ÜBER DIE POTENZREIHEN, DEREN KONVERGENZKREIS NATÜRLICHE GRENZE IST.

VON

GEORG PÓLYA

in ZÜRICH.

Öfters[1] und in verschiedenen Wendungen hat man schon den Satz ausgesprochen: »Eine Potenzreihe ist *im allgemeinen* über ihren Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar». Die verschiedenen Beweise dieses Satzes, die sich zur Aufgabe machten, den Sinn der Aussage zu präzisieren, öffneten interessante Einblicke in die Natur der Potenzreihen, jedoch das Hauptziel hat, nach meinem Dafürhalten, keiner der Beweise erreicht: der Sinn des Satzes ist und bleibt von einem ganz strengen Standpunkte aus unbestimmt. Wie es doch so oft wiederholt wurde, handelt es sich hier nicht um den Unterschied der Mächtigkeiten; die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen, und die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen, beide haben die Mächtigkeit des Kontinuums. Es handelt sich um eine Art Massbestimmung im unendlichvieldimensionalen Raume, dessen Punkte die verschiedenen Potenzreihen sind. Der Begriff des Masses ist jedoch in diesem Raume noch nie erklärt worden.

Angesichts dieser Sachlage scheint es mir nun zweckmässig die Frage etwas anders zu wenden. Es ist uns doch nur an einer Einsicht in die Art und Weise gelegen, wie sich die Gesamtheit der Potenzreihen in fortsetzbare und nichtfortsetzbare Potenzreihen verteilt. Ich betrachte den Raum von unendlichvielen Dimensionen, dessen Punkte die im Einheitskreise konvergierenden Potenzreihen sind. Ich lege in diesem Raume den Begriff der Umgebung, und andere, daraus

---

[1] Vgl. für weitere Literatur HADAMARD, La série de Taylor (Sammlung Scientia) S. 33—36.

fliessende mengentheoretische Begriffe fest, auf eine Art, die mir einfach und naturgemäss zu sein scheint. Dann beweise ich den Satz:

Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen hat nur innere Punkte und ist überall dicht. Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen ist nirgendswo dicht und perfekt.

Dieser Satz *kann* bewiesen werden, denn die vorkommenden Begriffe des inneren Punktes, der überalldichten, der nirgendswodichten und der perfekten Menge sind mit völliger Bestimmtheit definiert worden.

Im Folgenden teile ich die geschilderte Untersuchung ausführlich mit. Es sind funktionentheoretische Sätze über Potenzreihen, deren Richtigkeit von der angewandten Ausdrucksweise völlig unabhängig ist, aber deren Interesse und Zusammenhang durch diese Ausdrucksweise sich steigert, vielleicht auch in den Augen anderer Mathematiker.

Die punktmengentheoretischen Begriffe.[1]

Unter Potenzreihen werde ich im Folgenden stets nur solche Potenzreihen verstehen, deren Konvergenzkreis der Einheitskreis ist. Die Gesamtheit dieser Potenzreihen fasse ich als einen Raum von unendlich vielen Dimensionen auf. Ein Element unseres Raumes bezeichne ich manchmal als »Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$«, manchmal als »Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$«, ohne Unterschied, wie es eben besser klingt. Abzählbar unendlich viele komplexe Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

die mit Indices versehen, d. h. auf eine bestimmte Weise auf die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots n, \ldots$$

abgebildet sind, stellen dann und nur dann die Koordinaten eines Punktes in unserem Raume dar, wenn sie der Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügen.

[1] Vielleicht bietet dieser Abschnitt auch vom Standpunkte der abstrakten Mengenlehre einiges Interesse, wenigstens das eines nicht ganz trivialen Beispiels. Vgl. FRÉCHET, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti d. Circ. Mat. di Palermo, Bd 22 (1906, I), S. 1—74.

Sei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ ein Punkt mit nichtnegativen Koordinaten, d. h. es sei

$$\varepsilon_n \geq 0$$

und

(1) $$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ *des Punktes* $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ *ist die Gesamtheit aller derjenigen und nur derjenigen Punkte* $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$ *die den Ungleichungen*

$$|u_0 - a_0| \leqq \varepsilon_0, \quad |u_1 - a_1| \leqq \varepsilon_1, \ldots \quad |u_n - a_n| \leqq \varepsilon_n, \ldots$$

genügen.

Erfüllen die Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ nicht nur die Bedingung (1), sondern auch die schärfere

(2) $$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

so heisst die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ eine *volle Umgebung*. Ist hingegen (1) erfüllt, und (2) nicht erfüllt, so heisst die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ eine *einseitige Umgebung*.

Wenn die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ so beschaffen ist, dass $\Sigma (u_n - a_n) x^n$ in einem grösseren Kreise konvergiert, als der Einheitskreis, dann gehört sie der *nächsten Umgebung* der Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ an. Anders ausgedrückt, die nächste Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ besteht aus der Gesamtheit der Punkte $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$ die der Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |u_n - a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

genügen.

Der Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ hat verschiedene volle und verschiedene einseitige Umgebungen, er hat hingegen *nur eine nächste Umgebung*. Der Begriff der Umgebung ist so festgelegt, dass *jede Umgebung eines Punktes Punkte enthält, die seiner nächsten Umgebung nicht angehören.* Daher der etwas unbequeme Satz: *die nächste Umgebung ist keine Umgebung.*

Zur weiteren Klärung der eingeführten Begriffe betrachte ich noch einige Beispiele.

Ich behaupte, dass die volle Umgebung $\left(0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ aus lauter nichtfortsetzbaren Potenzreihen besteht. Denn jede Potenzreihe dieser Umgebung lässt sich in die Form setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \tag{3}$$

wo

$$|d_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Also ist das zweite Glied der Summe (3) im Einheitskreise beschränkt, während das erste Glied unendlich wird, wenn x entlang eines Radius des Einheitskreises irgend einer Einheitswurzel zustrebt.

Man setze

$$\varepsilon_{m!} = 1,$$

$\varepsilon_n = 0$, wenn n keine Fakultät ist.

Man wird es leicht einsehen, dass eine Potenzreihe, die der einseitigen Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ des Punktes $1, 1, 1, 1, \ldots$ (der geometrischen Reihe) angehört und der nächsten Umgebung desselben Punktes nicht angehört, sich über den Einheitskreis hinaus nirgendswo fortsetzen lässt.

Die Rolle, die im gewöhnlichen Raume von der Umgebung gespielt wird, kommt im Raume der Potenzreihen der *vollen Umgebung* zu.[1] Dies ist durch den Umstand geboten, dass *der gemeinsame Teil zweier vollen Umgebungen eines Punktes eine volle Umgebung desselben Punktes ist.* Hingegen besteht

---

[1] Man treffe auf ein Moment im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume die folgenden Vereinbarungen: Die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ seien den Bedingungen

$$\varepsilon_1 \geqq 0, \quad \varepsilon_2 \geqq 0, \quad \varepsilon_3 \geqq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 0 \tag{1'}$$

unterworfen. Die *Umgebung* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ des Punktes a_1, a_2, a_3 ist die Gesamtheit der den Ungleichungen

$$|u_1 - a_1| \leqq \varepsilon_1, \quad |u_2 - a_2| \leqq \varepsilon_2, \quad |u_3 - a_3| \leqq \varepsilon_3$$

genügenden Punkten u_1, u_2, u_3. Die Umgebung $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ heisst eine *volle Umgebung*, wenn nicht nur (1'), sondern sogar die schärfere Bedingung

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3 > 0 \tag{2'}$$

erfüllt ist. Ist nur (1') erfüllt, (2') hingegen nicht, so heisst die Umgebung $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ eine *einseitige Umgebung* Die *nächste Umgebung* des Punktes a_1, a_2, a_3 besteht aus dem einzigen Punkte a_1, a_2, a_3.

Diese Bezeichnungen sollen den Text durch Analogie erläutern. Gewöhnlich wird als *Umgebung* nur eine solche Punktmenge bezeichnet, die wir *volle Umgebung* genannt haben.

der gemeinsame Teil der beiden *einseitigen* Umgebungen (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) und (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...) des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bloss aus dem Punkte $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Aus dem Begriffe der Umgebung ergeben sich die Analoga anderer punktmengentheoretischer Begriffe ohne Schwierigkeit. Den Definitionen muss vorausgeschickt werden, dass wir uns auf die Betrachtung gewisser *speziellen* Mengen von Potenzreihen beschränken.

Wenn nämlich die beiden Mengen M und M_1 komplementär sind (d. h. gliedfremd sind, und zusammengenommen die Totalität der Potenzreihen erschöpfen) und die Reihe $\Sigma (a_n - b_n) x^n$ einen grösseren Konvergenzradius hat als die Einheit, so sollen die Potenzreihen $\Sigma a_n x^n$ und $\Sigma b_n x^n$ entweder beide der Menge M oder beide der Menge M_1 angehören. Anders ausgedrückt, wir lassen nur solche Einteilungen aller Potenzreihen zu, die keine Potenzreihe von ihrer nächsten Umgebung trennen.[1]

Dies alles überlegt, wird die folgende Definition wohl verständlich sein:

Der Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heisst Häufungspunkt der Menge M, oder, was dasselbe ist, er heisst zur derivierten Menge M' der Menge M gehörig, dann und nur dann, wenn in einer beliebigen vollen Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ein Punkt gefunden werden kann, der der Menge M angehört, und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehört.

Die beiden Hauptsätze über derivierte Mengen lauten:

I. *Seien M und M_1 komplementäre Mengen, M' bzw. M'_1 ihre derivierten Mengen. Ein beliebiger Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gehört wenigstens einer der beiden Mengen M' und M'_1 an.*

II. *Sei M' die derivierte Menge von M, M'' die derivierte Menge von M'. Jeder Punkt der Menge M'' gehört der Menge M' an.*

Die Beweise der beiden Sätze I und II, die sich ohne Kunstgriffe, bloss durch genaue Auslegung der Definitionen ergeben, darf ich hier wohl unterdrücken.

Ich will nur kurz und schematisch die einfachsten Begriffe entwickeln, die sich auch in der Theorie der Punktmengen bloss auf dem Begriffe der abgeleiteten Menge und auf den Sätzen I und II fussend definieren lassen.

Seien M und M_1 wieder komplementäre Mengen. Ein beliebiger Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wird einigen der vier Mengen M, M_1, M', M'_1 angehören, anderen nicht. Infolge des Satzes I sind nur 6 verschiedene Fälle möglich, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind.

---

[1] Z. B. wird die Menge aller Potenzreihen, deren Koeffizienten reell und rational sind, in der folgenden Betrachtung nicht zugelassen, d. h. auf diese Menge von Potenzreihen ist die nun folgende Definition des Häufungspunktes nicht passend anwendbar.

Tabelle I. [1]

	M	M_1	M'	M'_1	$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ heisst
I	+	—	+	—	innerer Punkt von M
II	+	—	—	+	isolierter » » M
III	+	—	+	+	
IV	—	+	—	+	innerer » » M_1
V	—	+	+	—	isolierter » » M_1
VI	—	+	+	+	

Z. B. liest sich die erste Zeile dieser Tabelle so: *ist* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *in* M *und* M' *enthalten, in* M'_1 *nicht enthalten, so heisst* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *ein innerer Punkt von* M. Nach dem Begriffe des Häufungspunktes besteht die Tatsache: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist dann und nur dann ein innerer Punkt der Menge M, wenn eine volle Umgebung von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aus lauter Punkten der Menge M bebesteht. So ist z. B. die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ ein innerer Punkt der Menge aller nichtfortsetzbarer Potenzreihen.

Wenn einige der in Tabelle I verzeichneten 6 Fälle nicht vorkommen, so hat die Menge M eine gewisse spezielle Eigenschaft, die durch einen Namen belegt werden kann. Die wichtigsten Eigenschaften sind zusammengefasst in

Tabelle II. [2]

I	II	III	IV	V	VI	Die Menge M heisst
				o	o	abgeschlossen
	o			o	o	perfekt
	o	o				nur aus innern Punkten bestehend
	o		o			überall dicht
o				o	o	nirgendswo dicht und abgeschlossen
o	o			o	o	» » » perfekt

u. s. w.

[1] + heisst: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist enthalten, — heisst: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist nicht enthalten in der Menge, deren Name am Kopfe der Spalte steht.

[2] o bedeutet, dass der Fall der Tabelle I, deren Nummer im Spaltenkopf steht, bei der Menge M nicht vorkommt. Die unbezeichneten Fälle können vorkommen, brauchen aber nicht.

Um die erste Zeile der Tabelle II zu verstehen, beachte man, dass alle Punkte, die zugleich M' und M_1 angehören, entweder in die Kategorie V oder in die Kategorie VI der Tabelle I fallen. Abgeschlossen heisst also die Menge M, wenn keine dieser beiden Kategorieen vorhanden ist, d. h. wenn kein Punkt von M' der Menge M_1 angehört u. s. w.

Was eine nirgendswodichte Menge heisst, lässt sich im Rahmen der Tabelle II nicht definieren, wohl aber so: die Menge M ist nirgendswodicht, wenn die inneren Punkte der komplementären Menge M_1 überall dicht sind.

Die in Tabelle II gegebene Definition einer überalldichten Menge besagt: die Menge M heisst überall dicht, wenn jeder Punkt des Raumes zur Menge M' gehört. Diese Definition lässt sich so umformen: die Menge M ist überall dicht, wenn in jeder vollen Umgebung jedes Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Punkte gibt, die der Menge M angehören und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehören. Ich will noch, zur späteren Verwendung, den engeren Begriff der *überall allseitig dichten Menge* durch folgende Definition festsetzen: Die Menge M heisst *überall allseitig dicht*, wenn in jeder *einseitigen* Umgebung jedes Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Punkte gibt, die der Menge M angehören und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehören.[1]

Die in diesem Abschnitt getroffenen Definitionen liegen den Sätzen des folgenden Abschnittes zugrunde. Alle beruhen auf dem Begriffe des Häufungspunktes, also auf dem Begriffe der Umgebung; ich bemühte mich die Beweggründe klarzulegen, die zu der gewählten Festsetzung dieser Begriffe führten.

Die Verteilung der fortsetzbaren und der nichtfortsetzbaren Potenzreihen.

Satz I. *Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen ist überall allseitig dicht.*

Da ich aus der Theorie der TAYLOR'schen Reihe verschiedene und ziemlich heterogene Teile zum Beweise der Sätze dieses Abschnittes heranziehen muss, will ich das Nötige immer in Form von Hilfssätzen ausdrücklich formulieren. So erfordert Satz I den

Hilfssatz I. Es sei die Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ den Bedingungen

[1] Man erinnere sich der Definitionen der Anmerkung S. 102, und man bilde im gewöhnlichen Raume die Menge R, deren Punkte drei rationale Koordinaten haben, und R_1, die komplementäre Menge von R. Sowohl R, wie R_1, sind überall dicht, R_1 ist aber überdies noch *überall allseitig dicht*, während R es nicht ist.

$$\varepsilon_n \geqq 0$$

(1) $$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

unterworfen. So gibt es eine Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, und den Ungleichungen

$$|b_n| \leqq \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt.

Man finde in der Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Teilfolge $\varepsilon_{\nu_1}, \varepsilon_{\nu_2}, \ldots \varepsilon_{\nu_n}, \ldots$, die der doppelten Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varepsilon_{\nu_n}^{\frac{1}{\nu_n}} = 1, \quad \nu_{n+1} > 2\nu_n$$

genügt, man setze

(3') $$b_{\nu_1} = \varepsilon_{\nu_1}, \quad b_{\nu_2} = \varepsilon_{\nu_2}, \ldots \quad b_{\nu_n} = \varepsilon_{\nu_n}, \ldots$$

und man setze

$$b_n = 0$$

wenn über b_n in (3') noch nicht verfügt worden ist. Die mit den so definierten Koeffizienten aufgebaute Reihe $\Sigma b_n x^n$ hat nach einem Satze des Herrn HADAMARD[1] den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Es sei nun $\Sigma a_n x^n$ eine beliebige Potenzreihe, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ eine beliebige, einseitige oder volle, Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Sei $\Sigma b_n x^n$ die im Hilfssatz I erwähnte Potenzreihe, und man betrachte die Gesamtheit der Potenzreihen

(4) $$\Sigma a_n x^n + \alpha \Sigma b_n x^n$$

wo

$$0 < \alpha \leqq 1.$$

Die Menge der Potenzreihen (4) hat die Mächtigkeit des Kontinuums, gehört der Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ an, und hat kein Element, das der nächsten Umgebung von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ angehört.

Ich behaupte, es gibt welche zwischen den Potenzreihen (4), für die der Einheitskreis natürliche Grenze ist. Wären sie nämlich alle fortsetzbar, so hätte jede unter ihnen wenigstens einen *Regularitätsbogen* am Einheitskreis. Am Ein-

[1] A. a. O. S. 37.

heitskreis haben aber nur höchstens *abzählbar* unendlich viele auseinanderliegende Bögen Platz, und so gäbe es gewiss zwei verschiedene Potenzreihen in der nicht abzählbaren Menge (4)

$$\Sigma a_n x^n + \alpha_1 \Sigma b_n x^n, \quad \Sigma a_n x^n + \alpha_2 \Sigma b_n x^n, \tag{5}$$

$$(\alpha_1 \lesseqgtr \alpha_2)$$

deren Regularitätsbögen aufeinander hinübergreifen. Also hätten beide Reihen (5) gemeinsame reguläre Punkte am Einheitskreis, und so wäre auch ihre Differenz

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Sigma b_n x^n$$

über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar, was nicht der Fall ist. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn die Richtigkeit des Satzes I zugegeben wird.

Diese merkwürdige Schlussweise rührt von Herrn Professor Hurwitz her, und stimmt im Grunde genommen mit einer berühmten arithmetischen Schlussweise überein.[1]

Satz II. *Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen hat nur innere Punkte.*

Hilfssatz II. Es sei die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ im Einheitskreise konvergent, und man setze

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}}{}^{\nu} \binom{n}{\nu} u_\nu x^\nu. \tag{6}$$

Dass der Punkt z, wo $|z| = 1$, ein singulärer Punkt der Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ wird, dafür ist notwendig und hinreichend die Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \, |\psi_n(z)|^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Für den Beweis dieses Hilfsatzes verweise ich auf eine Arbeit des Herrn Pringsheim.[2]

---

[1] Mit dem »Schachtelprinzip». — A. Hurwitz und G. Pólya. Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta Mathematica, Bd. 40 S. 179.

[2] Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Euler'schen Reihentransformation. — Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie (1912) S. 11—92. Vgl. S. 78—82. Der zitierte Satz ersetzt wegen seiner grösseren Einfachheit mit Vorteil einen im Wesentlichen übereinstimmenden älteren Hadamard-Fabry'schen Satz. Vgl. Hadamard, a. a. O. S. 21—22.

Ich schreite zum Beweise des Satzes II. Sei

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \dots z_n,\ \dots \tag{7}$$
$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = \cdots = 1$$

eine abzählbare, am Einheitskreise überall dichte Punktmenge. Man bilde aus den Zahlen (7) eine unendliche Folge

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots x_n,\ \dots$$

die alle Glieder der Menge (7) u. zw. jedes unendlich oft enthält. Man setze z. B.

$$\begin{aligned}
&x_1 = z_1,\\
&x_2 = z_1,\quad x_3 = z_2,\\
&x_4 = z_1,\quad x_5 = z_2,\quad x_6 = z_3,\\
&x_7 = z_1,\quad x_8 = z_2,\quad x_9 = z_3,\quad x_{10} = z_4,\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

Seien endlich

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots \alpha_n,\ \dots$$

positive Zahlen, die monoton wachsend gegen 1 konvergieren, d. h.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$
$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 1.$$

Ich nehme nun an, dass die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, und ich setze

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}}{}^{\nu} \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu.$$

Kraft des Hilfsatzes II lässt sich eine unendliche Folge von wachsenden positiven ganzen Zahlen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \dots \nu_n,\ \dots,$$

bestimmen, die der doppelten Bedingung genügt:

$$\text{1)} \qquad |\Phi_{\nu_n}(x_n)|^{\frac{1}{\nu_n}} > \alpha_n$$

$$\text{2)} \qquad \nu_{n+1} > 2\,\nu_n .$$

Ich konstruiere nun eine gewisse Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$, u. zw. auf die folgende Art: es sei

$$\varepsilon_\mu = \frac{\alpha_n^{\nu_n}}{\nu_n}$$

wenn der Index μ den Ungleichungen

$$\text{(8)} \qquad \frac{\nu_n}{3} \leqq \mu \leqq \frac{2\,\nu_n}{3}$$

genügt. Diese Vorschrift widerspricht sich selber nicht, da

$$\frac{2\,\nu_n}{3} < \frac{\nu_{n+1}}{3}.$$

Wurde über ε_μ im Vorangehenden nicht verfügt, so setze man etwa $\varepsilon_\mu = 1$.

Die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ *ist eine volle Umgebung.* Denn wenn μ der Ungleichung (8) genügt, so ist

$$1 > \varepsilon_\mu^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{\alpha_n^{\nu_n}}{\nu_n}\right)^{\frac{1}{\mu}} \geqq \frac{\alpha_n^3}{\nu_n^{\frac{3}{\nu_n}}}$$

und es ist

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n^3 = \lim_{n=\infty} \nu_n^{\frac{3}{\nu_n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n^3}{\nu_n^{\frac{3}{\nu_n}}} = 1 .$$

Jede Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$, *die der vollen Umgebung* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu, \ldots)$ *der Potenzreihe* $\Sigma a_n x^n$ *angehört, hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.*

Es ist nämlich, die Bezeichnungen des Hilfsatzes II beibehalten

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\nu_n}(x_n)| &= \left|\Phi_{\nu_n}(x_n) + \frac{1}{2^{\nu_n}} \sum_{\frac{\nu_n}{8}}^{\frac{2\nu_n}{8}}{}_{\mu} \binom{\nu_n}{\mu} (u_\mu - a_\mu) x_n^\mu \right| \\
&\geqq |\Phi_{\nu_n}(x_n)| - \frac{1}{2^{\nu_n}} \sum_{\frac{\nu_n}{8}}^{\frac{2\nu_n}{8}}{}_{\mu} \binom{\nu_n}{\mu} |u_\mu - a_\mu| |x_n|^\mu \\
&\geqq |\Phi_{\nu_n}(x_n)| - \frac{1}{2^{\nu_n}} \sum_{\frac{\nu_n}{8}}^{\frac{2\nu_n}{8}}{}_{\mu} 2^{\nu_n} |u_\mu - a_\mu| \\
&\geqq |\Phi_{\nu_n}(x_n)| - \sum_{\frac{\nu_n}{8}}^{\frac{2\nu_n}{8}}{}_{\mu} \frac{\alpha_n^{\nu_n}}{\nu_n} \\
&= |\Phi_{\nu_n}(x_n)| - \frac{1}{3} \alpha_n^{\nu_n} \text{ [1]} \\
&\geqq \frac{2}{3} \alpha_n^{\nu_n}.
\end{aligned}
$$

Rekurriert man auf die Bedeutung der Zahlen x_n, α_n, ν_n, so folgt aus der letzten Ungleichung, dass

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |\psi_n(z_r)|^{\frac{1}{n}} = 1$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots$ Das besagt aber, laut Hilfsatz II, dass für die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ die am Einheitskreise überall dicht liegenden Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ singulär sind, also dass die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, w. z. b. w.

Satz III. *Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen hat keinen isolierten Punkt.*

Hilfsatz III. Die ganze Funktion vom Geschlecht Null

$$g(x) = \left(1 + \frac{x}{\varrho_1}\right)\left(1 + \frac{x}{\varrho_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right) \cdots$$

soll lauter reelle negative Wurzeln haben. Dann sind für die drei Potenzreihen

---

[1] Die Zahl $\frac{1}{3}$ ist mit einer unwesentlichen Impräzision behaftet.

$$(9) \quad \Sigma a_n x^n, \qquad (10) \quad \Sigma a_n g(n) x^n, \qquad (11) \quad \sum \frac{a_n}{g(n)} x^n$$

bei geradliniger Fortsetzung die nämlichen Punkte singulär, d. h. diese drei Potenzreihen haben den nämlichen geradlinigen MITTAG-LEFFLER'*schen Stern.*

1) Nach einem Satze des Herrn FABER[1] hat die durch die Reihe

$$\Sigma g(n) x^n$$

definierte Funktion den einzigen singulären Punkt $x = 1$. Daraus folgt, nach dem HADAMARD'schen Kompositionssatz,[2] dass die Reihe (10) *höchstens* die singulären Punkte der Reihe (9) als singuläre Punkte zulässt.

2) Man könnte aus den in Anmerkung [1] zitierten allgemeinen Sätzen ähnlich schliessen, dass die *Reihe* (11) *höchstens die singulären Punkte der Reihe* (9) *als singuläre Punkte* zulässt. Elementarer zeigt man das so:

Sei G ein beliebiges, ganz im endlichen liegendes abgeschlossenes Bereich der x-Ebene, das die beiden Eigenschaften hat:

jeder seiner Punkte kann durch eine ganz in G gelegene gerade Strecke mit dem Punkte $x = 0$ verbunden werden, und

die aus der Fortsetzung der Potenzreihe (9) hervorgehende Funktion $f(x)$ ist im Innern und am Rande von G ausnahmslos regulär.

Es genügt zu zeigen, dass die Reihe (11) im Innern von G ebenfalls regulär ist. Sei $0 < r < 1$, so kann man voraussetzen, dass die Kreisfläche $|x| \leq r$ zu G gehört.

Ich setze

$$f_1(x) = \frac{\varrho_1}{x^{\varrho_1}} \int_0^x x^{\varrho_1 - 1} f(x)\, dx, \ldots f_p(x) = \frac{\varrho_p}{x^{\varrho_p}} \int_0^x x^{\varrho_p - 1} f_{p-1}(x)\, dx, \ldots$$

wo alle Integrationswege geradlinig sind.

Für $|x| < 1$ hat man die Darstellung

$$f_p(x) = \sum \frac{a_n x^n}{\left(1 + \frac{n}{\varrho_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{\varrho_p}\right)},$$

[1] Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen. Math. Annalen 57. S. 369—388. — Vgl. die allgemeineren Entwicklungen bei LINDELÖF, Calcul des résidus (Collection Borel). 108—141.

[2] HADAMARD, a. a. O. S. 69—72.

und daraus folgt, gleichmässig für $|x| \leqq r$

$$\lim_{p=\infty} f_p(x) = \sum \frac{a_n}{g(n)} x^n.$$

Im ganzen Bereiche G sind die Funktionen

(12) $$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x);\ \dots\ f_p(x),\ \dots$$

regulär. Es gibt eine positive Zahl M, so dass im ganzen Bereich G

$$|f(x)| \leqq M.$$

Ich behaupte, dass in demselben Bereich G auch

(13) $$|f_p(x)| \leqq M$$

für jedes p. In der Tat, die Richtigkeit der Ungleichung (13) für ein bestimmtes p vorausgesetzt, erhält man im Bereiche G

$$\begin{aligned} |f_{p+1}(x)| &= \left| \frac{\varrho_{p+1}}{x^{\varrho_{p+1}}} \int_0^x x^{\varrho_{p+1}-1} f(x)\, dx \right| \\ &\leqq M \frac{\varrho_{p+1}}{|x|^{\varrho_{p+1}}} \int_0^{|x|} y^{\varrho_{p+1}-1}\, dy \\ &= M, \end{aligned}$$

wo das Integral in der mittleren Zeile reellen Integrationsweg hat. So ist (13) durch vollständige Induktion für beliebiges p bewiesen.

Aus allen dargelegten Tatsachen folgt nun, gemäss einem grundlegenden STIELTJES'schen Satze,[1] dass die Folge (12) im Innern des Gebietes G gegen eine Funktion konvergiert, die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe (11) dargestellt wird, und im Innern von G ausnahmslos regulär ist, w. z. b. w.

3) Man wende das Resultat in 2) auf die Reihe (10), und das Resultat in 1) auf die Reihe (11) an, um den vollen Hilfsatz III zu erhalten.

Ich werde übrigens im folgenden nur den in 2) ausführlich bewiesenen Teil des Hilfssatzes III wesentlich gebrauchen.

Hilfsatz IV. Seien $r_1, r_2, r_3, \dots$ vorgegebene nichtnegative Zahlen, die der Bedingung

---

[1] Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES, Bd II. S. 369—370.

$$\overline{\lim_{n=\infty}} r_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügen. So existiert immer eine ganze Funktion vom Geschlecht Null mit lauter reellen negativen Wurzeln

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right)$$

die den Ungleichungen

$$g(n) \geqq r_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt.[1]

Ich konstruiere die Funktion $g(x)$, indem ich die Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$$

durch immer regelmässigere majorante Folgen ersetze.

1) Ich definiere zuerst die Folge der reellen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$$

u. zw. so

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 \quad , \text{ wenn } & r_n \leqq 1 \\ \frac{1}{n} \log r_n, \quad \text{»} & r_n > 1. \end{cases}$$

Es ist

$$\alpha_n \geqq 0$$
$$r_n \leqq e^{n\alpha_n}$$
$$\lim \alpha_n = 0.$$

2) Es sei β_n das Maximum der unendlichen Zahlenmenge

$$\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$$

[1] Zur Erläuterung sei hinzugefügt, dass $\lim\limits_{n=\infty} g(n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

Die Folge

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots \beta_n, \dots$$

hat die Eigenschaften

$$\alpha_n \leqq \beta_n$$

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = 0$$

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3 \geqq \cdots \geqq \beta_n \geqq \beta_{n+1} \geqq \cdots$$

3) Man kann auf mehrere Arten eine Folge

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n, \dots$$

bilden, die die Eigenschaften hat

$$\beta_n \leqq \gamma_n$$

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = 0$$

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \cdots > \gamma_n > \gamma_{n+1} > \cdots$$

z. B. durch folgende Vorschrift:

$$\gamma_n = \beta_n,$$

wenn $\beta_n > \beta_{n+1}$,

$$\gamma_n = \frac{k\beta_{n-i} + i\beta_{n+k}}{i+k}$$

wenn

$$\beta_{n-i} > \beta_{n-i+1} = \cdots = \beta_{n-1} = \beta_n = \beta_{n+1} = \cdots = \beta_{n+k} > \beta_{n+k+1}.$$

(D. h. durch lineare Interpolation. Dabei ist nur der triviale Fall bei Seite gelassen, dass $\beta_n = 0$ für alle n von einem gewissen an.)

4) Sei endlich

$$\delta_1 = \gamma_1$$

und δ_{n+1} die grössere der beiden Zahlen γ_{n+1} und $\delta_n - \frac{1}{2n}$

$$\delta_{n+1} = \operatorname{Max}\left(\gamma_{n+1}, \delta_n - \frac{1}{2n}\right).$$

Mit Berücksichtigung der Divergenz der harmonischen Reihe stellt man leicht die folgenden Eigenschaften der so definierten Folge

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots\ \delta_n,\ \ldots$$

fest:

$$\gamma_n \leqq \delta_n$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots > \delta_n > \delta_{n+1} > \cdots$$

$$\delta_n - \delta_{n+1} \leqq \frac{1}{2n}.$$

Es ist

$$r_n \leqq e^{n\alpha_n} \leqq e^{n\beta_n} \leqq e^{n\gamma_n} \leqq e^{n\delta_n}$$

und die Folge

$$e^{1\delta_1},\ e^{2\delta_2},\ e^{3\delta_3},\ \ldots\ e^{n\delta_n},\ \ldots$$

ist schon genug regulär für unsere Zwecke. Wir gehen von dieser Folge zur Funktion $g(x)$ über, indem wir

$$\frac{1}{\varrho_n} = 2\delta_n - 2\delta_{n+1}, \quad \varrho_n = \frac{1}{2(\delta_n - \delta_{n+1})}$$

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right)$$

setzen. Dieser Ausdruck ist nicht illusorisch, da die Reihe

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \cdots + \frac{1}{\varrho_n} + \cdots =$$

$$= (2\delta_1 - 2\delta_2) + (2\delta_2 - 2\delta_3) + \cdots + (2\delta_n - 2\delta_{n+1}) + \cdots$$

konvergiert. Ich behaupte, dass

$$e^{n\delta_n} \leqq g(n).$$

Zum Beweise brauche ich die elementare Tatsache,[1] dass für $0 < x \leqq 1$

$$1 + x > e^{\frac{x}{2}}. \tag{14}$$

---

[1] Beweist sich etwa so: die Potenzreihenentwicklung der Funktion

Es ist gewiss

$$g(n) \geqq \left(1 + \frac{n}{\varrho_n}\right)\left(1 + \frac{n}{\varrho_{n+1}}\right) \cdots \tag{15}$$

Nun ist nach der vierten Eigenschaft der Folge $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

$$\varrho_n \geqq n, \quad \varrho_{n+1} \geqq n+1, \quad \varrho_{n+2} \geqq n+2, \ldots$$

Daher ist die Ungleichung (14) auf jeden Faktor an der rechten Seite von (15) anwendbar, und so wird

$$\begin{aligned} g(n) &\geqq e^{\frac{1}{2}\frac{n}{\varrho_n}} e^{\frac{1}{2}\frac{n}{\varrho_{n+1}}} \cdots \\ &= e^{\frac{n}{2}(2\delta_n - 2\delta_{n+1} + 2\delta_{n+1} - 2\delta_{n+2} + \cdots)} \\ &= e^{n\delta_n}. \end{aligned}$$

Umsomehr ist

$$g(n) \geqq r_n$$

w. z. b. w.

Hilfssatz V. Es sei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen, die der Bedingung*

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügt, und

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{16}$$

eine beliebige (im Einheitskreise konvergente) Potenzreihe. So gibt es eine Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1 + x - e^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4 \cdot 2!} - \frac{x^2}{8 \cdot 3!} - \cdots$$

hat nur einen Zeichenwechsel. Zufolge der Descartes'schen Regel, hat $f(x)$ höchstens eine positive Wurzel. Nun ist

$$f(0) > 0, \quad f(1) > 0$$

und so ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$f(x) > 0.$$

die bei geradliniger Fortsetzung die nämlichen singulären Stellen aufweist, wie die Potenzreihe (16), *und deren Koeffizienten den Ungleichungen*

$$|b_n| \leqq \varepsilon_n$$

genügen.

In der Tat, es sei $\varepsilon_n > 0$ für $n \geqq N$. Man setze

$$r_n = \frac{|a_n|}{\varepsilon_n} \qquad (n = N, N+1, N+2, \ldots)$$

so hat man

$$\overline{\lim_{n=\infty}} r_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Man bestimme gemäss Hilfssatz IV eine ganze Funktion $g(x)$ vom Geschlecht Null mit nur negativen Wurzeln die den Ungleichungen

$$r_n \leqq g(n) \qquad (n = N, N+1, \ldots)$$

genügt. Setzt man

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n < N \\ \dfrac{a_n}{g(n)} & \text{» } n \geqq N, \end{cases}$$

so befriedigt die Reihe $\Sigma b_n x^n$ gemäss Hilfssatz III alle Forderungen der Hilfssatzes V.

Hilfssatz V enthält aber den Satz III ersichtlicherweise. Denn ist $\Sigma a_n x^n$ eine fortsetzbare Potenzreihe, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ eine beliebige volle Umgebung, $\Sigma b_n x^n$ die Reihe, von welcher der Hilfssatz V handelt, so gehört die Reihe $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ der vollen Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, jedoch nicht der nächsten Umgebung der Reihe $\Sigma a_n x^n$ an, und ist gewiss fortsetzbar, w. z. b. w.

Die Sätze I, II, III erweisen vollständig die über die Verteilung der fortsetzbaren und nichtfortsetzbaren Reihen in der Einleitung erwähnte Tatsache. Die eingeführten Definitionen und Methoden bleiben jedoch nicht dabei stehen, sondern gestatten auch die Verteilung der fortsetzbaren Reihen untereinander auf dieselbe Art zu studieren. Sei S eine beliebige abgeschlossene Menge am Einheitskreis; man nenne M_S die Menge aller Potenzreihen, die am Einheitskreise *mindestens* die Punkte von S zu singulären Punkten haben. Durch eine geringe Änderung im Beweise des Satzes II ergibt sich der

Satz IV. *Die Menge M_S besteht nur aus inneren Punkten, ist überall dicht, und ihre komplementäre Menge ist perfekt.*

Wegen der Einfachheit des Beweises und des Resultates gebe ich noch folgenden Satz an:

Satz V. *Die Menge aller Potenzreihen, die am Einheitskreise ausser Polen keine Singularitäten haben, besteht nur aus isolierten Punkten.*

In der Tat, sei $\Sigma a_n x^n$ eine beliebige Reihe, die am Einheitskreis von Polen abgesehen regulär ist. Man schlage um diese Reihe eine Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, die so beschaffen ist, dass

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

$\left(\text{also etwa } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$.

Wenn $\Sigma u_n x^n$ dieser Umgebung angehört, und der nächsten Umgebung von $\Sigma a_n x^n$ nicht angehört, dann ist der Konvergenzkreis der Reihe

$$\Sigma (u_n - a_n) x^n$$

der Einheitskreis, und es ist

$$|u_n - a_n| \leqq \varepsilon_n,$$

also gewiss

$$\lim_{n=\infty} (u_n - a_n) = 0.$$

Daher hat die Reihe $\Sigma (u_n - a_n) x^n$ am Einheitskreis keinen Pol. Folglich hat $\Sigma (u_n - a_n) x^n$, also $\Sigma u_n x^n$ am Einheitskreis eine nichtpolare Singularität, w. z. b. w.