a=0} \left(\frac{a_0}{\underline{|\alpha \lambda_0}} e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha \lambda_1}} e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha \lambda_n}} e^{-\lambda_n s} + \cdots \right) = \lim_{a=0} \varphi_a(s),$$

ou la relation équivalente

$$(17) \qquad F(x) = \lim_{a=0} \Phi_a(x)$$

$x = e^{-s}$ désignant un point intérieur[1] à l'étoile principale de la fonction F.

Considérons un contour fermé Γ quelconque, passant par l'origine et composé au voisinage de ce point de deux segments de droites, formant de nouveau avec l'axe réel positif les angles $\pm (1 + \varepsilon) \frac{\pi}{2}$, $(0 < \varepsilon \leqq 1)$. Le point x étant supposé intérieur à l'étoile principale, on peut choisir α assez petit pour que les points xu^a soient aussi tous intérieurs à l'étoile, u désignant un point quelconque de la courbe Γ. De cette façon, la fonction $F(xu^a)$ sera régulière en u sur la courbe Γ et à son intérieur (excepté évidemment $u = 0$). On a par conséquent

$$(47) \qquad \Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}} F(xu^a) \frac{du}{u},$$

[1] Pendant l'impression de cette lettre, M. Mittag-Leffler m'apprit que la démonstration qui suit, est essentiellement la même que celle qu'il avait donnée pour les séries entières, dans ses cours de 1905—06. Il avait aussi montré que le théorème reste valable en tout sommet ξ de l'étoile pour lequel il existe un angle de sommet ξ, renfermant le vecteur $(0, \xi)$ où la fonction est continue. Le lecteur verra sans difficulté que cette extension subsiste aussi dans notre cas général. (M. R.)

d'ailleurs, il est évident que

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}} F(x) \frac{du}{u},$$

par suite

$$(48) \qquad F(x) - \Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [F(x) - F(x u^a)] e^{\frac{1}{u}} \frac{du}{u}.$$

Désignons par P et P' deux points de la courbe Γ, tous les deux étant situés au voisinage de l'origine, le premier au-dessus de l'axe réel et le second au-dessous de cet axe. L'égalité ci-dessus peut s'écrire

$$(49) \quad F(x) - \Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P}^{P'} [F(x) - F(x u^a)] e^{\frac{1}{u}} \frac{du}{u} + \frac{1}{2\pi i} \int_{P'}^{P} [F(x) - F(x u^a)] e^{\frac{1}{u}} \frac{du}{u}.$$

Le premier chemin d'intégration, au voisinage de l'origine, devient arbitrairement petit, lorsque P et P' s'approchent suffisamment de l'origine, donc la valeur absolue de la première intégrale peut devenir $< \eta$, indépendamment de α, quelque petite que soit la quantité positive η. Quant aux points u qui forment le second chemin d'intégration, on pourra, après avoir fixé P et P', choisir α assez petit afin qu'on ait pour tous ces points:

$$|x - x u^a| < \delta$$

et

$$|F(x) - F(x u^a)| < \delta',$$

les quantités positives δ et δ' étant arbitrairement petites. Donc pour α assez petit, on aura aussi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{P'}^{P} [F(x) - F(x u^a)] e^{\frac{1}{u}} \frac{du}{u} \right| < \eta,$$

c'est à dire

$$|F(x) - \Phi_a(x)| < 2\eta,$$

ou

$$\lim_{a=0} \Phi_a(x) = F(x).$$

Notre raisonnement montre aussi que la convergence est uniforme dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile principale et situé sur un nombre fini de feuillets de notre surface de RIEMANN. On peut, aussi pour cette expression limite, admettre des domaines tels que les points à l'infini du domaine correspondant du plan des s tombent dans un angle tel que (32).

Notons encore la formule intéressante:

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}} F(xu^a)\frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{F(z)}{z-xu^a}dz =$$

$$(50) \qquad = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} F(z)\,dz\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}}\frac{1}{z-xu^a}\frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} F(z)\frac{dz}{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}}\frac{1}{1-\frac{x}{z}u^a}\frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} F(z)\,E_a\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

où E_a désigne votre fonction entière bien connue, et Γ' désigne une courbe intérieure à l'étoile principale qui passe par l'origine et renferme la courbe Γ'', décrite par xu^a, lorsque u décrit la courbe Γ. On peut tirer facilement de cette formule une démonstration indirecte du théorème que je viens de démontrer.

* * *

J'ai terminé l'indication de mes recherches sur la représentation du prolongement analytique des séries de DIRICHLET. Permettez-moi encore de reprendre quelques remarques, publiées déjà en partie, qui rentrent plutôt dans l'ordre d'idées du problème d'ABEL.

Ces remarques, concernant la théorie des séries entières, se rattachent à votre conférence de Rome, où vous avez le premier étudié le problème. Elles nous fourniront des indications utiles aussi pour les séries de DIRICHLET.

Parmi les expressions limites diverses que vous avez étudiées dans vos travaux, *les séries de polynomes de votre troisième Note sont les plus efficaces au point de vue du problème* d'ABEL.[1]

D'abord j'ai étudié le problème opposé. J'ai examiné, si l'on peut trouver des fonctions telles que votre série de polynomes diverge dans un sommet de l'étoile correspondante quoique la fonction satisfasse en ce sommet à certaines conditions de continuité et de régularité.

Ainsi, j'ai construit *une fonction, continue dans la figure génératrice* $V^{(a)}$ *(contour y compris) appartenant au point x qui, de plus, était régulière dans toute cette*

[1] M. RIESZ: Sur un problème d'ABEL. (Extrait d'une lettre à M. MITTAG-LEFFLER, 24 mai 1910) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. XXX. 1910 (Séance de 10 juillet 1910).

figure, sauf au point x et pourtant la série de polynomes correspondante

$$G_0(x/\alpha) + G_1(x/\alpha) + \cdots + G_n(x/\alpha) + \cdots$$

était divergente.

Je suis arrivé à construire cet exemple et d'autres exemples de divergence, concernant d'autres expressions-limites, en développant un *principe très fécond, dû à* M. FEJÉR qu'il vient d'appliquer dans une série de travaux fort remarquables.

Toutefois, j'ai pu vous communiquer dans ma lettre du 28 décembre 1909 qu'il est facile de transformer votre série de polynomes en une autre qui a la même étoile de convergence, mais qui converge aussi aux sommets de la nature indiquée ci-dessus. Ce sont les moyennes arithmétiques des sommes partielles de votre série de polynomes que j'avais en vue. En effet, en appliquant un théorème bien connu de M. FEJÉR, on montre immédiatement que ces expressions convergent même dans des conditions plus générales.[1] Cependant, j'ai trouvé aussitôt que, *grâce à une propriété heureuse de votre figure génératrice, on peut résoudre la question complètement sans former les moyennes arithmétiques, mais en faisant diminuer le paramètre α* dont dépend l'expression limite. C'est le résultat que j'avais publié dans la lettre que je vous avais adressée, sans faire aucune allusion aux moyennes arithmétiques de vos séries de polynomes.

Dans la même lettre j'avais aussi remarqué que les expressions limites fondées sur l'intégrale de LAPLACE-ABEL ne sont pas aussi efficaces que vos séries de polynomes, quand il s'agit de déterminer la valeur limite de la fonction aux sommets, où elle est continue, la continuité étant toujours définie à l'aide de la figure génératrice correspondante. Néanmoins, on peut (comme je vous avais communiqué dans ma lettre du 28 décembre 1909) déduire aussi dans ce cas des expressions limites nouvelles, bien utilisables en ces points qui se forment d'une manière analogue aux moyennes arithmétiques. Le procédé consiste dans la formule:

$$(51) \qquad \lim_{\Omega=\infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\omega} e^{-v}\, \Phi_a(v^a x)\, dv.$$

D'ailleurs, les avantages qu'on peut tirer pour les séries entières de l'application des figures génératrices, formant au point $x=1$ un angle qui diminue

---

[1] Ce résultat a été aussi trouvé par M. DIENES qui l'avait publié avec d'autres résultats concernant les moyennes arithmétiques de vos séries de polynomes, ces autres résultats étant aussi des conséquences immédiates de vos théorèmes et de ceux de M. FEJÉR. (Comptes rendus, 25 juillet 1910.) Je dois observer que le raisonnement de ma lettre insérée aux Rendiconti fait voir que dans les énoncés de M. DIENES, l'introduction des moyennes arithmétiques pourrait être évitée.

avec α, suggèrent l'idée d'appliquer de telles figures aussi pour les séries de la forme $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$. Pourtant, cette figure devant passer par l'origine à cause du caractère singulier de ce point, les expressions limites ainsi obtenues seront nécessairement, comme l'expression (16), des expressions limites doubles.

* * *

Tous les résultats que je viens d'indiquer dans cet exposé rapide, s'étendent facilement aux intégrales de la forme

$$F(x) = \int_0^\infty a(t)\, x^t\, dt = f(s) = \int_0^\infty a(t)\, e^{-ts}\, dt \tag{52}$$

en posant

$$\Phi_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{a(t)}{\lfloor \alpha t} x^t\, dt = \varphi_\alpha(s) = \int_0^\infty \frac{a(t)}{\lfloor \alpha t} e^{-ts}\, dt. \tag{53}$$

D'ailleurs, les séries $\sum_{n=0}^\infty a_n x^{\lambda_n}$ et les intégrales $\int_0^\infty a(t)\, x^t\, dt$ se ramènent facilement à la forme commune

$$\log x \int_0^\infty A(t)\, x^t\, dt.$$

Grâce à cette circonstance, les résultats ci-dessus sont bien utilisables pour la représentation d'une fonction analytique quelconque, au voisinage d'une classe étendue de points de non-uniformité.

Évidemment, l'expression (16) peut converger aussi dans des cas où la série de Dirichlet, ou l'intégrale $\int_0^\infty a(t)\, e^{-ts}\, dt$ correspondante ne converge nulle part.

Györ (Hongrie), 6 octobre 1910.

Marcel Riesz.