HENRI POINCARÉ UND DIE QUANTENTHEORIE.

Von

MAX PLANCK

in Berlin.

§ 1.

Nur in seinem letzten Lebensjahre hat sich H. Poincaré mit der Quantentheorie beschäftigt, aber dies in einer Weise, die auf die Denk- und Arbeitsrichtung dieses Meisters seiner Wissenschaft ein ungemein bezeichnendes Licht wirft. Denn wie das wahre Temperament eines Menschen sich dann am deutlichsten offenbart, wenn er sich einmal unversehens einem seltsamen Ereignis gegenübersieht, so verrät sich auch die Eigenart eines Forschers am untrüglichsten in seiner Stellungnahme gegenüber einer in seiner Wissenschaft plötzlich neu auftauchenden Hypothese, welche zu gewissen im Laufe der Zeit festgewurzelten Anschauungen in mehr oder minder ausgesprochenen Gegensatz tritt. Der Gealterte wird geneigt sein, die Hypothese zu ignorieren, der Enthusiastische wird sie unbesehen willkommen heissen, der Skeptiker wird nach Gründen suchen sie abzulehnen, der Produktive wird sie prüfen und gegebenenfalls befruchten. H. Poincaré hat sich in dem tiefgründigen Aufsatz,[1] den er der Quantentheorie widmete, als jugendlich, kritisch und produktiv erwiesen. Die Anregung zu dieser Untersuchung empfing er ohne Zweifel in den Verhandlungen des denkwürdigen *Solvay*-Kongresses vom Jahre 1911,[2] und der Gedanke, mit dem er an sie herantrat, wird am besten durch seine am Schluss jener Versammlung gesprochenen Worte[3] bezeichnet. Er wirft darin die grundsätzliche Frage auf, ob denn

---

[1] Sur la Théorie des Quanta, Journ. de Physique, T. II, 1912, p. 5.

[2] La Théorie du Rayonnement et les Quanta, Rapports et Discussions, publiés par MM. P. Langevin et M. de Broglie, Paris, 1912.

[3] l. c., p. 451.

das Wesen der Quantentheorie es überhaupt gestattet, die Naturgesetze durch irgendwelche Differentialgleichungen auszudrücken — ganz abgesehen von der speziellen Form der Gleichungen der klassischen Mechanik — und diese Frage eben ist es, deren Prüfung und Beantwortung den Inhalt seines oben erwähnten Aufsatzes bildet.

Als Ausgangspunkt dient ihm darin die physikalische Tatsache, dass in einem abgeschlossenen System von zahlreichen, mit bestimmten Eigenperioden schwingenden geradlinigen Resonatoren sich im Laufe der Zeit vermöge ihrer wechselseitigen Stösse ein durch die gesamte Energie des Systems vollkommen bestimmter Zustand statistischen Gleichgewichts herstellt. Gefragt wird nach dem stationären Mittelwert der Energie eines Resonators von bestimmter Periode, unter der alleinigen Voraussetzung, dass die Stossgesetze durch Differentialgleichungen von der Art der HAMILTON'schen, aber noch viel allgemeiner als diese, geregelt sind. Um die Betrachtung möglichst zu vereinfachen, ohne ihre allgemeine Bedeutung zu beeinträchtigen, werden nur zwei Arten von Resonatoren angenommen, nämlich P Resonatoren von »langer» Periode, und N Resonatoren von »kurzer» Periode, die ihre Energien gegenseitig durch Stösse austauschen. Diese Auswahl bringt zugleich den Vorteil mit sich, dass dadurch die Einführung des Begriffs der Temperatur ganz entbehrlich wird. Denn die mittlere Energie der Resonatoren von langer Periode ist tatsächlich nichts anderes als dass Mass für die Temperatur, weil für diese Resonatoren, auch vom Standpunkt der Quantentheorie aus, die Gesetze der klassischen Mechanik gelten, und weil nach der klassischen Mechanik die mittlere Energie ganz allgemein der Temperatur proportional ist.

Das Resultat, zu welchem POINCARÉ nach einer ausführlichen, weitausgreifenden Untersuchung schliesslich gelangt, lässt sich in der folgenden einfachen Form aussprechen, in welcher auch die Bezeichnungen seines Aufsatzes möglichst beibehalten sind. Wird die mittlere Energie der langperiodischen Resonatoren mit $\frac{1}{\alpha}$ bezeichnet, so ist die mittlere Energie der N kurzperiodischen Resonatoren:

$$\eta = -\frac{d}{d\alpha} \log \Phi(\alpha), \tag{1}$$

wobei gesetzt ist:

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta) \cdot e^{-\alpha\eta} d\eta. \tag{2}$$

Unbestimmt und willkürlich wählbar bleibt hierin noch die Grösse $w(\eta)$, welche dadurch definiert ist, dass $w(\eta)\,d\eta$ die »Wahrscheinlichkeit» dafür bedeutet, dass die Energie eines kurzperiodischen Resonators zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt.

Der Thermodynamiker erkennt in diesen Gleichungen die Formeln wieder, welche die mittlere Energie einer grossen Anzahl gleichartiger Systeme von einem einzigen Freiheitsgrad mit dem sogenannten »Zustandsintegral» Φ verknüpft. Die Konstante α ist der reziproke Wert von kT, (T absolute Temperatur) und das Produkt $w(\eta)\,d\eta$ ist die »Wahrscheinlichkeit a priori» oder die Grösse des durch $(\eta, d\eta)$ charakterisierten Elementargebiets im GIBBS'schen Phasenraum eines kurzperiodischen Resonators.

Nach der klassischen Theorie ist $w(\eta)$ konstant, und daher nach (2):

$$\Phi(\alpha) = \frac{\text{const}}{\alpha}, \tag{3}$$

woraus nach (1) der Äquipartitionssatz der Energie:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\alpha} \tag{4}$$

folgt, welcher bekanntlich den Erfahrungen widerspricht.

Fragt man aber nach demjenigen Ausdruck, den man für $w(\eta)$ annehmen muss, um zur Quantentheorie zu gelangen, so braucht man nur den umgekehrten Weg zu gehen, und zu dem von der Quantentheorie geforderten Wert von $\bar{\eta}$ den passenden Wert von $w(\eta)$ zu suchen. Nun ist, in der ursprünglichen Form dieser Theorie, die mittlere Energie eines kurzperiodischen Resonators:

$$\bar{\eta} = \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}, \tag{5}$$

wo ε die Grösse des Energiequantums bedeutet. Für unendlich kleine ε geht daraus wieder der Äquipartitionswert (4) hervor.

Im allgemeinen folgt aber aus (5) und (1):

$$\Phi(\alpha) = \frac{\text{const}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = \text{const} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha\varepsilon}, \tag{6}$$

und ein Vergleich mit (2) zeigt, dass nur dann Übereinstimmung zu erzielen ist, wenn für alle Werte von η, die kein ganzzahliges Vielfaches von ε sind, $w(\eta) = 0$, während für $\eta = n\varepsilon$ $w(\eta) = \infty$, in der Art, dass für $\lim \xi = 0$:

$$\int_{n\varepsilon - \xi}^{n\varepsilon + \xi} w(\eta)\,d\eta = \text{const}. \tag{7}$$

Dieses Resultat ist natürlich gleichbedeutend mit einer *Verneinung* der zu Anfang aufgeworfenen Frage, ob die Stossgesetze durch Differentialgleichungen darstellbar sind; denn derartige Gleichungen würden doch jedenfalls einen stetigen Charakter der Funktion $w(\eta)$ erfordern. Insofern darf man also das ganze Problem als erledigt betrachten.

§ 2.

Indessen hat die Methode POINCARÉ's doch eine mehr als blos negative Bedeutung. Denn dadurch, dass sie ein Limesverfahren kennen lehrt, durch welches man, mittelst einer nachträglichen Korrektur der ursprünglichen unzulänglichen Voraussetzungen, schliesslich doch zum gewünschten Ziele gelangen kann, weist sie sozusagen über sich selber hinaus, und zeigt die Richtung, die man einschlagen muss, um der drohenden Unstimmigkeit von vornherein zu entgehen. Wenn ein Resonator kurzer Periode wirklich nur solche Werte der Energie besitzen kann, welche ein ganzes Vielfaches von ε darstellen, so heisst dies, dass er seine Energie nur plötzlich, sprungweise, ändern kann, oder mit anderen Worten: dass die Stossgesetze nicht durch Differentialgleichungen, sondern durch Differenzengleichungen dargestellt werden. Und es liegt die weitere Frage nahe, ob es nicht möglich ist, eine Form des Stossgesetzes anzugeben, welche auf direktem Wege zu dem von der Quantentheorie geforderten Resultat führt. Diese Frage möchte ich hier ein kleines Stück weiter verfolgen.

Wir wenden uns zu diesem Zwecke wieder zur Betrachtung der Stosswirkungen zwischen den P Resonatoren von langer Periode und den N Resonatoren von kurzer Periode, und nehmen an, dass das Energiequantum der letzteren ein ganzes Vielfaches des Energiequantums der ersteren ist; denn sonst wäre ein unmittelbarer Energieaustausch zwischen ihnen garnicht möglich. Bezeichnen wir die Zahl derjenigen langperiodischen Resonatoren, deren Energie zwischen u und $u + du$ liegt, mit $P_u du$, und die Zahl derjenigen kurzperiodischen Resonatoren, deren Energie $n\varepsilon$ beträgt, mit N_n, wobei:

$$\int_0^\infty P_u du = P, \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} N_n = N, \tag{8}$$

und betrachten wir die wechselseitigen Zusammenstösse dieser beiden Arten von Resonatoren während eines Zeitintervalls t. Ihre Anzahl wird ausser der Länge des Zeitraums t den Grössen $P_u du$ und N_n proportional sein. Daher wird die Anzahl derjenigen unter diesen Zusammenstössen, bei denen i Energiequanten von einem Resonator der ersten Art auf einen Resonator der zweiten Art übertragen werden, dargestellt werden durch einen Ausdruck von der Form:

$$t \,.\, P_u d u \,.\, N_n \,.\, W(u, n, i), \tag{9}$$

wobei die von u, n und i abhängige Funktion W auch als die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet werden kann, dass zwei Resonatoren von den Energien u und $n\varepsilon$ so miteinander zusammenstossen, dass die Energie $i\varepsilon$ von dem ersten auf den zweiten Resonator übergeht. Die ganze Zahl i, die auch Null oder negativ sein kann, ist durch die Bedingung eingeschränkt:

$$\frac{u}{\varepsilon} \geqq i \geqq -n, \tag{10}$$

welche ausspricht, dass keiner der beiden einander stossenden Resonatoren mehr als seine ganze Energie abgeben kann. Nach Beendigung des Stosses besitzen die beiden Resonatoren bezw. die Energien:

$$u' = u - i\varepsilon \geqq 0 \text{ und } n'\varepsilon = (n+i)\varepsilon \geqq 0. \tag{11}$$

Die Bedingung des statistischen Gleichgewichts erfordert dann, das der Anzahl der betrachteten Art von Stössen eine gleich grosse Anzahl in entgegengesetzter Richtung erfolgender Stösse gegenübersteht, d. h. dass, wenn $i' = -i$ gesetzt wird,

$$t \,.\, P_u d u \,.\, N_n \,.\, W(u, n, i) = t \,.\, P_{u'} d u' \,.\, N_{n'} \,.\, W(u', n', i'), \tag{12}$$

und aus dieser Gleichung gehen, wenn W als Funktion von u, n, i bekannt ist, die statistischen Mittelwerte der Energien beider Arten von Resonatoren hervor. Dieselben hängen natürlich in hohem Masse von der Form des Ausdrucks für W ab.

Wir wollen nun die einfache Hypothese einführen:

$$W(u, n, i) \,.\, d u = W(u', n', i') \,.\, d u', \tag{13}$$

und nach der Art der ihr entsprechenden stationären Energieverteilung fragen. Es folgt dann aus (12) und (11):

$$P_u \,.\, N_n = P_{u - i\varepsilon} \,.\, N_{n+i}, \tag{14}$$

und, für $i = 1$ und $u = \varepsilon$:

$$N_{n+1} = N_n \cdot \frac{P_\varepsilon}{P_0} = N_n \,.\, p, \tag{15}$$

andererseits, für $i = -1$ und $n = 1$:

$$P_{u+\varepsilon} = P_u \cdot \frac{N_1}{N_0} = P_u \cdot p. \tag{16}$$

Aus (15) ergibt sich, wenn man darin für n nach der Reihe die Werte $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ setzt und die daraus entstehenden Gleichungen miteinander multipliziert:

$$N_n = N_0 \cdot p^n, \tag{17}$$

und aus (16), wenn man darin für u die Werte $\varrho, \varrho + \varepsilon, \varrho + 2\varepsilon, \ldots \varrho + (n-1)\varepsilon$ $(\varrho < \varepsilon)$ setzt, auf demselben Wege:

$$P_{\varrho + n\varepsilon} = P_\varrho \cdot p^n. \tag{18}$$

Die Ausdrücke (17) und (18) befriedigen die Funktionalgleichung (14) identisch, sie stellen also die allgemeine Lösung derselben dar. Aus ihnen ergeben sich nun auch die stationären Mittelwerte für die Energien der beiden Arten von Resonatoren, die wir, wie oben, mit $\frac{1}{\alpha}$ und r bezeichnen wollen:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{P} \cdot \int_0^\infty u P_u \, du \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} n \varepsilon N_n, \tag{19}$$

wo die Werte von P und N den Gleichungen (8) zu entnehmen sind. Bei der Integration von P_u ist zu beachten, dass das Integral, bei Benutzung von (18), in eine Summe von Einzelintegralen zerfällt, deren jedes von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varepsilon$ zu erstrecken ist; also

$$\int_0^\infty u P_u \, du = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^\varepsilon (\varrho + n\varepsilon) P_\varrho \, p^n d\varrho$$

$$= \frac{1}{1-p} \int_0^\varepsilon \varrho P_\varrho \, d\varrho + \frac{\varepsilon p}{(1-p)^2} \int_0^\varepsilon P_\varrho \, d\varrho.$$

Auf diesem Wege ergibt sich:

$$\frac{1}{\alpha} = \bar{\varrho} + \frac{\varepsilon p}{1-p} \quad \text{und} \quad r = \frac{\varepsilon p}{1-p}, \tag{20}$$

wenn $\bar{\varrho}$ die mittlere Energie derjenigen langperiodischen Resonatoren bedeutet, deren Energie zwischen 0 und ε liegt:

$$\bar{\varrho} \cdot \int_0^{\varepsilon} P_\varrho \, d\varrho = \int_0^{\varepsilon} \varrho \, P_\varrho \, d\varrho. \tag{21}$$

Man sieht, dass nach unserer Hypothese $\bar{\eta}$ durch α noch nicht vollkommen bestimmt ist. Vielmehr hat man aus (20):

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\alpha} - \bar{\varrho}. \tag{22}$$

Hiernach erscheint die mittlere Energie $\bar{\eta}$ der kurzperiodischen Resonatoren zurückgeführt auf das Gesetz, nach welchem die Energie unter den langperiodischen Resonatoren verteilt ist. Nimmt man für diese die klassische Theorie als zutreffend an, setzt also in Übereinstimmung mit (8):

$$P_\varrho = \alpha P \,.\, e^{-\alpha \varrho}, \tag{23}$$

so folgt aus (21)

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{e^{\alpha \varepsilon} - 1}, \tag{24}$$

und damit nach (22) der quantentheoretische Wert (5) von $\bar{\eta}$.

Die Quantenbeziehung (5) ergibt sich also nach dem von uns angeführten Stossgesetz mit Notwendigkeit aus der klassischen Energieverteilung für langperiodische Resonatoren, und darin liegt die Bedeutung dieses Gesetzes.

§ 3.

Die hier angestellte Betrachtung kann uns aber noch einen Schritt weiter führen, und eben dieser Punkt ist es gerade, der mir die vorliegende Untersuchung nahegelegt hat. H. Poincaré hat nämlich seine Analyse ausser auf die ursprüngliche Formulierung der Quantentheorie auch auf die spätere Formulierung erstreckt, welche er die »zweite» Quantentheorie nennt.[1] Diese Theorie scheint mir deshalb einstweilen den Vorzug zu verdienen, weil die Grundvoraussetzung der ersten Theorie: die quantenhafte Absorption strahlender Energie seitens eines Resonators, ihrem Wesen nach unverträglich ist mit der sonst überall vorzüglich

[1] l. c., p. 30.

bewährten elektromagnetischen Wellentheorie der Lichtfortpflanzung im leeren Raum, und weil beim Aufbau der Quantentheorie doch jedenfalls dafür Sorge getragen werden muss, dass die Abweichungen von der klassischen Theorie nicht schroffer ausfallen als unumgänglich notwendig erscheint. Nach der zweiten Quantentheorie können auch die kurzperiodischen Resonatoren von vornherein jeden beliebigen Wert der Energie besitzen, und zwar ist im Zustand des statistischen Gleichgewichts die mittlere Energie aller derjenigen Resonatoren, deren Energie im Elementargebiet n, d. h. zwischen $n\varepsilon$ und $(n+1)\varepsilon$ liegt, gleich $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$.

Dementsprechend tritt für die mittlere Energie sämtlicher kurzperiodischer Resonatoren anstelle von (5) der Wert:

$$\bar{\eta} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{e^{\alpha\varepsilon}+1}{e^{\alpha\varepsilon}-1}. \tag{25}$$

Es fragt sich nun, welcher Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsfunktion $w(\eta)$ in die Gleichung (2) einzusetzen ist, damit aus (1) der letztgenannte Wert für $\bar{\eta}$ hervorgeht. Um dies zu entscheiden, berechnet POINCARÉ aus (25) und (1):

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{3\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{5\alpha\varepsilon}{2}} + \cdots \tag{26}$$

und findet, dass diese Funktion nur dann mit (2) übereinstimmt, wenn $w(\eta)$ für alle Werte von η verschwindet, ausser für die ungeraden Vielfachen von $\frac{\varepsilon}{2}$, für die $w(\eta)$ unendlich wird. Das steht aber offenbar im Widerspruch mit dem Grundsatz der zweiten Theorie, dass ein Resonator jeden beliebigen Wert der Energie besitzen kann.

Dieser Befund scheint, wenn man ihn mit dem in § 1 festgestellten zusammenhält, ein Argument von schwerwiegender Bedeutung zu Ungunsten der zweiten Theorie und zu Gunsten der ersten Theorie zu liefern. Indessen muss zunächst daran festgehalten werden, dass ja, wie bereits oben hervorgehoben ist, auch schon die erste Theorie sich als unverträglich mit der Voraussetzung einer endlichen und stetigen Funktion $w(\eta)$ erwiesen hat, dass also tatsächlich keine der beiden Theorien in den durch die Gleichung (1) und (2) festgelegten Rahmen hineinpasst. Wie steht es nun aber mit der oben für den Zusammenstoss zweier Resonatoren eingeführten Hypothese, die sich bei der ersten Theorie gut bewährt hat, gegenüber der zweiten Theorie?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir also jetzt an, die Energie eines der N kurzperiodischen Resonatoren könne jeden beliebigen Wert η besitzen, und zwar sei die Zahl derjenigen dieser Resonatoren, deren Energie zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, gleich $N_\eta d\eta$, sodass:

$$\int_0^\infty N_\eta d\eta = N. \tag{27}$$

Ferner finde der Energieaustausch beim Zusammenstoss wiederum nur nach ganzen Vielfachen i des Elementarquantums ε statt, so dass anstatt (10):

$$\frac{u}{\varepsilon} \geqq i \geqq -\frac{\eta}{\varepsilon}. \tag{28}$$

Dann lassen sich genau die nämlichen Betrachtungen anstellen, wie im vorigen Paragraphen, und man erhält für den Zustand des statistischen Gleichgewichts anstelle von (14) die Funktionalgleichung:

$$P_u \,.\, N_\eta = P_{u-i\varepsilon} \,.\, N_{\eta+i\varepsilon}\,, \tag{29}$$

deren allgemeine Lösung durch (18) und durch

$$N_{\varrho+n\varepsilon} = N_\varrho\, p^n \tag{30}$$

gegeben wird, wo

$$p = \frac{P_\varepsilon}{P_0} = \frac{N_\varepsilon}{N_0}. \tag{31}$$

Daraus ergeben sich dann wieder die Mittelwerte für die Energie der beiden Arten von Resonatoren:

$$\frac{1}{\alpha} = \bar{\varrho} + \frac{\varepsilon p}{1-p} \text{ und } \bar{\eta} = \bar{\varrho}' + \frac{\varepsilon p}{1-p}, \tag{32}$$

wenn wir mit $\bar{\varrho}'$ die mittlere Energie derjenigen kurzperiodischen Resonatoren bezeichnen, deren Energie zwischen 0 und ε liegt:

$$\bar{\varrho}' . \int_0^\varepsilon N_\varrho d\varrho = \int_0^\varepsilon \varrho N_\varrho d\varrho. \tag{33}$$

Für den Zusammenhang zwischen $\bar{\eta}$ und α erhalten wir also:

$$\bar{\eta} = \bar{\varrho}' - \bar{\varrho} + \frac{1}{\alpha}, \tag{34}$$

und hieraus, wenn wir für $\bar{\varrho}$ wieder den Ausdruck (24), für $\bar{\eta}$ aber den Ausdruck (25) einsetzen:

$$\bar{\varrho}' = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35}$$

und dieser Wert stimmt in der Tat vollkommen überein mit der oben eingeführten Grundannahme der zweiten Theorie, dass die mittlere Energie der im Elementargebiet n befindlichen Resonatoren gleich ist $\left(n + \frac{1}{2}\right) \varepsilon$.

Somit können wir als Resultat dieser ganzen Untersuchung den folgenden Satz aussprechen: Wenn für die stationäre Energieverteilung der langperiodischen Resonatoren das Gesetz der klassischen Theorie als gültig angenommen wird, so führt die Hypothese, dass beim Zusammenstoss zweier Resonatoren der Energieaustausch nur nach ganzen Vielfachen eines Energiequantums ε stattfindet, und dass zwei Zusammenstösse mit entgegengesetztem Resultat gleich wahrscheinlich sind, für die mittlere Energie eines kurzperiodischen Resonators mit Notwendigkeit zur Formel der Quantentheorie, und zwar zur »ersten» Quantentheorie, wenn ein solcher Resonator keine zwischen 0 und ε liegende Energie besitzen kann, zur »zweiten» Quantentheorie aber, wenn die mittlere Energie derjenigen Resonatoren, deren Energie zwischen 0 und ε liegt, gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.

§ 4.

Schliesslich liegt noch die Frage nahe, ob und in welcher Weise sich die POINCARÉ'schen Ansätze (1) und (2) so verallgemeinern lassen, dass man zu den Formeln der beiden Quantentheorien gelangt, ohne auf die Schwierigkeiten zu stossen, die auf jeden Fall mit der Einführung einer nicht stetigen und nicht endlichen Funktion $w(\eta)$ verbunden sind.

In formaler Beziehung erledigt sich diese Frage einfach und in positivem Sinne, und zwar durch die Einführung einer passenden Modifikation des Ausdrucks für das Zustandsintegral (2). In der Quantentheorie bleibt die Gleichung (1) bestehen, dagegen tritt an die Stelle des Zustandsintegrals (2) die Zustandssumme:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\alpha \eta_n}, \tag{36}$$

wo $\bar{\eta}_n$ die mittlere Energie der im Elementargebiet n befindlichen Resonatoren bezeichnet. Je nachdem für $\bar{\eta}_n$ der Wert $n\varepsilon$ oder der Wert $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$ angenommen wird, erhält man aus (1) und (36) für die mittlere Energie $\bar{\eta}$ eines kurzperiodischen Resonators den Ausdruck (5) der ersten Quantentheorie oder den Ausdruck (25) der zweiten Quantentheorie.

Ein anderes, weit schwierigeres Problem aber ist es, diejenigen physikalischen Hypothesen zu ersinnen und mathematisch zu formulieren, welche mit Notwendigkeit zu dem Ausdruck (36) des Zustandsintegrals führen. Denn mit seiner Lösung wäre auch der geheimnisvolle Schleier gelüftet, welcher noch bis zum heutigen Tage die Quantentheorie von allen Seiten umgibt. Es liegt eine eigenartige Schicksalstragik darin, dass der geniale Mathematiker und theoretische Physiker, dessen Andenken dieser Aufsatz gewidmet ist, gerade im Verlauf desjenigen Jahres, in welchem er sich für die Quantentheorie zu interessieren begann, von seiner Arbeit abberufen wurde. Niemand kann ermessen, welch unersetzliche Werte dadurch der wissenschaftlichen Forschung verloren gegangen sind. Indessen wir müssen uns zufrieden geben und dankbar sein dafür, dass es ihm überhaupt noch vergönnt war, einmal selber Hand ans Werk zu legen und seiner Mitwelt damit die Schwierigkeit, aber auch die fundamentale Wichtigkeit der hier noch zu bewältigenden Aufgabe deutlich zu machen.