DIE GEOMETRIE DER WIRKLICHKEIT.

Von

J. HJELMSLEV

IN KOPENHAGEN.

Einleitung.

1. Diejenige Formalisierung der Geometrie, die durch die neueren Untersuchungen über die Grundlagen vollendet worden ist, bezeichnet den Abschluss einer mehr als zweitausendjährigen Periode in der Geschichte der Geometrie, eine Periode, deren Programm dadurch gekennzeichnet werden könnte, dass man unter Zugrundelegung möglichst weniger Voraussetzungen (Axiome, Postulate) das Erfahrungsmaterial auf das möglichst wenige beschränke. Die Bestrebungen dieses Programm zu erfüllen haben aber die Folgerung nach sich gezogen, dass die Geometrie der Wirklichkeit, die praktische Geometrie, die Geometrie, welche von den greifbaren Raumverhältnissen handelt, stark zurückgedrängt worden ist. Das in sich so exakte griechische geometrische Lehrgebäude ruhte tatsächlich auf einem illusorischen Grundbegriff, dem Begriff des »mathematischen Punktes», des Punktes »ohne Ausdehnung». Denn die Wirklichkeit kennt keinen solchen Punkt. Und mit den Postulaten, den Aussagen über diesen und andere Grundbegriffe, geht es nicht besser. Sie enthalten alle »transzendentale» Elemente, Elemente, die über die Wirklichkeit, über die Erfahrung weit hinaus gehen. Was man z. B. unter dem Parallelenpostulat (in der Euklidischen Form) zu verstehen hat, ist ganz rätselhaft; erfahrungsgemäss hat es keinen Sinn. Aber vielleicht noch schlimmer geht es mit dem Grundsatz, dass irgend zwei Punkte eine und nur eine gerade Linie bestimmen; jeder praktische Zeichner wird sich doch sehr schnell von der Tatsache überzeugen, dass zwei verschiedene gerade Linien sehr wohl ein beträchtliches Stück gemein haben können. Wo sind denn die geraden Linien zu finden, von welchen man den erwähnten Grundsatz aufrecht erhalten kann, ohne dass man sehr grobe Abweichungen zu befürchten hat?

Sie existieren überhaupt nicht.

Es wird zwar natürlich sein, den Grundsatz anzunehmen, dass zwei Punkte eine eindeutig bestimmte Verbindungsstrecke haben; dass aber die Verlängerung der Strecke über die beiden Punkte hinaus eindeutig bestimmt sein sollte, würde nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Diese Betrachtungen werden dem Leser gewissermassen nicht befremdlich vorkommen. Sie sind teilweise in verschiedener Form in der mathematischen Literatur vertreten. Und doch darf man wohl behaupten können, dass die Frage nach einer Begründung der praktischen Geometrie bisher noch keine vollständig befriedigende Antwort gefunden hat. Obwohl M. Pasch in seinen bekannten »Vorlesungen über neuere Geometrie» die hierher gehörigen Fragen zum vollen Ausdruck bringt und wertvolle Beiträge zu der Lösung derselben liefert, so müssen wir doch die daselbst gegebene Begründung der Geometrie als eine wesentlich theoretische — und zwar in dieser Hinsicht fundamentale — Begründung ansehen, insofern die projektiven Postulate (die Bestimmung der Geraden durch zwei Punkte und die der Ebene durch drei Punkte; die Existenz der Schnittlinie zweier Ebenen, die einen Punkt gemein haben) an die Spitze gestellt werden.

Im ersten Abschnitte der folgenden Arbeit soll nun ein neuer Beitrag zur empirischen Begründung der Elementargeometrie gegeben werden.

2. Heutzutage können wir wohl mit gewissem Recht behaupten, dass wir im Gegensatz zum Altertum den mathematischen Punktbegriff besitzen, insofern wir uns auf den modernen Zahlbegriff stützen können. Dass aber dieser Punktbegriff vom Punktbegriff der Wirklichkeit sehr verschieden ist, hat sich durch viele Untersuchungen deutlich erkennen lassen; die moderne theoretische Geometrie umfasst so weitgehende Begriffsbildungen, z. B. innerhalb der Kurvenlehre, dass dieselben nur in verhältnismässig beschränktem Masse auf die Wirklichkeit reale Anwendung finden können. Diese Tatsachen sind zuerst von F. Klein ausführlich erörtert worden. In seinen Vorlesungen über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Leipzig 1902) wird durchgehend auf die Wirklichkeit Rücksicht genommen. Nun ist aber die Behandlung dieses Bereichs eine sehr schwierige. Es ist tatsächlich so, dass nicht nur die praktischen, sondern auch die theoretischen Grundlagen der Infinitesimalgeometrie noch sehr wenig bearbeitet sind. Diejenige Differentialgeometrie, über die wir augenblicklich verfügen, erstreckt sich nicht wesentlich über die regulären analytischen Gebilde hinaus. Nur ein kleines Beispiel zur Orientierung!

In den meisten Lehrbüchern findet man den folgenden Beweis für den Satz, dass die Normale eines Punktes (x, y) der Kurve $y = f(x)$ (wo $f(x)$ unbeschränkt differenzierbar vorausgesetzt wird) die Evolute in dem entsprechenden Mittelpunkt (ξ, η) des Schmiegungskreises berührt: Aus den Gleichungen

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

findet man

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus man dann das genannte Resultat folgert. An dem Fall, wo

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dx} = 0,$$

geht man aber dabei stillschweigend vorüber. Wenn diese Bedingungen eintreten, gilt der Beweis nicht mehr; und es ist nun tatsächlich hier nicht nur von einer Lücke des Beweises, sondern vielmehr von einer Lücke des Satzes selbst die Rede. Wenn nämlich alle Derivierten von ξ und η Null werden, so braucht die Evolute gar keine Tangente zu haben, und in diesem Falle muss die Gültigkeit unseres Satzes natürlich aufhören. Dass dieser Fall nur in einzelnen Punkten eintreten kann, wird man nicht behaupten können; die »Ausnahmepunkte» können, wenn $f(x)$ nicht als regulär und analytisch vorausgesetzt wird, eine perfekte (obwohl nirgends dichte) Punktmenge auf der Kurve bilden.[1]

Es ist, wie oft hervorgehoben worden, vielleicht natürlich, dass die Funktionen, welche wir in der Praxis verwenden, als unbeschränkt differenzierbar vorausgesetzt werden; dass sie aber analytisch und regulär sein sollen, dafür liegen keine zwingenden Gründe vor. Es wird aber dann eine wichtige Frage, wie wir unseren Bereich abgrenzen müssen, wenn wir auf natürliche Weise den Forderungen der Wirklichkeit und gleichzeitig natürlich auch denen der exakten Darstellung Genüge leisten sollen. Dieses doppelte Ziel wollen wir in den letzten Abschnitten unserer Arbeit verfolgen, indem wir versuchen, einen Beitrag zu den Grundlagen der Kurvenlehre zu liefern.

Ohne dass wir mit Rücksicht auf die erkenntnistheoretisch-mathematische Literatur, welche an unsere Fragen Anknüpfung hat, auf besondere Erörterungen oder Vergleichungen eingehen wollen, müssen wir ausser den Arbeiten von M. Pasch und F. Klein noch die bekannten naturphilosophischen Arbeiten von H. Poincaré

[1] Vgl. J. Hjelmslev: Differentialgeometri og Differentialregning. Nyt Tidsskrift f. Matematik. 23. (1912), S. 1—17.

nennen (La Valeur de la Science, Paris 1905; La Science et l'Hypotèse, Paris 1906; Science et Méthode, Paris 1908); allen diesen Arbeiten verdanken wir vielfache Anregung.

1. Die Elementargeometrie.

3. Was ist *eine wirkliche Ebene?* Diese Frage beantwortet man, indem man zusieht, wie man in der Praxis, in den Maschinenfabriken, die Ebenen herstellt. Man benützt eine sogenannte Richtplatte, eine Normalebene, nach welcher man durch geeignete Bearbeitung die herzustellenden ebenen Flächen zurichtet. Wie erhält man aber derartige Richtplatten? Sie werden je drei und drei hergestellt. Man nimmt drei Eisenplatten, welche annähernd ebene Flächen darstellen; dann bearbeitet man sie nach und nach durch Schaben so lange, bis jede derselben schliesslich mit jeder der anderen genau aufeinander passt.[1] Dieser selbstkontrollierende Vorgang gibt uns die einzige genaue Erklärung davon, was wir auf der wirklichen Welt unter einer Ebene zu verstehen haben.

4. Ein Körper mit zwei ebenen Flächen, welche längs einer Kante aneinander stossen, heisst ein Keil. Wir wollen nun erklären, was wir unter einem *Normalkeil* verstehen. Die Normalkeile sind Keile, die wir uns je drei und drei derart hergestellt denken, dass irgend zwei von den drei Keilen einander ausfüllen können, d. h., sie können auf eine Ebene so gelegt werden, dass jeder der beiden Keile eine Fläche in dieser Ebene hat, während sie einander längs ihrer beiden anderen Flächen berühren. Wenn diese Bedingung für je zwei von den drei Keilen erfüllt ist, so nennen wir jeden der Keile einen Normalkeil. Die Ebenen eines Normalkeils heissen *senkrecht zu einander*, und die hier angegebene selbstkontrollierende Herstellungsweise von Normalkeilen enthält die einzige genaue Erklärung des Aufeinandersenkrechtstehens von zwei Ebenen.

Die Kante eines Normalkeils heisst eine *gerade Linie* oder eine Gerade.

5. Wir gehen nun zur Definition einer *Normalecke* über. Unter einer Normalecke verstehen wir einen Körper mit drei ebenen Flächen, welche paarweise zu einander senkrecht sind und längs 3 Kanten zusammenstossen, welche wiederum aneinanderstossen und dabei eine Spitze bilden. Je zwei dieser Kanten heissen *senkrecht zu einander*. Die Spitze der Ecke nennen wir einen *Punkt*.

Betreffend die Existenz der Normalecke haben wir uns nichts Weiteres vorzunehmen als auf ihre genaue maschinentechnische Herstellung hinzuweisen.

6. Andere Idealformen für Ebenen, gerade Linien und rechte Winkel als

[1] Vgl. Karmarsch-Fischer: Mechanische Technologie, Bd. I. Leipzig 1888, S. 677.

die oben beschriebenen existieren nicht. *Alle Ebenen, gerade Linien und rechte Winkel sind Nachbildungen von den genannten maschinentechnischen Idealformen.* Naturlich dürfen unsere Erklärungen nicht als Definitionen im logischen Sinne aufgefasst werden; sie sollen nur dazu dienen, die genannten Gegenstände der Wirklichkeit praktisch genau zu beschreiben. Wirkliche Dinge lassen sich überhaupt nicht logisch definieren.

7. Die in der Praxis am häufigsten benützte Nachbildung unserer Idealebene, ist die Zeichenebene, welche durch das auf dem Reissbrett ausgespannte Zeichenpapier dargestellt wird. Bei dieser Darstellung ermitteln wir durch Zeichnung mittels eines Lineals unsere geraden Linien, indem wir bei der Zeichnung gerade eine treue Nachbildung der Kante des Lineals, also der Kante eines Normalkeils, herzustellen versuchen. Einen Punkt ermitteln wir durch die Zirkelspitze oder durch Kreuzung zweier zu einander senkrechten Geraden.

Indem wir nun zunächst unsere Untersuchungen auf die *Geometrie der Zeichenebene* beschränken, schreiten wir an die Begründung dieser Geometrie.

Und diese Begründung gelingt auf einmal mit Hilfe einer einzigen Erfahrungstatsache, der Existenz des *quadrierten Papiers:* Auf diesem Papier finden wir zwei Reihen zu einander senkrechte Gerade, welche einander in kongruente Massstäbe einteilen; jede Reihe teilt die Ebene (das Papier) in kongruente Streifen ein und teilt auch jede auf das Papier eingezeichnete schräge Gerade in gleich grosse Stücke. Diese unmittelbar in die Augen fallenden Eigenschaften lassen sich mit Hilfe eines Stücks Durchzeichnungspapiers oder einer Platte aus Glas oder Zelluloid, auf welche ein gleichartiges Quadratnetz eingeritzt ist, genau beschreiben und ablesen.

Das Durchzeichnungspapier (oder die durchsichtige Platte) mit dem Quadratnetz nennen wir eine *Massebene.*

Wir haben nun die Mittel in der Hand, die geometrische Proportionslehre innerhalb der Zeichenebene zu begründen. Hat man nämlich in dieser Ebene zwei rechtwinklige Dreiecke, ABC und AB_1C_1, deren Hypotenusen, AB und AB_1 auf dieselbe gerade Linie fallen, während die Katheten, AC und AC_1, auf eine andere gerade Linie fallen, und legt man die Massebene auf die Figur, so dass eine der Geraden des Quadratnetzes auf AC fällt (Fig. 1), so lässt sich sofort ablesen, dass die Proportion

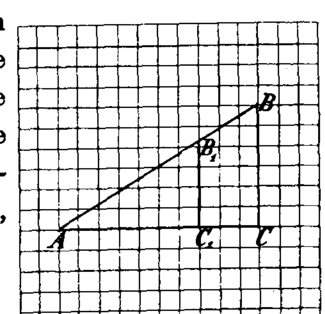

Fig. 1.

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$$

mit einer gewissen Annäherung gültig sein wird. Die Annäherung wird von der Feinheit der Darstellung abhängen, und kann in jedem einzelnen Fall durch Angabe einer gewissen oberen Schranke der Unsicherheit ausgedrückt werden.

Hiernach kann man aber alle die gewöhnlichen metrischen Sätze über rechtwinklige Dreiecke, insbesondere den pythagoräischen Lehrsatz, herleiten, indem man alle Sätze als näherungsweise gültige Resultate erhält. Dass man dann auch die analytische Geometrie, in einer ähnlichen praktischen Form, erhalten kann, ist sofort ersichtlich.

Die Begründung unserer praktischen Geometrie ist hiermit vollendet. Dass man nachher aus *Ökonomie der Sprache* die unsere Sätze immer begleitenden, beschränkenden Worte »mit einer gewissen Annäherung» u. dgl. auslassen, oder genauer darunter verstehen wird, folgt von selbst; und man gelangt dadurch zu einem Lehrgebäude, welches dem Wortlaut nach mit der formalen Euklidischen Geometrie vollständig zusammenfällt.

Die formale Euklidische Geometrie wird also nur als eine bequem abgerundete Formulierung der Resultate der praktischen Geometrie hervortreten. Diese Formulierung an sich zu studieren, und dabei die innere logische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der formalen Sätze zu diskutieren, wird dann eine rein logische Aufgabe, welche an sich als unabhängig von dem ursprünglichen, empirischen Inhalt der Sätze anzusehen ist, und diese Aufgabe leitet nunmehr zu allen denjenigen Untersuchungen, die bisher unter den Namen von Grundlagen der Geometrie zusammengefasst worden sind.

8. Aus der Geometrie der Zeichenebene, oder vielmehr der Geometrie unserer maschinentechnischen Ebene, können wir die praktische Raumgeometrie ableiten, indem wir an unsere Definitionen von Normalkeilen und Normalecken anknüpfen. In dieser Hinsicht müssen wir doch noch eine Tatsache der Erfahrung entnehmen, welche darauf hinausläuft, dass *wenn ein Normalkeil und eine Normalecke auf dieselbe Ebene ε gestellt werden, derart, dass jedes von ihnen eine Fläche in der Ebene ε hat, während die Spitze der Ecke auf die Kante des Keils fällt, dann wird diejenige Kante der Ecke, welche nicht in ε liegt, in der zu ε senkrechten Fläche des Keils enthalten sein.*

Mit Hilfe dieser Tatsache und unter Berücksichtigung unserer oben entwickelten ebenen, praktischen Geometrie wird man dann unschwer die praktische analytische Raumgeometrie aufbauen können.

9. Was wir bisher erreicht haben, ist nur die praktische Geometrie innerhalb kleinerer Wahrnehmungsgebiete, wo wir voraussetzen können, dass unsere maschinentechnischen Definitionen direkte Bedeutung haben. Durch Zusammen-

setzung derartiger Bereiche bildet man grössere Bereiche, und erreicht solcherweise alles, was man mit direkten Messmethoden beherrschen kann.

Die Geometrie der indirekten Messungen lässt sich aber auch in sehr einfacher Weise begründen. Jede indirekte Messung beruht nämlich auf konventioneller Erweiterung der direkten Messungsmethoden. Wollen wir z. B. von dem Abstand zweier Sterne sprechen, so müssen wir eine konventionelle Messungsmethode festsetzen, und wir wählen dann die möglichst natürliche, die nämlich, dass wir die Geometrie, welche wir für unsere direkten Messungen gültig gefunden haben, auch für die erweiterten Messungen gelten lassen, indem wir hierdurch nur zwischen dem zu messenden Abstand (dem Abstand im Himmelsraum) und den direkt messbaren Dingen (Abständen auf der Erde und Gesichtswinkeln) eine konventionelle Verbindung herstellen.

Und wie es mit den grossen, nicht direkt messbaren Abständen, geht, so auch mit den kleinen; man definiert ihre Masszahlen in konventioneller Übereinstimmung mit der Geometrie, welche innerhalb der für direkte Messung zugänglichen Wahrnehmungsbereiche Gültigkeit hat.

10. Auf diese Weise gelangt man schliesslich zur *arithmetischen Geometrie* als das für alle Messungen natürliche Hilfsmittel. Der arithmetische Raum wird als Mannigfaltigkeit arithmetischer Zahlentripeln (x, y, z), »Punkte», definiert, indem x, y, z beliebige arithmetische Zahlen bedeuten. »Gerade Linien» und »Ebenen» werden in bekannter Weise durch Gleichungen ersten Grades definiert. Der »Abstand» zweier Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) wird durch die Zahl $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ definiert.

11. Wenn wir eine genaue Vergleichung zwischen der vorstehenden Begründung der Geometrie und dem gewöhnlichen Euklidischen System anstellen wollten, so könnte man darauf denken, eine logische Analyse des ganzen benützten Erfahrungsmaterials vorzunehmen. Die vollständige Durchführung dieser Analyse halten wir doch für minder wichtig, und beschränken uns darauf, die folgenden Tatsachen hervorzuheben.

In unserm praktischen System gibt es keine Voraussetzungen betreffend die Möglichkeit der Verlängerung von Geraden und Ebenen, kein Parallelenaxiom, keine eigentlichen projektiven Axiome (über die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte oder einer Ebene durch drei Punkte; über die Existenz der Schnittlinie zweier Ebenen, welche einen Punkt gemein haben). Und es war eben unser Ziel, diese Axiome wegen ihrer praktischen Ungenauigkeit durch andere zu ersetzen, welche den Ansprüchen der Wirklichkeit besser entsprechen. Die neuen Axiome, die in dieser Hinsicht benützt werden könnten, sind im wesentlichen die folgenden:

1) In der Ebene:

Durch jeden Punkt lässt sich eine und nur eine Gerade senkrecht zu einer gegebenen Geraden ziehen.

In jedem Viereck mit 3 rechten Winkeln muss der vierte Winkel auch ein rechter sein.

2) Im Raume:

Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade (bezw. Ebene), welche senkrecht zu einer gegebenen Ebene (bezw. Geraden) ist.

Durch jede Gerade geht eine und nur eine Ebene, welche senkrecht zu einer durch die Gerade hindurchgehende vorgelegte Ebene ist.

Wenn eine Gerade g und eine Ebene ε beide zu derselben Ebene senkrecht sind und durch einen gemeinsamen Punkt dieser Ebene hindurchgehen, so ist g in ε enthalten.

Bei der Begründung der Proportionslehre können wir uns das Verhältnis zweier Strecken durch den Kettenbruchalgorithmus definiert denken.

Schliesslich heben wir aber hervor, dass *unser praktisches System gerade in seiner ursprünglichen Form den möglichst einfachen Ausdruck findet. Eine genaue logische Analyse in einzelne Axiome nach dem Euklidischen Muster wird sich immer als schwerfällig und unnatürlich erweisen.*

2. Grundbegriffe der praktischen Infinitesimalgeometrie.

12. In der theoretischen ebenen Geometrie wird eine ebene Kurve definiert als eine Menge von Punkten (x, y), deren Koordinaten x, y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

dargestellt werden, wobei $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ eindeutige reelle, stetige Funktionen der reellen veränderlichen t bedeuten, welche einem gegebenen Intervall (a, b) angehört. Die Halbtangente rechts (bezw. links) im Punkte t wird als Grenzlage des Halbstrahls definiert, der von dem Punkte t ausgeht und den Punkt $t + \Delta t$ enthält, indem Δt abnehmend (bezw. zunehmend) gegen Null konvergiert. Die Existenz einer derartigen Halbtangente ist nicht durch die gegebenen Bedingungen sichergestellt, hängt aber von der näheren Beschaffenheit der Funktionen φ und ψ ab.

Mit den praktischen (wirklich vorkommenden, etwa gezeichneten) Kurven ist es ganz anders. Eine praktische Kurve wird von einem wirklichen Punkt, z. B. der Spitze eines Bleistifts, beschrieben; die Kurve lässt sich immer in eine endliche Anzahl geradliniger Stücke zerlegen, was in mannigfacher Weise geschehen kann; die Lage der Teilpunkte spielt dabei keine wesentliche Rolle, wenn nur die Teilstücke hinreichend klein sind. Eine praktische Kurve kann also immer als Polygon mit endlicher Seitenzahl aufgefasst werden; die Spitzen des Polygons haben aber keine vorausbestimmte Lage, was damit zusammenhängt, dass die geraden Linien, die als Seiten des Polygons gelten, sich so unmerkbar aneinander reihen, dass je zwei aufeinanderfolgende dieser Linien nicht nur einen einzelnen Punkt, sondern eine ganze Strecke gemein haben.

Als Halbtangente eines praktischen Kurvenbogens MN in dem Punkt M müssen wir den von M ausgehenden Halbstrahl ansehen, welcher eine möglichst lange von M ausgehende Strecke mit der Kurve gemein hat. Um aber den Anschluss an die oben gegebene Definition der Tangente einer theoretischen Kurve zu erreichen, können wir sagen, dass wir auch bei der praktischen Kurve die Halbtangente als Grenzlage eines von M ausgehenden Halbstrahls MM_1 auffassen können, nur so, dass wenn M_1 bei der Bewegung nach M hin eine gewisse Lage erreicht hat, der Halbstrahl MM_1 dann ganz von selbst alle die folgenden Lagen enthalten wird, dergestalt, dass die Grenzlage schon so praktisch erreicht wird.

13. Denken wir uns eine praktische Kurve (etwa eine gezeichnete Kurve) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der praktischen Ebene (der Zeichenebene) durch die Gleichung $y = f(x)$ definiert, wo $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist, so wird diese praktische Kurve immer bestimmte Tangenten (rechts und links) haben. Es handelt sich nämlich darum, für jedes x eine Konstante A zu bestimmen, derart, dass dasjenige Intervall $(0, k)$, $k > 0$ bezw. $k < 0$, innerhalb dessen jeder Wert h der folgenden Ungleichung

$$|f(x+h) - f(x) - Ah| < \varepsilon$$

genügt, so gross wie möglich wird, wobei ε die Schwelle der Genauigkeit der vorliegenden Darstellung bedeutet.

Diese Aufgabe ist immer lösbar, auch wenn $f(x)$ nicht differenzierbar ist, und zumal kann man sagen, dass wenn $f(x)$ auch differenzierbar ist, wird man doch nicht immer annäherungsweise $A = f'(x)$ setzen können.

Ist $f(x)$ differenzierbar und $f'(x)$ monoton (z. B. wachsend), so wird $y = f(x)$ in der arithmetischen Ebene einen theoretischen konvexen Bogen darstellen, dessen konkave Seite nach der positiven Seite der y-Koordinaten gekehrt ist, und wenn wir durch den Punkt $(x, y - \varepsilon)$ eine Tangente an diese Kurve ziehen, so wird die Richtung dieser Tangente denjenigen Wert A bestimmen, welcher der oben aufgestellten Ungleichung genügt.

14. Der oben erreichte Anschluss der Definition der praktischen Tangente

an die Definition der theoretischen Tangente (vgl. 12) ist von der grössten Wichtigkeit. Vor allem muss man sich davor hüten, die Tangente als eine Gerade zu betrachten, welche zwei möglichst dicht aneinanderliegende Kurvenpunkte verbindet; zwei derartige Punkte bestimmen in der Tat eine Gerade sehr schlecht; würde man sich für einen Augenblick die Kurve mit Ausnahme der beiden Punkte weggenommen, und dann eine Gerade durch die Punkte hindurchgelegt denken, so ergibt sich sofort, dass bei der Zurückführung der Kurve in ihre ursprüngliche Lage die Möglichkeit besteht, dass die gefundene Verbindungsgerade der beiden Punkte eine beträchtliche Abweichung von der wirklichen Tangente aufweisen könnte.

15. Der Schmiegungskreis in einem Punkte M einer theoretischen Kurve wird definiert als die Grenzlage eines veränderlichen Kreises, der die Kurve in M berührt und ausserdem einen beweglichen, sich dem Punkte M unbegrenzt nähernden Punkt M_1 der Kurve enthält. Es sei M_1P das von M_1 auf die Tangente m in M gefällte Lot, und es schneide die Gerade M_1P den genannten veränderlichen Kreis zum zweiten Mal in dem Punkte M_2, so wird der Durchmesser 2ϱ des Schmiegungskreises:

$$2\varrho = \lim PM_2 = \lim \frac{(MP)^2}{PM_1}.$$

Die Existenz dieses Grenzwerts wird natürlich von der Definition der Kurve bedingt.

Bei den praktischen Kurven wird sich die Sache anders gestalten: Als Schmiegungskreis eines praktischen Kurvenbogens MN in dem Punkte M müssen wir den Kreis ansehen, welcher einen möglichst langen von M ausgehenden Bogen mit der Kurve gemein hat. Auch hier erreichen wir aber sofort den Anschluss an die theoretische Definition, wenn wir den nach M konvergierenden Punkt M_1 nur so weit führen, dass der Kreis, welcher die Kurve in M berührt und durch M_1 geht, den ganzen Kurvenbogen MM_1 enthält. Man wird bei dieser Auffassung des Grenzbegriffes auch für die praktischen Kurven die oben gegebene Formel für den Durchmesser des Schmiegungskreises anwenden können; natürlich wird das Resultat, wie bei allen praktischen Massbestimmungen, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

Eine ähnliche Auffassung des praktischen Grenzbegriffs wird man überall verwenden können um dabei aus theoretischen Untersuchungen praktisch brauchbare Resultate herzuleiten.

16. Ähnliche Betrachtungen hinsichtlich der praktischen Bestimmung des Schmiegungskreises, wie die hinsichtlich der praktischen Bestimmung der Tangente früher angeführten (13), wird man leicht formulieren können. Es wird aber

sofort ersichtlich, dass die direkte Durchführung solcher Bestimmungen schon für die Tangente sehr schwierig wird, und es wird sich von selbst empfehlen, für unsere praktischen Kurven mathematische Ausdrücke ($y = f(x)$) aufzusuchen, wo man mit hinreichender Genauigkeit bei der Bestimmung der praktischen Tangente, des praktischen Schmiegungskreises u. s. w. durch die gewöhnlichen Methoden der Differenzialrechnung brauchbare Resultate erhalten kann. Die theoretische Abschätzung der auf diesem Weg erzielten Genauigkeit wird doch im allgemeinen beträchtliche Schwierigkeiten darbieten. Die praktische Abschätzung hingegen wird man in jedem einzelnen Fall rein empirisch erhalten können. Wir wollen hierfür ein einfaches Beispiel geben.

In der Zeichenebene sei eine Parabel durch ihre Leitlinie l und ihren Brennpunkt F vorgelegt; in dem Scheitel A der Parabel bestimmen wir den »theoretischen» Schmiegungskreis und finden als solchen einen Kreis, dessen Radius gleich dem Abstand des Punktes F von l ist. Dieser Schmiegungskreis werde nun gezeichnet. Es handelt sich dann darum, einen möglichst langen Bogen AB dieses Kreises zu finden, welcher als Bogen unserer Parabel gelten kann, und dies wird man rein experimentell ausführen, indem man durch direktes Probieren mit dem Stechzirkel den Punkt B als den von A auf dem Kreise am weitesten entfernten Punkt ermittelt, dessen Abstände von F und l gleich gross werden.

In anderen Fällen wird man ähnliche Methoden erfinden können; es wird dabei von Wichtigkeit sein, eine einfache experimentelle Darstellung der in Rede stehenden Kurve zu haben. Solche Darstellungen, welche in dieser Hinsicht rasch und genau ans Ziel führen, dürften ein interessantes Kapitel der praktischen Geometrie ausmachen.[1]

17. Unsere praktische Auffassung der Kurven als Polygone mit vielen dicht aufeinanderfolgenden Seiten könnte vielleicht auf den Gedanken leiten, dass man nunmehr die ganze theoretische Infinitesimalgeometrie in der Praxis entbehren könnte, indem man die Kurvenlehre auf eine Lehre von Polygonen, d. h. auf rein elementargeometrische Fragen beschränken könnte. Dies ist doch keineswegs der Fall.

Zunächst bedeutet auch hier die Theorie eine durchaus wesentliche Ökonomie für die Praxis. Und bei näherer Überlegung wird sich ergeben, dass beinahe alle Betrachtungen, die sich als notwendig für die Behandlung der theoretischen Kurven herausgestellt haben, auch in angepasster Form für praktische Kurven unentbehrlich sind. Wir wollen hierfür gleich ein Beispiel einschalten.

---

[1] Vgl. des Verfassers: *Geometriske Eksperimenter*, Köbenhavn 1913. Deutsche Ausgabe in Vorbereitung.

18. Eine konvexe Kurve r rollt auf der Geraden f. Der Berührungspunkt O ist der augenblickliche Drehpol, und die Normalen der bei der Rollbewegung beschriebenen Bahnkurven gehen im Augenblick durch O. Diese Tatsache wird gewöhnlich dadurch veranschaulicht, dass man die Kurve durch ein Polygon ersetzt, wobei die Rollbewegung durch eine Reihe von aufeinanderfolgenden Drehungen ersetzt wird. Kann nun diese Betrachtung unmittelbar als Beweis verwertet werden? Praktische Kurven haben wir ja tatsächlich oben als Polygone erklärt, und es scheint sonach für sie alles in Ordnung zu sein. Es ist aber nicht so. Die Tangente der Bahn eines Punktes P darf man nämlich, wie oben hervorgehoben, nicht ohne weiters als Verbindungsgerade von benachbarten Punkten ansehen. Sowohl für praktische als theoretische Kurven müssen wir andere Beweismittel suchen; und wir können in der Tat in beiden Fällen dieselben Betrachtungen verwenden, nur so, dass wir für die praktischen Kurven die Grenzprozesse im oben erklärten praktischen Sinne verstehen. Der Beweis soll hier in seiner theoretischen Form gegeben werden (vgl. Fig. 2).

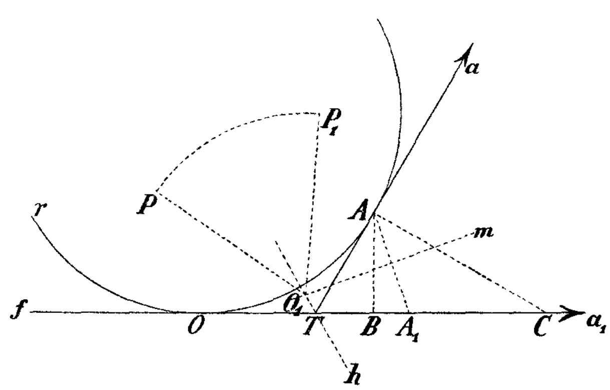

Fig. 2.

Lassen wir r so weit auf f weiter rollen, bis der Punkt A von r in den Punkt A_1 von f fällt ($OA_1 = \widehat{OA}$). Die Halbtangente a in A (für den Umlaufssinn OA) kommt dann mit dem Halbstrahl a_1 von f zur Deckung. Für die beiden Figuren, Aa und A_1a_1, ergibt sich nun ein Rotationspol O_1, der als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m von AA_1 und der Halbierungslinie h des Winkels OTA (Nachbarwinkels von (aa_1)) entsteht. Ein beliebiger Punkt P wird dann bei der Rollbewegung in einen Punkt P_1 fallen, derart, dass das Dreieck PO_1P_1 gleichschenklig ist mit dem Scheitelwinkel $PO_1P_1 = (aa_1)$. Wenn nun A nach O konvergiert, so, behaupten wir, konvergieren die Linien h und m nach der Normalen und der Tangente der Kurve r in O, und ihr Schnittpunkt konvergiert nach O, so dass die Grenzlage des Halbstrahls PP_1 senkrecht zu PO wird, d. h., O wird Momentanpol der Bewegung. Dass h nach der Normalen in O konvergiert, folgt daraus, dass T nach O und der Winkel (aa_1) gegen Null konvergiert; dass m nach der Tangente konvergiert, folgt daraus, dass wenn $AB \perp f$ und $AC \perp a$ errichtet werden, der Punkt A_1 innerhalb der Strecke BC fallen muss, und da die beiden Geraden, AB und AC, nach der Normalen in O konvergieren, so wird AA_1 ebenfalls nach dieser Linie konvergieren, woraus sofort folgt, dass m gegen die Tangente konvergiert.

Der Beweis ist hiermit für theoretische Kurven vollendet, und für praktische Kurven kann man ihn auch verwerten, indem wir, wie oben genannt, nur die Grenzprozesse in der praktischen Form zu nehmen haben.

3. Über den praktischen Bereich der Infinitesimalgeometrie.

19. Wie schon in der Einleitung erwähnt, müssen wir es als unbefriedigend ansehen, wenn man die Untersuchungen der Infinitesimalgeometrie auf analytische, reguläre Gebilde beschränken würde. Es ist aber noch eine offene Frage, wie wir dann unseren Bereich abgrenzen müssen, und wir beabsichtigen freilich nicht hier auf diese Frage eine Antwort in abgeschlossener Form zu geben. Wir wollen uns vielmehr darauf beschränken, die sehr naheliegende und übrigens wohlbekannte Regel aufzustellen, dass jede in der Wirklichkeit vorkommende, mathematische Abhängigkeit abteilungsweise stetig und abteilungsweise monoton ist. Wenn wir diese Bedingung bei jedem einzelnen Problem zur Erlangung einer praktischen Abgrenzung der Untersuchung passend heranziehen, so werden die infinitesimalgeometrischen Untersuchungen unmittelbar den Anwendungen angepasst werden können. Gleichzeitig wird man doch natürlich jedesmal dafür sorgen, dass der theoretischen Tragweite der Untersuchungen nicht unnötige Beschränkungen auferlegt wird.

Unter diesen Gesichtspunkten gehen wir nun dazu über, einen Ausblick über die grundlegenden Fragen der Kurvenlehre zu geben.

4. Ebene Kurven.

20. Wir gehen von dem allgemeinsten Kurvenbegriff in einem beschränkten Teil der Ebene aus, welcher durch die Parameterdarstellung gegeben ist

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Wir verlangen nun zunächst, dass die stetigen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise monoton (und ohne Invariabilitätszüge)[1] sein sollen; weiter verlangen wir, dass das Verhältnis (oder der reziproke Wert des Verhältnisses)

[1] Wenn wir im folgenden die Worte »abteilungsweise monoton« brauchen, so soll immer darunter verstanden sein, dass der Fall der Unveränderlichkeit ausgeschlossen wird.

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{\psi(t)-\psi(t_0)}$$

für jeden Wert von t_0, in der Umgebung von t_0, und für $t \neq t_0$, eine abteilungsweise stetige und monotone Funktion von t definieren soll. Hieraus folgert man dann das Vorhandensein einer bestimmten Halbtangente, rechts bezw. links, in jedem Punkt der gegebenen Kurve.

Setzen wir ferner voraus, dass die Richtung der, z. B. rechtsseitigen, Halbtangente abteilungsweise stetig und monoton variiert, wenn der Punkt die Kurve monoton durchläuft, so wird sich sofort ergeben, dass unsere Kurve aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen, deren jeder ohne Knick ist, besteht. Hierzu braucht man nur den etwas einfacheren Satz zu zeigen, dass ein Bogen, dessen rechtsseitige Halbtangente monoton und stetig variierende Richtung hat, und dessen Totalkrümmung $< \pi$ ausfällt, ein konvexer Bogen sein muss, und diese Tatsache wird man einfach daraus schliessen können, dass keine gerade Linie mit dem Bogen mehr als zwei Punkte gemein haben kann; die Existenz von drei Schnittpunkten M, N, P (welche in dieser Ordnung auf dem Bogen aufeinander folgen) würde nämlich den Umstand nach sich ziehen, dass die beiden Bögen MN und NP je einen Punkt enthielten, dessen Tangente zur Geraden MNP parallel wäre, und das wird unmöglich sein, weil die Totalkrümmung $< \pi$ vorausgesetzt wurde.

21. Eine Kurve mit den angeführten Eigenschaften und ohne Knick nennen wir eine *einfache Kurve*. Es wird wichtig sein, Hilfsmittel auszubilden, durch welche man untersuchen kann, in wie weit irgend eine durch ihre Parameterdarstellung ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$) vorgelegte Kurve einfach ist oder nicht. In dieser Hinsicht wollen wir zunächst auf den folgenden Satz aufmerksam machen.

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Gebiete der Ebene liegt, in jedem ihrer Punkte M eine bestimmte Tangente und (die Endpunkte ausgenommen) zwei bestimmte Halbtangenten mit entgegengesetzten Richtungen aufweist, und wenn die Richtung der Tangente abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, so wird die Kurve einfach sein.

Um dies zu beweisen braucht man nach der vorangehenden Untersuchung nur zu zeigen, dass die Tangente in M stetig mit M variiert, und diese Tatsache wird daraus gefolgert, dass die Tangente in M nicht mehr als eine Grenzlage haben kann, wenn M sich einem bestimmten Punkt P der Kurve nähert; es müsste denn möglich sein, eine monotone Reihe $M_1\ M_2\ M_3 \cdots$ mit dem Grenzpunkt P auf der Kurve zu wählen, derart, dass die Richtungen der diesen Punkten entsprechenden Tangenten $m_1\ m_2\ m_3 \cdots$ unendlich oft hin und her schwankten.

22. Aus diesem Satze lässt sich nun weiter der folgende Satz ableiten.

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Gebiete der Ebene liegt, durch die Parametergleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellt ist, wo wenigstens eine der Funktionen abteilungsweise monoton ist, und wenn die Kurve in jedem Punkt M eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, dann wird die Kurve eine einfache Kurve sein.

Wenn jeder Punkt eine bestimmte Tangente besitzt, können zwei Möglichkeiten eintreffen (die Endpunkten der Kurve ausgenommen): entweder hat der Punkt zwei entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten, oder die Halbtangenten rechts und links des Punktes fallen zusammen. Im letztgenannten Fall sagen wir, dass die Kurve in dem Punkte eine Spitze hat. Dieser Fall kann nun höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten eintreten. Nach Voraussetzung ist nämlich $x = \varphi(t)$ (bezw. $y = \psi(t)$) eine abteilungsweise monotone Funktion, und infolgedessen wird sofort der Fall ausgeschlossen, wo die Kurve unendlich viele Spitzen aufweist, deren Tangenten nicht zur Y-Achse parallel sind; es bleibt dann noch zu untersuchen, ob die Kurve einen Bogen b enthalten könnte, welcher unendlich viele Spitzen besitzt, deren Tangenten zur Y-Achse parallel sind; man sieht aber sofort, dass dies unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung unserer Kurve widersprechen würde.

Die vorgelegte Kurve hat sonach höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen, und sie lässt sich dann in eine endliche Anzahl Bögen zerlegen, deren jeder ohne Spitzen ist; hieraus folgt nach 21 unmittelbar, dass unsere Kurve eine einfache Kurve ist.

23. Wir gehen nun dazu über, den folgenden allgemeineren Satz zu beweisen:

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Teil der Ebene liegt, mittels Zentralprojektion von einem gewissen Punkte O aus auf eine gewisse gerade Linie g (welche nicht durch O hindurchgeht) in eine abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und wenn die Kurve in jedem Punkt M eine bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, so wird die Kurve eine einfache Kurve sein. Es wird also u. a. hieraus folgen, dass die Kurve mittels Zentralprojektion von einem beliebigen Punkt O_1 aus auf eine beliebige gerade Linie g_1 (welche nicht durch O_1 hindurchgeht) in eine abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und dass die Tangentenfolge der Kurve von jeder beliebigen Geraden der Ebene, welche mit keiner Tangente zusammenfällt, in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird.

Der Satz wird wie im vorigen Falle auf die Tatsache zurückgeführt, dass die Kurve höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen aufweisen kann. Zunächst leuchtet ein, dass höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen vorhanden sein können, deren Tangenten nicht durch O gehen; es bleibt dann noch zu untersuchen, ob die Kurve unendlich viele Spitzen enthalten kann, deren Tangenten durch O laufen. Nach der projektiven Verallgemeinerung einer bekannten Untersuchung von König[1] liegen die Spitzen jedenfalls nirgends dicht auf der Kurve, denn hieraus würde folgen, dass es auf jedem Teil der Kurve einen Punkt gäbe, dessen Tangente eine willkürlich vorgeschriebene Richtung hätte, was unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung unserer Kurve widersprechen würde. Es sei nun S eine Häufungsstelle der Spitzen. In der Umgebung von S wird man dann auf der Kurve unendlich viele einfache Bögen, deren jeder ohne Spitzen ist, abgrenzen können, derart, dass die Tangenten der Endpunkte eines jeden dieser Bögen durch O laufen. Hieraus würde aber folgen, dass man an die Kurve unendlich viele Tangenten parallel zu einer beliebigen von OS verschiedenen Richtung ziehen könnte, und das widerspricht unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung.

Es hat sich also herausgestellt, dass die Kurve höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen enthalten kann. Sie lässt sich demnach in eine endliche Anzahl von Bögen zerlegen, deren jeder ohne Spitzen ist, und ist somit nach 21 eine einfache Kurve.

24. Wir können nun leicht unseren Bereich durch projektive Transformation erweitern, und indem wir dann die ganze projektive Ebene in Betracht nehmen und in derselben eine einfache Kurve definieren als eine Kurve, welche in jedem Punkt eine bestimmte Tangente aufweist und ausserdem der Bedingung genügt, dass sie sich aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen zusammensetzen lässt, welche freilich nicht notwendig in einem beschränkten Teil der Ebene liegen, sondern vielmehr sich ins unendliche erstrecken können, werden wir aus 23 sofort den folgenden Satz herleiten können:

Wenn eine ebene Kurve 1) auf eine gewisse feste Gerade g in einer abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und 2) in jedem Punkt M eine eindeutig bestimmte Tangente hat, deren Schnittpunkt mit einer gewissen festen Geraden g_1 sich abteilungsweise monoton bewegt, wenn M die Kurve monoton durchläuft, dann wird die Kurve eine einfache Kurve sein..

Die Projektion auf die Gerade g kann eine beliebige Parallelprojektion oder

[1] Vgl. U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktion einer veränderlichen reellen Grösse. Leipzig 1892, S. 301—304.

Zentralprojektion sein. Die Gerade g_1 entspricht in dem vorhergehenden Satz der unendlich fernen Geraden, deren Schnittpunkte mit den Tangenten ja die Richtungen der Tangenten bestimmen. Es wäre also eigentlich vorauszusetzen, dass die Gerade g_1 die vorgelegte Kurve nicht schneidet. Man sieht aber sofort, dass diese Beschränkung ohne Belang ist; dass g_1 mit keiner Tangente der Kurve zusammenfallen darf, ist selbstverständlich.

Es folgt nun auch, dass die einfachen Kurven, wie wir sie hier definiert haben, den bekannten VON STAUDT'schen Sätzen, welche von A. KNESER[1] als Grundlagen einer Kurvendefinition benutzt worden sind, Genüge leisten.

Anmerkung. DU BOIS-REYMOND hat als *gewöhnliche* solche Funktionen bezeichnet, welche stetig und differenzierbar sind und ausserdem der Bedingung genügen, dass sie abteilungsweise monoton sind gegen jede als Abszissenachse gedachte Richtung.[2] Die einer derartigen Funktion $f(x)$ entsprechende Kurve $y = f(x)$ lässt sich nicht notwendig aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen zusammensetzen und wird also nicht notwendig eine einfache Kurve.

Beispiel:

$$y = \int_0^x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

25. Auf die gewonnenen Resultate wenden wir nun das Dualitätsprinzip an, indem wir ein *einfaches Geradensystem* in der Ebene definieren als ein System von geraden Linien, welche durch eindeutige und stetige Abbildung eines reellen Punktintervalls (a, b) erzeugt werden können und ausserdem den folgenden Bedingungen genügen:

1. Das Geradensystem wird von einer gewissen festen Geraden g in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten.

2. Jede Gerade des Systems besitzt einen eindeutig bestimmten *Charakteristikpunkt,* d. h. einen Punkt, welcher als Grenzlage des Schnittpunktes der Geraden mit den Nachbargeraden bestimmt wird.

3. Die Projektion der nach dem Intervall (a, b) geordneten Menge der Charakteristikpunkte auf eine gewisse feste Gerade g_1 bildet eine abteilungsweise monotone Punktreihe. (Es wird z. B. genügen, wenn die x-Koordinate des Charakteristikpunktes abteilungsweise monoton variiert.)

Die Tangenten einer einfachen Kurve bilden sonach ein einfaches Geradensystem.

---

[1] A. KNESER: Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumkurven, Math. Ann. 34. Bd., S. 205.

[2] Crelle's Journal 79. Bd., S. 32. Vgl. auch Encyklopädie d. math. Wiss., II. S. 22.

Es gilt aber dann auch der Satz:

Die Geraden eines einfachen Geradensystems sind Tangenten einer einfachen Kurve, welche als Ort der Charakteristikpunkte des Geradensystems erzeugt wird.

26. Wir definieren eine *Normkurve* als eine einfache Kurve, deren Normalen ein einfaches Geradensystem bilden. Da indessen die Richtung der Normalen einer einfachen Kurve abteilungsweise monoton variiert, so ergibt sich, dass *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einfache Kurve als Normkurve ausfällt, dadurch ausgedrückt wird, dass der Charakteristikpunkt* (ξ, η) *der Normalen existiert, und dass seine Abszisse* (*bezw. Ordinate*) *abteilungsweise monoton variiert.*

Wenn also die in der Einleitung genannten Gleichungen

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

die Werte ξ, η als derartige Funktionen von x bestimmen, von welchen wir wissen, dass wenigstens eine als abteilungsweise monotone Funktion ausfällt, dann wird die hierdurch bestimmte Evolute eine einfache Kurve sein, welche von den Normalen der ursprünglichen Kurve berührt wird. Wir können somit ins besondere den folgenden Satz aussprechen:

Es sei $y = f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion, für welche $f''(x)$ endlich und stetig und niemals gleich Null ausfällt; es sei ferner bekannt, dass einer der beiden Ausdrücke

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

eine abteilungsweise monotone Funktion von x definiert, so wird man hieraus schliessen können, dass die Evolute der Kurve $y = f(x)$ eine einfache Kurve ist, welche von den Normalen der Kurve $y = f(x)$ berührt wird.

Die aus den Lehrbüchern bekannten Sätze über den Schmiegungskreis als

Grenzlage eines Kreises durch drei veränderliche Punkte der Kurve u. dgl., über die Lage des Schmiegungskreises bezüglich der Kurve, und über die Evolutenlänge, lassen sich nun ohne Schwierigkeit für Normkurven zeigen. In bezug auf diese Einzelheiten können wir uns auf einen Hinweis zur Darstellenden Geometrie des Verfassers (Leipzig 1914)[1] beschränken, wo diese Dinge auf wesentlich denselben Grundlagen in elementarer Darstellung behandelt sind (vgl. namentlich 7. Kapitel).

27. Ein einfacher konvexer Bogen OP (Fig. 3) wird am einfachsten durch seine natürliche Gleichung dargestellt; darunter versteht man die Gleichung

$$\theta = \theta(s),$$

welche für einen beliebigen Punkt M des Bogens zwischen der Bogenlänge $s = \widehat{OM}$ und dem Winkel (xm) besteht, wobei x und m die dem Umlauf OP entsprechenden vorwärts zeigenden Halbtangenten in O und M bedeuten.

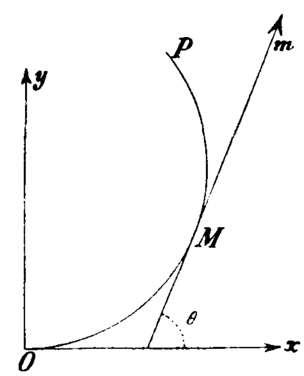

Fig. 3.

Die Bogenlänge s wird numerisch gerechnet, und den Winkel (xm) rechnen wir mit einem Vorzeichen, das mit einem im voraus fest gewählten Umlaufssinn der Ebene übereinstimmt. Da der Bogen als konvex und ohne Knick vorausgesetzt ist, wird die Funktion $\theta(s)$ stetig und monoton, und man hat ausserdem $\theta(0) = 0$.

In dem rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y) mit dem Anfangspunkt O, $\left((x\,y) = +\frac{\pi}{2}\right)$, wird der Punkt M durch die folgenden Koordinaten x, y dargestellt:

$$x = \int_0^s \cos\theta(s)\,ds,$$

$$y = \int_0^s \sin\theta(s)\,ds.$$

Ist die Kurve eine Normkurve, so existiert die Derivierte $\frac{d\theta}{ds}$ und wird ausserdem eine stetige und abteilungsweise monotone Funktion. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind.[2]

28. Als weitere Anwendung unserer allgemeinen Regel über die in der Wirklichkeit vorkommenden Abhängigkeiten (19) als Grundlage einer praktischen Abgrenzung der infinitesimalgeometrischen Untersuchungen geben wir den Beweis und die Abgrenzung des folgenden *Fundamentalsatzes aus der Theorie der Rollkurven:*

[1] Wird im folgenden mit D. G. bezeichnet.
[2] Vgl. D. G., 7. Kap.

Wenn eine gegebene einfache konvexe Kurve r auf einer anderen einfachen konvexen Kurve f rollt, so fällt der Momentanpol der Bewegung nach dem Berührungspunkt O der beiden Kurven.

Die gemeinsame rechtsseitige Halbtangente in O sei mit x bezeichnet (vgl. Fig. 4), und die natürlichen Gleichungen von x und O aus (im obigen erklärten Sinne) seien

$$\theta = \theta(s),$$

$$\theta_1 = \theta_1(s),$$

wobei s die gleichgrossen Bogenlängen $\widehat{OA}$ und $\widehat{OA_1}$ bedeutet, während θ, θ_1 die Winkel (xa) bezw. (xa_1) darstellen. Wir wollen nun gleich voraussetzen, dass die

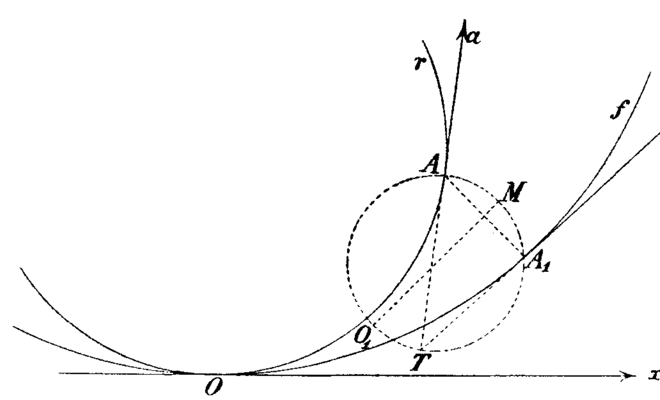

Fig. 4.

Funktion $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton ist (und dabei wie immer ohne Invariabilitätszüge), also in der Umgebung von $s = 0$ durchweg monoton.

Lassen wir r so weit auf f weiter rollen, bis der Punkt A von r in den Punkt A_1 von f fällt ($\widehat{OA_1} = \widehat{OA}$). Die Halbtangente a in A (für den Umlaufssinn OA) kommt dann mit der Halbtangente a_1 in A_1 zur Deckung. Für die beiden Figuren Aa und $A_1 a_1$ ergibt sich nun ein Rotationspol O_1, der in den Mittelpunkt des Kreisbogens ATA_1 fallen muss (T ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in A und A_1). O_1 ist dem Mittelpunkt M des kleinen Bogens AA_1 des Kreises diametral gegenüberliegend. Wenn A (und A_1) nach O konvergiert, wird auch M nach O konvergieren, und es ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass O_1 nach O konvergieren soll, dass der Durchmesser des Kreises gegen Null konvergiert.

Die Koordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden Punkte A und A_1 werden, wenn s_0 die Bogenlänge $\widehat{OA}$ bedeutet:

$$x = \int_0^{s_0} \cos\theta(s)\,ds,$$

$$y = \int_0^{s_0} \sin\theta(s)\,ds,$$

$$x_1 = \int_0^{s_0} \cos\theta_1(s)\,ds,$$

$$y_1 = \int_0^{s_0} \sin\theta_1(s)\,ds,$$

und der Durchmesser des Kreises $A T A_1$ wird durch

$$2\varrho = \frac{\overline{A A_1}}{\sin|\theta - \theta_1|}$$

ausgedrückt.

Nun ist ersichtlich, dass die Grösse 2ϱ dann und nur dann gegen Null konvergiert, wenn es jede der beiden Grössen

$$\frac{|x - x_1|}{\sin|\theta - \theta_1|}, \quad \frac{|y - y_1|}{\sin|\theta - \theta_1|}$$

tut, und die Bedingungen hierfür sind:

$$\lim \frac{x - x_1}{\sin(\theta - \theta_1)} = \lim_{s_0 \to 0} \frac{\int_0^{s_0} (\cos\theta(s) - \cos\theta_1(s))\,ds}{\sin(\theta - \theta_1)} = 0,$$

$$\lim \frac{y - y_1}{\sin(\theta - \theta_1)} = \lim_{s_0 \to 0} \frac{\int_0^{s_0} (\sin\theta(s) - \sin\theta_1(s))\,ds}{\sin(\theta - \theta_1)} = 0.$$

Da nun $\theta(s) - \theta_1(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ eine durchweg monotone Funktion ist, so wird auch die Funktion $\sin\frac{\theta(s) - \theta_1(s)}{2}$ in dieser Umgebung monoton. Man hat deshalb:

$$\left| \int_0^{s_0} (\cos\theta(s) - \cos\theta_1(s))\, ds \right| < 2\, s_0 \sin \frac{|\theta(s_0) - \theta_1(s_0)|}{2},$$

und

$$\left| \int_0^{s_0} (\sin\theta(s) - \sin\theta_1(s))\, ds \right| < 2\, s_0 \sin \frac{|\theta(s_0) - \theta_1(s_0)|}{2},$$

und die obengenannten Grenzwerte werden dann wirklich den Wert Null haben. Also:

Wenn $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton (und ohne Invariabilitätszüge) ist, so wird die Bewegung einen bestimmten Momentanpol haben, und dieser Momentanpol fällt nach O.

29. Unter derselben Voraussetzung wird man leicht zeigen können, dass wenn A bei der Rollbewegung sich A_1 nähert, wird der Halbstrahl $A_1 A$ gegen die Normale in A_1 konvergieren. Setzen wir weiter voraus, dass die Funktion $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton und differenzierbar ist, so lässt sich zeigen, dass die bei der Rollbewegung erzeugten Bahnkurven bestimmte Krümmungskreise haben, und dass man die bekannte EULER-SAVARY'sche Relation zu ihrer Bestimmung verwenden kann, wenn nur die in dieser Relation vorkommende Differenz der Krümmungen der beiden Kurven r und f durch die Derivierte von $\theta(s) - \theta_1(s)$ ersetzt werde.[1]

Schliesslich soll noch darauf hingewiesen werden, dass wir durch die vorhergehenden Methoden auch den Weg nach weitergehenden Untersuchungen über die Fundamentalsätze der Kinematik angegeben haben. Es ist z. B. leicht, unsere Untersuchungen über den Fundamentalsatz der Rollbewegung auszudehnen, so dass man den allgemeineren Fall behandelt, wo $\theta(s)$ und $\theta_1(s)$ Funktionen mit beschränkter Variation bedeuten. Wir haben uns aber hier auf die durch die praktischen Anwendungen natürliche Abgrenzung beschränkt.

5. Raumkurven.

30. Was die Raumkurven anbetrifft, wollen wir zunächst voraussetzen, dass die Kurve in einem beschränkten Teil des Raumes enthalten ist, und dass jeder Punkt der Kurve eine eindeutig bestimmte Tangente hat. Unter dem Richtungskegel der Kurve verstehen wir dann einen Kegel, dessen Seitenlinien zu den

[1] Dies wird durch die in D. G., Kap. 7, 189—190, verwendeten Methoden sofort ersichtlich.

Tangenten der Kurve parallel laufen. Die Kurve soll nun eine *einfache Raumkurve* heissen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Kein Teil der Kurve darf eben (oder geradlinig) sein.

2. Der Richtungskegel ist ein einfacher Kegel, d. h., er muss eine Leitkurve besitzen, welche in dem früher angegebenen Sinne eine einfache ebene Kurve ist.

3. Es gibt eine gewisse Gerade g, derart, dass die Projektion der Kurve auf g von einer anderen gewissen Geraden g_1 aus eine abteilungsweise monotone Punktreihe auf g bildet. (Es wird z. B. hinreichen, wenn eine der rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, welcher die Kurve monoton durchläuft, abteilungsweise monoton variiert.)

Da jeder Punkt der Kurve eine bestimmte Tangente hat, können nur zwei Möglichkeiten eintreten (die Endpunkte der Kurve ausgenommen): entweder hat der Punkt zwei entgegengesetzte Halbtangenten, oder die Halbtangenten rechts und links des Punktes fallen zusammen. Im letztgenannten Falle sagen wir, dass die Kurve in dem Punkte eine Spitze hat. Wir wollen nun zeigen, dass eine einfache Raumkurve nicht unendlich viele Spitzen aufweisen kann. Wären nämlich unendlich viele Spitzen vorhanden, dann müssten ihre Tangenten (mit Ausnahme höchstens einer endlichen Anzahl) wegen der Bedingung 3 die Gerade g_1 schneiden. Durch Projektion von einem unendlich fernen Punkte aus, welcher auf g_1 liegt, würde dann aus der gegebenen Raumkurve eine ebene Kurve entstehen, welche unendlich viele Spitzen hätte, und trotzdem die in dem früher bewiesenen Satz (24) genannten Bedingungen erfüllen würde. Dies ist aber unmöglich, und es hat sich so herausgestellt, dass eine einfache Raumkurve, wie wir sie oben definiert haben, höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen enthalten kann. Die Kurve lässt sich sonach in eine endliche Anzahl von Bögen zerlegen, deren jeder den folgenden Bedingungen genügt: Jeder Punkt des Bogens (die Endpunkte ausgenommen) hat zwei entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten; der Richtungskegel des Bogens ist konvex, d. h., er hat eine ebene konvexe Leitkurve. Einen solchen Bogen im Raume nennen wir im folgenden einen *Elementarbogen.*

31. Jeder Elementarbogen hat höchstens zwei Tangenten, welche zu einer gegebenen Ebene parallel sind; denn auf dem Richtungskegel gibt es höchstens zwei Seitenlinien, die der Ebene parallel sind. So kann man erkennen, dass eine Ebene nicht 4 Punkte P, Q, R, S, mit dem Bogen gemein haben kann, denn sonst müsste jeder der Bögen PQ, QR, RS (wenn P, Q, R, S einander in dieser Reihenfolge auf dem Bogen folgen) mindestens einen Punkt enthalten, dessen Tangente der Ebene parallel wäre (dieser wäre nämlich der Punkt, der auf dem betrachteten Bogen von der Ebene den grösstmöglichen Abstand hat). Folglich: ***Ein Elementarbogen im Raume hat höchstens drei Punkte mit einer Ebene gemein.***

32. Die Schmiegungsebene in einem Punkte M wird definiert als die Grenzlage, welcher eine Ebene zustrebt, wenn sie beständig die Tangente m in M enthält und noch durch einen anderen Punkt N des Bogens geht, der nach M konvergiert. Dass die Schmiegungsebene für jeden Punkt M eines Elementarbogens existiert und eindeutig bestimmt ist, erkennt man, wie folgt: Der Bogen MN muss einen Punkt P enthalten, dessen Tangente p der Ebene mN parallel ist. Der Richtungskegel enthält zwei Seitenlinien m_1 und p_1, die zu m und p parallel sind, die Ebene mN ist deshalb der Ebene $m_1 p_1$ parallel. Wenn nun N nach M konvergiert, konvergiert auch P nach M, und gleichzeitig konvergiert p_1 nach m_1, so dass die Ebene $m_1 p_1$ nach der Tangentialebene des Kegels längs m_1 konvergiert. Hieraus folgt nun: *Jeder Punkt eines Elementarbogens hat eine bestimmte Schmiegungsebene, welche der Tangentialebene des Richtungskegels längs der dem Punkte entsprechenden Seitenlinie parallel ist.*

Eine Ebene, die drei beliebige Punkte A, B, C des Bogens enthält, ist zwei Tangenten p und q, einer an den Bogen AB, der anderen an den Bogen BC parallel. Hieraus schliesst man nun leicht:

Wenn drei veränderliche Punkte A, B, C eines Elementarbogens nach demselben Punkte M konvergieren, muss die Ebene ABC notwendigerweise nach der Schmiegungsebene in M konvergieren.

Diese Resultate lassen sich nun leicht für beliebige einfache Raumkurven verwerten.

33. Mit Hilfe des Richtungskegels untersucht man leicht die Parallelprojektion eines Elementarbogens und gelangt zu dem folgenden Resultat:

Durch Parallelprojektion eines Elementarbogens b im Raume entsteht eine einfache ebene Kurve b'. Hat b eine Tangente, die ein Projektionsstrahl ist, so hat b' in dem entsprechenden Punkte eine Spitze erster Art, und die Tangente in dieser Spitze ist die Spur der Schmiegungsebene. Ist eine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene, ohne dass die zugehörige Tangente ein Projektionsstrahl ist, so wird der dem Berührungspunkt entsprechende Punkt von b' ein Wendepunkt.[1]

Die Schnittlinie der Schmiegungsebene in einem Punkte A und der Schmiegungsebene in einem anderen Punkte B konvergiert nach der Tangente in A, wenn B nach A konvergiert.[2] Dieser Satz gilt dann natürlich für jede beliebige einfache Raumkurve.

Weiter lässt sich zeigen, dass *ein ebener Schnitt der Tangentenfläche eines Elementarbogens, also auch einer beliebigen, einfachen Raumkurve, eine einfache, ebene Kurve ist.*[3]

---

[1] Vgl. D. G. 259.
[2] Vgl. D. G. 260.
[3] Vgl. D. G. 263.

Indem wir schliesslich unsere Definition der einfachen Raumkurven erweitern, derart, dass auch Kurven, welche sich ins unendliche erstrecken, in Betracht genommen werden, folgt dann sofort, dass *eine perspektive Transformation eine beliebige einfache Kurve in eine einfache Kurve überführt.*

34. Durch projektive Transformation wird man ferner aus unserer ursprünglichen Definition der einfachen Raumkurven den folgenden Satz erhalten:

Eine Raumkurve ist dann und nur dann einfach, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Kein Teil der Kurve ist eben (oder geradlinig).*

2. *Es gibt eine Gerade g, derart, dass eine Projektion der Kurve auf diese Gerade existiert, welche abteilungsweise monoton ausfällt.*

3. *Jeder Punkt der Kurve hat eine eindeutig bestimmte Tangente.*

4. *Es gibt eine Ebene, welche die Tangentenfläche der Raumkurve in einer einfachen ebenen Kurve schneidet.*

Es sei noch bemerkt, dass jede einfache Raumkurve den VON STAUDT'schen Sätzen, welche von A. KNESER als Kurvendefinition benutzt worden sind, [1] Genüge leisten.

35. Es sei eine reelle stetige Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x in einem gewissen Intervall (a, b) vorgelegt. Für einen bestimmten Wert x wollen wir dann als *Grenzquotienten* der Funktion im Punkte x jeden Grenzwert

$$\lim_{i \to \infty} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$$

bezeichnen, wo die Reihe $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots\ldots$ eine Fundamentalreihe mit dem Grenzpunkte x bedeutet. Für jede derartige Fundamentalreihe gibt es wenigstens einen Grenzquotienten. Wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots$ alle auf der rechten (bezw. linken) Seite von x liegen, so spricht man von rechtsseitigen (bezw. linksseitigen) Grenzquotienten.

Hilfssatz I. Wenn für eine reelle stetige Funktion $f(x)$ in jedem inneren Punkte des Intervalls (a, b) einer ihrer rechtsseitigen Grenzquotienten gleich Null ausfällt, dann hat die Funktion in dem betrachteten Intervall stets denselben Wert.

Der Satz wird folgendermassen bewiesen. Wenn die Kurve $y = f(x)$ nicht mit einer geraden Linie parallel zur x-Achse zusammenfiele, so behaupten wir, dass man einen Wert x finden könnte, wo kein rechtsseitiger Grenzquotient gleich Null sein könnte. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn die Kurve eine schräge gerade Linie oder ein konvexer Bogen ist, und für die anderen Fälle werden die folgenden Überlegungen ausreichen: Man kann immer eine nicht zur x-Achse

[1] Math. Annalen, 34. Bd., S. 209.

parallele Gerade g finden, welche 3 Punkte A, B, C mit der Kurve gemein hat, derart, dass die Bögen AB und BC nicht auf derselben Seite der Geraden g liegen. Es lässt sich hiernach auf jedem dieser Bögen einen Punkt M bezw. N auffinden, dessen Abstand von g ein Maximum wird. Diejenigen Geraden m und n, welche durch M und N parallel zu g gezogen werden können, müssen dann den ganzen Bogen $AMBNC$ einschliessen, und es werden deswegen die Punkte M und N nicht beide die Bedingung erfüllen können, einen rechtsseitigen Grenzquotienten gleich Null zu besitzen.

Hilfssatz II. Wenn für eine gegebene stetige Funktion $f(x)$ jedem Punkt x des Intervalls (a, b) ein rechtsseitiger Grenzquotient $\varphi(x)$ entspricht, derart, dass die Funktion $\varphi(x)$ stetig wird, so ist $f(x)$ differenzierbar, und es ist $f'(x) = \varphi(x)$.

Zum Beweis hat man nur den vorigen Hilfssatz I auf die Funktion $f(x) - \int_a^x \varphi(x)\,dx$ anzuwenden.

Es sei nun eine beliebige ebene Jordankurve AB mit den Endpunkten A, B vorgelegt. Für einen beliebigen Punkt M der Kurve, welcher von A und B verschieden ist, wollen wir als *Grenzrichtung* der Kurve im Punkte M jeden Halbstrahl bezeichnen, welcher als Grenzlage eines Halbstrahls $MM_{i(i\to\infty)}$ entsteht, indem $M_1, M_2, \ldots M_i \ldots$ eine Fundamentalreihe auf der Kurve mit dem Grenzpunkt M bezeichnen. Wenn $M_1 M_2 \ldots$ auf der Kurve auf derselben Seite von M liegen, sprechen wir von einer rechtsseitigen (bezw. linksseitigen) Grenzrichtung, indem wir nach Willkür den einen Umlaufssinn als den rechtsseitigen, den andern als den linksseitigen bezeichnen.

Aus dem Hilfssatz II ergibt sich nun durch projektive Transformation der

Hilfssatz III. Wenn es für eine ebene Jordankurve, welche mit jedem Strahl eines bestimmten gegebenen Strahlenbüschels höchstens einen Punkt gemein hat, möglich ist, zu jedem ihrer Punkte P (die Endpunkte ausgenommen) eine rechtsseitige dem Strahlenbüschel nicht angehörige Grenzrichtung p anzugeben, derart, dass die Richtung p stetig mit P variiert, so hat die Kurve in jedem Punkte P eine bestimmte Tangente, und diese Tangente ist p.

36. Wir gehen nun daran, den folgenden Hauptsatz zu beweisen:

Wenn eine Raumkurve k in jedem Punkt eine bestimmte Tangente und eine bestimmte, mit dem Punkte stetig variierende Schmiegungsebene hat; wenn ausserdem eine Projektion der Kurve auf eine Ebene ε existiert, welche eine einfache ebene Kurve k_1 ist, während keine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene ist, und wenn schliesslich eine Gerade g vorhanden ist, welche von der Folge der Schmiegungsebenen in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird, so muss die Kurve k eine einfache Raumkurve sein.

Wir können uns offenbar auf den Fall beschränken, wo die Projektion auf die Ebene ε eine Parallelprojektion ist, und wo die Gerade g unendlich fern ist; ferner wird es ausreichen, den Fall zu erledigen, wo die ebene Kurve k_1 ein konvexer Bogen ist, dessen Totalkrümmung $<\pi$. Wir wählen auf k einen bestimmten Umlaufssinn als den rechtsseitigen und haben dann in der Projektion k_1 einen entsprechenden (rechtsseitigen) Umlaufssinn. Keine Schmiegungsebene ist eine projizierende Ebene, und es wird dann auch keine Tangente von k ein Projektionsstrahl sein können. Die rechtsseitigen Halbtangenten von k werden in rechtsseitige Halbtangenten von k_1 projiziert. Keine zwei Halbtangenten von k können parallel sein, es müssten denn ihre Projektionen auch parallel sein.

In jedem Punkt A von k haben wir eine bestimmte Schmiegungsebene α als Grenzlage einer Ebene, welche durch die Tangente a in A und durch einen Punkt B von k hindurchgeht, welcher nach A konvergiert; und es ist dabei ohne Belang, von welcher Seite B sich A nähert; da nun die Projektion k_1 konvex vorausgesetzt ist, und die Schmiegungsebene keine projizierende Ebene sein kann, so wird ersichtlich, dass die Halbebene, welche von der Tangente a begrenzt wird und den Punkt B enthält, bei dem genannten Grenzübergang eine eindeutig bestimmte Grenzlage α_1 erreichen muss. Diese Halbebene α_1 nennen wir die *Schmiegungshalbebene* in A. Der Bogen AB auf k enthält wenigstens einen Punkt M (zwischen A und B), dessen Tangente zur Ebene aB parallel läuft, und wenn wir uns B auf der Kurve k auf der rechten Seite von A angenommen denken, so wird die Halbebene, welche von der Tangente a begrenzt wird und einen Halbstrahl enthält, welcher der rechtsseitigen Halbtangente m_1 in M gleichgerichtet ist, nach der Schmiegungshalbebene konvergieren, wenn B nach A konvergiert; dies ergibt sich unmittelbar durch Betrachtung der Projektion k_1. Aus diesen Tatsachen können wir nun gleich die folgenden Eigenschaften des Richtungskegels ableiten, indem wir uns auf den Mantel dieses Kegels beschränken, dessen Seitenlinien den rechtsseitigen Halbtangenten von k parallel laufen: 1) Der Kegel hat keine Doppelseitenlinien; 2) die Projektionen seiner Seitenlinien auf die Ebene ε bilden einen monoton verlaufenden Strahlenbüschel in dieser Ebene; 3) jeder Seitenlinie a' (parallel zur rechtsseitigen Halbtangente a_1 eines Punktes A der Raumkurve; vgl. die Bezeichnungen oben) entspricht eine bestimmte Fundamentalreihe von Seitenlinien $m'_1, m'_2 \ldots.$ mit der Grenzlinie a', derart, dass die Halbebene, welche von a' begrenzt wird und m_i' enthält, nach einer Grenzlage konvergiert, welche zur Schmiegungshalbebene der Kurve k in A parallel ist. Schneidet man also unseren Richtungskegel mit einer Ebene, und wendet man auf die Schnittkurve den früher bewiesenen Hilfssatz III an, so ergibt sich, dass der Richtungskegel längs jeder Seitenlinie eine bestimmte Tangentialebene besitzt, welche zur Schmiegungsebene der Kurve k in dem entsprechenden Punkte parallel ist und in zwei entgegengesetzte Tangentialhalbebenen zerfällt, eine rechtsseitige und eine linksseitige.

Wir gehen nun dazu über, die letzte unserer Voraussetzungen über die Kurve zu benützen, nämlich die Bedingung, dass eine Gerade g existiert, welche von der Folge der Schmiegungsebenen in einer abteilungsweise monotonen Punkreihe geschnitten wird. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, können wir, wie schon bemerkt, annehmen, dass die Gerade g unendlich fern ist. Es leuchtet dann ein, dass wir zu den bereits gefundenen Eigenschaften des Richtungskegels auch diese hinzufügen können, dass die Folge der Tangentialebenen des Kegels von der Geraden g in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird. Und hieraus folgert man dann weiter, dass der Richttungskegel ein einfacher Kegel ist. Hiermit ist dann der Beweis unseres Hauptsatzes vollständig erledigt.

37. Auf die vorhergehenden Resultate über einfache Raumkurven wollen wir im folgenden das Dualitätsprinzip anwenden, indem wir definieren:

Ein *stetiges Ebenensystem* (das eindeutige und stetige Bild eines linearen Punktintervalls, durch dessen Punkte die Ordnung der Ebenen im System angegeben wird) heisst *einfach*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Ebenensystem enthält keine stetige Folge, die durch dieselbe Gerade oder durch denselben Punkt geht.

2. Es gibt eine Gerade g, welche das Ebenensystem in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe schneidet.

3. Für jede Ebene des Systems existiert eine bestimmte Charakteristiklinie, welche als eindeutige Grenzlage der Schnittlinie der Ebene mit einer Nachbarebene erzeugt wird.

4. Es gibt eine Ebene ε und einen Punkt O, derart, dass von O aus die Charakteristiklinien auf ε in ein einfaches Geradensystem projiziert werden.

Man wird nun aus den vorhergehenden Resultaten sofort schliessen können, dass die Schmiegungsebenen einer einfachen Raumkurve ein einfaches Ebenensystem bilden; nach dem Dualitätsprinzip wird es aber dann auch umgekehrt gelten, dass *jedes einfache Ebenensystem aus Schmiegungsebenen einer einfachen Raumkurve k bestehen muss.* Jede Ebene ε des Systems hat einen Charakteristikpunkt, welcher als Grenzlage des gemeinsamen Punktes von 3 Ebenen des Systems entsteht, welche alle gegen ε konvergieren (von derselben Seite); dieselbe Grenzlage wird von dem Schnittpunkte der Charakteristiklinie der Ebene ε und einer Nachbarebene erreicht, welche gegen ε konvergiert. Die Charakteristikpunkte bilden die obengenannte Kurve k.

38. Um zu erkennen, ob ein vorgelegtes Ebenensystem einfach ist, wird es sehr wichtig sein, den folgenden Satz zu haben:

Ein stetiges Ebenensystem ist einfach, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. *Jede Ebene ε des Systems besitzt eine bestimmte Charakteristiklinie k, die als eindeutige Grenzlage der Schnittlinie der Ebene ε mit einer Ebene ε_1 entsteht, wenn ε_1 nach ε konvergiert.*

2. *Die Ebene ε besitzt ausserdem einen bestimmten Charakteristikpunkt K, der als eindeutige Grenzlage des Schnittpunktes von k und ε_1 entsteht, wenn ε_1 nach ε konvergiert.*

3. *Der Charakteristikpunkt K variiert stetig mit ε, und wenigstens eine seiner rechtwinkligen Koordinaten variiert abteilungsweise monoton.*

4. *Es gibt eine Ebene, welche das vorgelegte System in einem einfachen ebenen Geradensystem schneidet, und welche keinen Charakteristikpunkt enthält.*

Der Satz ergibt sich ohne weiteres durch Anwendung des Dualitätsprinzips auf den früher bewiesenen Hauptsatz (36) über einfache Raumkurven.

39. Unter einer *Normkurve* im Raume verstehen wir eine einfache Kurve, deren Normalebenen ein einfaches Ebenensystem bilden. Wir behandeln nur Normkurven, welche in einem beschränkten Teil des Raumes liegen; die Untersuchungen können aber leicht auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

Da die Normalebenen einer einfachen Kurve immer den Tangentialebenen eines einfachen Kegels parallel sind, so werden die Bedingungen dafür, dass die Normalebenen ein einfaches Ebenensystem bilden nach 37 darauf beschränkt werden können, dass 1) jede Normalebene der Kurve eine bestimmte Charakteristiklinie, die *Krümmungsachse* in dem entsprechenden Punkte der Kurve, hat; 2) die Projektionen der Krümmungsachsen auf eine Ebene (z. B. eine Koordinatenebene) ein stetiges Geradensystem mit bestimmten Charakteristikpunkten bilden, deren eine Koordinate abteilungsweise monoton variiert.

Noch einfacher ausgedrückt können wir nach dem vorhergehenden Satz (38) die Bedingungen in folgende Form bringen:

Eine einfache Kurve im Raume ist dann und nur dann eine Normkurve, wenn

1. *jede Normalebene eines Punktes P der Kurve eine bestimmte Charakteristiklinie und einen bestimmten Charakteristikpunkt K hat;*

2. *der Charakteristikpunkt K stetig mit P variiert, und eine seiner rechtwinkligen Koordinaten abteilungsweise monoton variiert.*

Dieser Satz wird bei den gewöhnlichen analytischen Darstellungen sofort zur Anwendung kommen können.

40. Den geometrischen Ort des Charakteristikpunktes nennen wir die Polkurve der gegebenen Kurve. Da die Polkurve einfach ist, kann man sie in eine

endliche Anzahl Bögen zerlegen, deren jeder höchstens 3 Schmiegungsebenen durch denselben Punkt haben. Einem solchen Bogen der Polkurve entspreche nun ein Bogen b auf der ursprünglichen Kurve. Es leuchtet ein, dass b von einer beliebigen Kugel in höchstens 4 Punkten geschnitten wird; denn das Vorhandensein von 5 gemeinsamen Punkten würde bedingen, dass man durch den Mittelpunkt der Kugel 4 Normalebenen an die Kurve b legen könnte. Ferner ist ersichtlich, dass eine Kugel durch 4 veränderliche Punkte des Bogens b, welche alle derselben Grenzlage M zustreben, sich einer eindeutig bestimmten Grenzlage nähern muss, der Schmiegungskugel in M, deren Mittelpunkt nach dem M entsprechenden Punkte auf der Polkurve fällt. Ebenfalls werden die Existenz des Schmiegungskreises und dessen wesentlichste Eigenschaften leicht bewiesen.

6. Die Abwickelung der Tangentenfläche einer einfachen Raumkurve.

41. Dass die Tangentenfläche einer einfachen Raumkurve auf eine Ebene abwickelbar ist, folgt aus einem allgemeineren Satz von H. LEBESGUE,[1] nach welchem die Tangentenfläche einer Raumkurve dann und nur dann abwickelbar ist, wenn es ihr Richtungskegel ist.

Hier wollen wir nur auf die Konstruktion der Abwickelung hinweisen. Einem beliebigen Punkt P der gegebenen Raumkurve AB entspricht eine bestimmte Bogenlänge $s = \widehat{AP}$ und eine (rechtsseitige) Halbtangente, deren Richtung durch die entsprechende Seitenlinie m_1 des Richtungskegels dargestellt wird. Jedem Wert von s entspricht sonach eine Seitenlinie m_1 des (rechtsseitigen) Richtungskegels. Man breitet nun diesen Kegel in die Ebene aus, und m_1 wird dann in einen bestimmten Halbstrahl m'_1 überführt. Jedem Wert von s entspricht sonach eine bestimmte Richtung m'_1 in der Ebene, und nun konstruieren wir mit Hilfe dieser Beziehung eine ebene Kurve, die wir uns von einem beweglichen Punkte M durchlaufen denken, derart, dass wenn der von M zurückgelegte Weg die Länge s hat, die M ensprechende vorwärtszeigende Halbtangente gerade die Richtung m'_1 hat. Die so hergestellte Kurve bildet mit ihren Tangenten zusammen die Abwickelung der gegebenen Fläche. Sie ist eine einfache Kurve.

42. Wenn wir in der Abwickelung eine beliebige gerade Linie l auswählen und zur Tangentenfläche zurückgehen, wird l in eine geodätische Kurve auf dieser Fläche verwandelt. Da der Richtungskegel dieser Kurve offenbar durch Rollen einer Ebene auf dem Richtungskegel der ursprünglichen Kurve entsteht, wird sie notwendig eine einfache Kurve.

[1] H. LEBESGUE: Intégrale, Longueur, Aire. Thèse. Milan 1902, p. 103—107.

Wenn eine Ebene ε auf der Tangentenfläche rollt, werden ihre geraden Linien alle in geodätische Kurven überführt, und während der Rollbewegung sind sie Tangenten dieser Kurven. Hierdurch zeigt sich, dass jeder Punkt der Ebene ε eine Kurve beschreibt, deren Tangente senkrecht zu allen geraden Linien der Ebene ist, also senkrecht zu dieser Ebene selbst.

Umgekehrt, wenn die Fläche auf einer Ebene ε rollt, wird jeder mit der Fläche fest verknüpfte Punkt (ausserhalb der Berührungserzeugenden), dessen augenblickliche Lage in ε fällt, eine Kurve beschreiben, deren Tangente senkrecht zu ε ist. Hierdurch wird es wiederum möglich zu zeigen, dass *jeder Punkt M im Raume, welcher mit der Fläche während der Rollbewegung fest verbunden ist, eine Kurve beschreibt, deren Normalebene in M durch die Erzeugende e, längs welcher die Fläche die Ebene ε augenblicklich berührt, hindurchgeht.*

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine andere Erzeugende e_1 auf der Fläche, welche durch die Rollbewegung in die Gerade e_2 der Ebene ε überführt wird. Die Tangentialebene ε_1 längs e_1 wird gleichzeitig in ε überführt. Durch den Schnittpunkt P von ε_1 mit e ziehen wir nun eine Gerade a, derart, dass ε_1 durch Rotation um einen gewissen Winkel α um a in ε überführt werden kann, während e_1 bei derselben Rotation eine Lage erreicht, welche parallel zu e_2 läuft; es wird dann möglich sein, die in Rede stehende Rollbewegung aus dieser Rotation und einer nachfolgenden Parallelverschiebung in eine zu ε parallele Richtung zusammenzusetzen.

Fassen wir nun diese Verhältnisse ins Auge, wie sie sich bei dem Grenzübergang von e_1 nach e gestalten, so sehen wir, dass die Rotationsachse a, welche durch den Punkt P geht, sich der Erzeugenden e nähert; lassen wir nämlich den Richtungskegel der Fläche auf der Ebene ε rollen, indem er in der Anfangslage diese Ebene längs der zu e parallelen Seitenlinie e' berührt, so wird man den Kegel in die Lage, in welcher die zu e_1 parallele Seitenlinie e'_1 in die Ebene hinein gelangt, durch eine Rotation um eine zu a parallele Achse a' überführen können und diese Achse a' konvergiert nach e', wenn e'_1 sich e' nähert (vgl. 18); ferner wird der Punkt P einer bestimmten Grenzlage auf der Rückkehrkante zustreben (37).

Für einen beliebigen Punkt M im Raume, welcher mit unserer abwickelbaren Fläche fest verbunden ist, während diese auf der Ebene ε rollt, werden wir nun eine folgende Lage M_1 finden können, wenn wir den Punkt M, erstens um a durch den Rotationswinkel α herumdrehen, und nachher die entsprechende Parallelverschiebung t vollziehen. Nun ist es klar, dass das Verhältnis $\frac{t}{\alpha}$ gegen Null konvergieren muss. Wir wissen nämlich aus den vorhergehenden Untersuchungen, dass die Punkte, deren augenblickliche Lagen in ε fallen (ausserhalb e) Kurven beschreiben, deren Tangenten senkrecht auf ε stehen, und hieraus folgert man, dass $\lim \frac{t}{\alpha} = 0$, wenn e_1 nach e konvergiert. Aus diesem Umstande schliesst man dann wiederum, dass die Grenzlage der Geraden MM_1 senkrecht auf der Ebene eM stehen muss, und hiermit ist unser Satz bewiesen.

43. Schliesslich bemerken wir noch, dass man aus den vorhergehenden Entwicklungen sofort ersehen wird, dass die Planevolventen einer einfachen Kurve immer Normkurven sind. Die Filarevolventen einer einfachen Kurve hingegen sind nicht einmal immer einfach. Es gilt aber der Satz:

Wenn einer Normkurve k die Bedingung auferlegt wird, dass eine ihrer Filarevolventen eine Normkurve sein soll, so werden alle ihre Filarevolventen Normkurven, und die rektifizierenden Ebenen der Kurve k bilden ein einfaches Ebenensystem.

Unsere Kurve wird dann den bei den Anwendungen gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzten Eigenschaften hinsichtlich Krümmung und Torsion genügen, und unsere Untersuchungen erhalten hiermit einen gewissen Abschluss.

Schlusswort.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich unschwer auf Kurven in mehrdimensionalen Räumen ausdehnen. Um aber dieses in allgemeinster Form durchführen zu können und um überhaupt die Begriffsbildungen der monotonen Gebilde beherrschen zu können, wird es sich als nützlich erweisen, eine allgemeine Theorie der monotonen Fundamentalreihen in höheren Räumen auszubilden. In einer folgenden Arbeit beabsichtigen wir dieser Theorie etwas näher zu treten.[1]

[1] Vgl. die inzwischen erschienene Abhandlung des Verfassers: *Introduction à la théorie des suites monotones.* Bulletin de l'Académie royale de Danemark, 1914, S. 1—74.