UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DER FOLGEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN.

VON

ROBERT JENTZSCH

in BERLIN.

Einleitung.

Betrachtet man die Abschnitte $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, der Reihe: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, deren Konvergenzkreis $|x| = 1$ ist, so bemerkt man, dass jede Einheitswurzel ausser 1 Nullstelle eines Abschnittes $P_n(x)$ ist, so dass die Menge M der Nullstellen aller Polynome $P_n(x)$ auf dem Kreise $|x| = 1$ überall dicht liegt, jeder Punkt des Konvergenzkreises also Häufungsstelle von Nullstellen der Abschnitte ist. Sei nun eine Potenzreihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

mit dem endlichen Konvergenzradius R vorgelegt, so fragt es sich, ob eine ähnliche Beziehung zwischen dem Konvergenzkreis $|x| = R$ dieser Reihe und den Nullstellen ihrer Abschnitte $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ bestehe, wie bei der betrachteten speziellen Reihe. Diese Frage wird im Folgenden bejahend beantwortet, d. h. es gilt folgender Satz:

Jeder Punkt des Konvergenzkreises einer Potenzreihe ist Häufungspunkt für Nullstellen ihrer Abschnitte.

Betrachtet man also die Menge M der Nullstellen aller Abschnitte der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ und bildet die Menge M' ihrer Häufungspunkte, so gehören zu M':

1. alle Nullstellen der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion, soweit sie im Innern des Konvergenzkreises liegen, und innerhalb desselben liegen auch keine anderen Punkte von M';

2. die ganze Peripherie des Konvergenzkreises.

Das erstere ist bekannt und ganz einfach einzusehen,[1] das zweite ist bisher

[1] Vgl. HURWITZ, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Math. Ann. Bd. 33. 1889.

nur in dem einfachen Falle, dass alle Koeffizienten a_ν reell und positiv sind und der Bedingung $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ genügen, unter Benutzung eines algebraischen Satzes von KAKEYA von den Herren LINDWART und PÓLYA[1] bewiesen worden. Die Tatsache, dass mindestens ein Punkt des Konvergenzkreises zu M' gehört, hat Herr F. LUKÁCS unlängst bemerkt.[2]

Der Satz von HURWITZ ist eine Folge der gleichmässigen Konvergenz der Potenzreihe in jedem im Innern des Konvergenzkreises gelegenen Gebiete. Sei zunächst x_0 eine ν-fache Nullstelle der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion $f(x)$ und $|x_0| < R$, so lässt sich um x_0 ein kleiner Kreis C: $|x - x_0| \leqq \varrho$ abgrenzen, der ganz innerhalb des Konvergenzkreises liegt, sodass weder in ihm noch auf ihm $f(x)$ eine weitere Nullstelle hat. Die von o verschiedene untere Grenze von $|f(x)|$ auf der Peripherie dieses Kreises sei ε. Dann ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \nu.$$

In C sei $|f(x)| < M$, $|f'(x)| < M$. Es lässt sich dann für jedes noch so kleines $\delta < \varrho\frac{M}{3}$ ein Index n_0 so bestimmen, dass für $n \geqq n_0$:

$$|P_n(x)| > \frac{2\varepsilon}{\varrho M}\delta$$

für $|x - x_0| = \varrho$, ebenso innerhalb und auf C:

$$|P'_n(x) - f'(x)| < \left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2$$

$$|P_n(x) - f(x)| < \left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2.$$

Dann ist:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left[\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_C \frac{(P'_n(x) - f'(x))f(x) + (f(x) - P_n(x))f'(x)}{P_n(x)\,f(x)}dx\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi} M \frac{2\left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2}{\varepsilon\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}2} 2\pi\varrho = \delta,$$

[1] Rendiconti di Palermo. T. 37. S. u.

[2] Über eine Eigenschaft des Konvergenzkreises einer Potenzreihe. Archiv d. Math. u. Phys. 1914.

sodass von einem bestimmten n ab $\int\limits_{C} \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} dx = 2\pi i \nu$ ist, d. h. P_n in C ν Nullstellen besitzt. Damit ist bewiesen, dass jede Nullstelle von $f(x)$ Häufungsstelle von Nullstellen aller Abschnitte mit genügend hohem Index ist, wobei auch die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigt werden kann.[1]

Ist umgekehrt für unendlich viele Abschnitte $P_{n_1}(x_1) = P_{n_2}(x_2) = \cdots\cdots = 0$, $n_1 < n_2 < \cdots$, und $\lim\limits_{\nu = \infty} x_\nu = x_0$ im Innern des Konvergenzkreises gelegen, so ist $f(x_0) = 0$; denn wäre $|f(x_0)| = \varepsilon > 0$, so liesse sich um x_0 ein Kreis $|x - x_0| \leqq \varrho$ abgrenzen, in welchem $|f(x) - f(x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ wäre, ferner ein Index n_0 so bestimmen, dass $|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ wäre für $n \geqq n_0$, $|x - x_0| \leqq \varrho$, also:

$$|P_n(x)| = |P_n(x) - f(x) + f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geqq \frac{\varepsilon}{3} > 0$$

wäre in dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$, was dem Vorhandensein unendlich vieler Abschnitte mit Nullstellen in dem betrachteten Kreise widerspricht. —

Der neue Satz enthält (bei weitem) alle bisher in dieser Hinsicht über die Abschnitte von Potenzreihen ausgesprochenen Sätze; er steht aber auch in Beziehung zu den allgemeineren Untersuchungen, die die Herren Montel,[2] Severini,[3] Carathéodory und Landau[4] über Folgen eindeutiger analytischer Funktionen überhaupt angestellt haben. Es gilt nämlich darnach folgender Satz:[5]

Wenn eine Folge eindeutiger analytischer Funktionen, die sämtlich für $|x| < R$ regulär und, in dem Kreise $|x| < R$ von 0 und 1 verschieden sind, in unendlich vielen Punkten dieses Kreises mit einem Häufungspunkt im Innern desselben konvergiert, so konvergiert diese Folge im Innern des Kreises $|x| = R$ überall, und zwar in jedem kleineren Kreise $|x| \leqq R - \varepsilon$ gleichmässig.

Wendet man diesen Satz auf die Abschnitte der Potenzreihen an, so lässt sich leicht folgern, dass die Menge der Nullstellen und der Einsstellen der Abschnitte zusammengenommen die ganze Peripherie des Konvergenzkreises ausfüllen, während hier dasselbe von der Menge der Nullstellen allein bewiesen werden wird.

---

[1] Vgl. auch unten Kap. II § 3 Ende.

[2] Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe. Paris 1910. Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques. C. R., Paris, T. 145, p. 910—913. 1907.

[3] Sulle successioni infinite di funzioni analitiche. Atti del IV° Congresso. Roma, T. 2, p. 183—193. 1909.

[4] Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. S. B. Berlin 1911, p. 587—613.

[5] Carathéodory u. Landau, l. c. p. 598—600.

In dem allgemeineren Falle, bei Polynomreihen etwa, gilt jedoch der analoge Satz schon nicht mehr; es kann vorkommen, dass auf dem Rande des Gebietes gleichmässiger Konvergenz[1] einer Polynomfolge kein Häufungspunkt der 0-Stellen der Polynome liegt; ein einfaches Beispiel hierfür s. u.; — dass die Häufungspunkte der 0- und 1-Stellen der Polynome zusammengenommen ihn bedecken, erscheint daher als das beste in dieser Richtung zu erzielende Resultat. Nur einige spezielle, aber besonders wichtige, Klassen von Reihen haben die in Rede stehende Eigenschaft mit den Potenzreihen gemein.

Vielmehr ist hier folgende Erwägung anzustellen. Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0\nu} + a_{1\nu}x + \cdots + a_{n\nu}x^n + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Entwickelung von $f_\nu(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes, und $\lim\limits_{\nu = \infty} f_\nu(x) = f(x)$ in dem (notwendig einfach zusammenhängenden) Gebiete gleichmässiger Konvergenz G, das den Nullpunkt enthält. $|x| = R$ sei der grösste Kreis um 0, der noch in G liegt. (Genauere Bestimmung s. u.) Dann kann man unendlich viele Polynomfolgen aus der Folge f_ν herausholen, indem man etwa setzt:

$$f_\nu^\varkappa(x) = a_{0\nu} + a_{1\nu}x + \cdots + a_{\varkappa\nu}x^\varkappa$$

und die Polynomfolge $f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$; $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$ betrachtet; für diese ist dann zunächst ebenfalls:

$$\lim_{\alpha = \infty} f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}(x) = f(x) \qquad \text{in } G.$$

Man findet nun folgenden allgemeinen Satz:

Jeder Punkt des Kreises $|x| = R$ ist Häufungspunkt für die Nullstellen einer Polynomfolge der beschriebenen Art, und auch unendlich vieler; oder es gibt eine (und also auch unendlich viele) Polynomfolgen der beschriebenen Art, für die alle Punkte von $|x| = R$ Häufungspunkte der Nullstellen sind.

Sucht man also für jede derartige Polynomfolge $(\nu, \varkappa)$ die Häufungspunkte ihrer Nullstellen, so gehören zu ihnen, wenn alle möglichen Folgen $(\nu, \varkappa)$ in Betracht gezogen werden:

1. die Nullstellen von $f(x)$, die innerhalb $|x| = R$ liegen, und innerhalb dieses Kreises liegen keine anderen Häufungspunkte;

[1] Oder eines derselben.

2. die ganze Peripherie des Kreises $|x| = R$, des grössten um o möglichen, im Gebiete gleichmässiger Konvengenz gelegenen Kreises.

Die Begründung der beiden ausgesprochenen Sätze bildet den Hauptinhalt der folgenden Arbeit. Beim Beweise derselben spielt der Satz von VITALI[1] über Konvergenz von Funktionenfolgen die Hauptrolle; ich gebe daher in Kapitel I unter Benutzung einer bekannten, von Herrn Professor SCHWARZ angegebenen Ungleichheitsbedingung einen sehr einfachen Beweis für ihn an. Kapitel II handelt von den Abschnitten der Potenzreihen; es werden ausser dem erwähnten Hauptsatz (§ 1) einige, in gewisser Hinsicht schärfere Bedingungen für die Nullstellen der Abschnitte hergeleitet (§ 2, § 3), ferner Anwendungen auf spezielle Fälle gemacht (§ 2). In Kapitel III werden zunächst einige allgemeinere Klassen von Funktionenfolgen angegeben, für die der für Potenzreihen gültige Satz gleichfalls gilt (§ 1), dann folgen ganz allgemeine Bemerkungen über Funktionenfolgen und ihre gleichmässige Konvergenz; in § 3 beweise ich den Hauptsatz nebst einigen Zusätzen und Verschärfungen und gebe in § 4 einige Ausführungen über die Beziehung des Hauptsatzes zu einigen, neuerdings in Verallgemeinerung LAGUERRE'scher Untersuchungen von den Herren PÓLYA, LINDWART und mir aufgestellen Sätzen über Polynomfolgen.

ERSTES KAPITEL.

Der Satz von Vitali.

Herr VITALI hat folgenden Satz über Folgen analytischer Funktionen ausgesprochen und bewiesen:[2]

Ist $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine Folge eindeutiger analytischer Funktionen, die in einem, im Endlichen gelegenen, Gebiete G sämtlich regulär sind und dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gemeinsamen Schranke M liegen, konvergiert ferner die Folge in unendlich vielen Punkten dieses Gebietes mit einem im Innern

[1] Sopra le serie di funzione analitiche; Annali di Matematica (3), T. 10. — Herr E. LANDAU hat in seine vor Kurzem erschienene Schrift: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, den Beweis des Hauptsatzes über Potenzreihen aufgenommen, wobei er jedoch statt des VITALI'schen Satzes den HADAMARD'schen Dreikreisesatz heranzieht (vgl. l. c. S. 14 und S. 80—83).

[2] Siehe oben.

dieses Gebietes gelegenen Häufungspunkt, so konvergiert die Folge $f_\nu(x)$ in jedem, ganz im Innern von G gelegenen Gebiete G_1 gleichmässig gegen eine daselbst reguläre analytische Funktion $f(x)$.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung dar eines zuerst von STIELTJES[1] aufgestellten, bei welchem die Konvergenz der Folge in einem beliebig kleinen Gebiete G_1 innerhalb G vorausgesetzt wird. Der in der Einleitung erwähnte Satz von CARATHÉODORY und LANDAU folgt aus dem Satz von VITALI unter Benutzung einer bei den elementaren Beweisen des PICARD'schen Satzes erhältlichen Abschätzung.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, G als Kreis vorauszusetzen und G_1 als kleineren, konzentrischen Kreis, und den Mittelpunkt als den Häufungspunkt der Konvergenzpunkte anzunehmen; denn man kann, wie bei der analytischen Fortsetzung, jedes Gebiet G_1 (bzw. G) durch endlich viele (bzw. abzählbar unendlich viele) Kreise erschöpfen, in denen die gleichmässige Konvergenz durch das für das Kreisgebiet bewiesene Theorem sichergestellt wird.

Wir setzen also speziell voraus:

1. $f_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ sind eindeutig und regulär für $|x| \leq R$;
2. $|f_\nu(x)| < M$ für $|x| \leq R$;
3. $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x_\alpha)$ existiert für unendlich viele Punkte $x_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$, wobei

$|x_\alpha| \leq R$ und $\lim\limits_{\alpha=\infty} x_\alpha = 0$ ist, und beweisen dann:

$$\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x)$$

existiert gleichmässig für alle Punkte $|x| \leq R - \varepsilon (\varepsilon > 0)$, und $f(x)$ ist daher eine eindeutige reguläre Funktion dortselbst.

Für den Satz von VITALI sind schon recht einfache Beweise gegeben worden, von CARATHÉODORY und LANDAU[2] und neuestens von Herrn E. LINDELÖF;[3] um aber betreffs dieses für die folgende Arbeit fundamentalen Satzes nicht anders wohin verweisen zu müssen, sei es erlaubt, einen vielleicht noch kürzeren Beweis hier anzuführen

Beweis. 1. Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu} x + a_{3,\nu} x^2 + \cdots \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad \text{für } |x| \leq R,$$

dann ist:

---

[1] Sur la théorie des fractions continues. Annales de Toulouse 1894.

[2] l. c. § 2.

[3] Bulletin de la socitété mathématique de France 1914.

$$|f_\nu(x) - f_\nu(0)| \leq |f_\nu(x)| + |f_\nu(0)| \leq 2M.$$

Nach einem Lemma von Herrn Professor SCHWARZ[1] ist daher, da $f_\nu(x) - f_\nu(0)$ für $x = 0$ verschwindet:

$$|f_\nu(x) - f_\nu(0)| \leq 2M\left|\frac{x}{R}\right| \text{ für } |x| \leq R.$$

Es ist mithin:

$$|f_n(0) - f_{n+m}(0)| \leq |f_n(0) - f_n(x_\alpha)| + |f_n(x_\alpha) - f_{n+m}(x_\alpha)|$$

$$+ |f_{n+m}(x_\alpha) - f_{n+m}(0)| \leq 4M\left|\frac{x_\alpha}{R}\right| + |f_n(x_\alpha) - f_{n+m}(x_\alpha)|.$$

Da aber $\lim\limits_{\alpha=\infty} x_\alpha = 0$ ist und die Funktionenfolge für x_α konvergiert, so besagt diese Abschätzung schon, dass auch $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(0) = \lim\limits_{\nu=\infty} a_{0,\nu}$ existiert; wir setzen:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{0,\nu} = a_0.$$

2. Auch $\lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,1}(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{f_\nu(x) - a_{0,\nu}}{x}$ existiert für $x_\alpha (x_\alpha \neq 0)$, da nach 1. $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{0,\nu} = a_0$ existiert; es ist aber auch, wegen $|f_\nu(x)| < M$ für $|x| \leq R$:

$$|a_{n,\nu}| \leq \frac{M}{R^n},$$

also ist:

$$|f_{\nu,1}(x)| = |a_{1,\nu} + a_{2,\nu}x + \cdots| \leq \frac{M}{R}\left[1 + \frac{R-\varepsilon}{R} + \cdots\right] = \frac{M}{\varepsilon} \text{ für } |x| \leq R - \varepsilon;$$

mithin existiert nach demselben Schluss wie bei 1. auch $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{1,\nu} = a_1$.[2]

So fahren wir fort, Schritt vor Schritt, die beiden Schlussweisen abwechseln lassend, und finden die Existenz der limites:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{\varkappa,\nu} = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

Da $|a_{\varkappa,\nu}| \leq \frac{M}{R^\varkappa}$ ist, so ist auch $|a_\varkappa| \leq \frac{M}{R^\varkappa}$, die Reihe

---

[1] Gesammelte Abhandlungen. Bd. II, S. 109.

[2] Dieser zweite Schritt ist hier einem Punkte im Beweise des Herrn LINDELÖF ähnlich.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

stellt also eine für $|x| < R$ reguläre analytische Funktion dar.

3. Es ist endlich für $|x| < R - \varepsilon$:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leqq |a_0 - a_{0,\nu} + \cdots + (a_m - a_{m,\nu}) x^m| + \left| \sum_{m+1}^{\infty} a_\varkappa x^\varkappa \right| + \left| \sum_{m+1}^{\infty} a_{\varkappa,\nu} x^\varkappa \right|$$

oder:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leqq \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} |a_\lambda - a_{\lambda,\nu}| \, |x|^\lambda + 2 \cdot \frac{M}{R^{m+1}} \cdot (R-\varepsilon)^{m+1} \cdot \frac{R}{\varepsilon}.$$

Aus dieser Abschätzung geht aber unmittelbar die gleichmässige Konvergenz von $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x)$ gegen $f(x)$ für $|x| \leqq R - \varepsilon$ hervor, denn man kann m zunächst so gross wählen, dass $2M \cdot \frac{(R-\varepsilon)^{m+1}}{R^m} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \leqq \frac{\delta}{2}$ wird, und sodann $\nu \geqq \nu(\delta, m)$ so gross, dass $|a_0 - a_{0,\nu}|$, $|a_1 - a_{1,\nu}|, \ldots |a_m - a_{m,\nu}|$ sämtlich kleiner sind als $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}}$, denn dann wird:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leqq \delta$$

ür $\nu \geqq \nu(\delta, m) = \nu(\delta)$, da m nur von δ abhängt, für alle $|x| \leqq R - \varepsilon$, w. z. b. w.

ZWEITES KAPITEL.

Über die Abschnitte der Potenzreihen.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes.

Es sei die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots (a_0 \neq 0)$ vorgelegt, mit endlichem (von 0 und ∞ verschiedenen) Konvergenzradius R. Es ist dann nach Cauchy:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Die Voraussetzung $a_0 \neq 0$ stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar da, wenn $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$ wäre, einfach die Reihe

$$a_\nu + a_{\nu+1} x + \cdots$$

betrachtet werden dürfte, wobei nur die ν-fache Nullstelle 0 der Abschnitte vernachlässigt wäre. Der n-te Abschnitt:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

habe die Nullstellen $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots x_{n,n}$; es sei $|x_{1,n}| \leqq |x_{2,n}| \leqq \cdots \leqq |x_{n,n}|$. Eventuell tritt hier ein- oder mehrfach die Nullstelle ∞ auf.

Wir behaupten sodann den in der Einleitung angegebenen Satz über diese Nullstellen, den wir auch so aussprechen

In jedem beliebig kleinen um einen Punkt der Peripherie des Konvergenzkreises $x_0 = R \cdot e^{i\vartheta_0}$ beschriebenen Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ haben unendlich viele Abschnitte $P_n(x)$ je mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Anderenfalls hätte von einem gewissen n_0 ab kein $P_n(x)$ eine Nullstelle in $|x - x_0| \leqq \varepsilon$. Sei daher ξ ein innerhalb des Konvergenzkreises $|x| < R$ und innerhalb des Kreises $|x - x_0| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ gelegener Punkt, in dem $f(x)$, die durch die Potenzreihe in $|x| < R$ dargestellte Funktion nicht verschwindet, und $P_n(\xi) = r_n \cdot e^{i\vartheta_n}$, so kann man von den Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}\,(n \geqq n_0)$ je einen Zweig als eindeutige Funktion in dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ bestimmen durch die Festsetzung:

$$\sqrt[n]{P_n(\xi)} = \sqrt[n]{r_n} \cdot e^{i\frac{\vartheta_n}{n}} = \varrho_n \cdot e^{i\psi_n}$$

wobei:

$$-\frac{\pi}{n} < \psi_n \leqq \frac{\pi}{n}$$

zu setzen ist.

Ferner ist:

$$P_n(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{x_{1,n}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{2,n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_{n,n}}\right)$$

$$|P_n(x)| \leqq |a_0| \left(1 + \frac{|x|}{|x_{1,n}|}\right) \cdots \left(1 + \frac{|x|}{|x_{n,n}|}\right).$$

Da aber die Häufungsstellen der Nullstellen der $P_n(x)$, soweit sie im Innern des Konvergenzkreises liegen, Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind, und deren kleinste Nullstelle, da $a_0 \neq 0$ ist, von o verschieden ist, so lässt sich für die Nullstellen aller $P_n(x)$, von einem gewissen n ab, und wegen $a_0 \neq 0$ sogar für alle n, eine von o verschiedene untere Schranke angeben; es sei etwa:

$$|x_{\alpha,n}| \geqq \eta > 0 \qquad (\alpha, n \text{ beliebig}),$$

mithin:

$$|P_n(x)| \leqq |a_0| \cdot \left(1 + \frac{|x|}{\eta}\right)^n.$$

In dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ ist aber $|x| \leqq R + \varepsilon$, daher:

$$|P_n(x)| \leqq |a_0| \cdot \left(1 + \frac{R+\varepsilon}{\eta}\right)^n.$$

$$\left|\sqrt[n]{P_n(x)}\right| = \sqrt[n]{|P_n(x)|} \leqq \sqrt[n]{|a_0|} \cdot \left(1 + \frac{R+\varepsilon}{\eta}\right)$$

so dass die für $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ eindeutigen, regulären Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ $(n \geqq n_0)$, wie sie oben definiert wurden, in diesem Gebiet unter einer gemeinsamen oberen Schranke liegen.

Ferner existiert $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(\xi)} = \lim\limits_{n=\infty} \varrho_n \cdot e^{i\psi_n}$ und ist gleich 1. Denn es ist $\lim\limits_{n=\infty} P_n(\xi) = \lim\limits_{n=\infty} r_n \cdot e^{i\vartheta_n}$ vorhanden und nicht gleich o, da ξ so ausgesucht ist, also $\lim\limits_{n=\infty} r_n = r \neq 0$, mithin $\lim\limits_{n=\infty} \varrho_n = \lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{r_n} = 1$, und $\lim\limits_{n=\infty} \psi_n = \lim\limits_{n=\infty} \frac{\vartheta_n}{n} = 0$. Legt man nun die durch Wahl des Hauptwertes für $x = \xi$ eindeutig definierten Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ zu Grunde, so lässt sich um ξ ein ganz in $|x| < R$ und $|x - x_0| < \varepsilon$ gelegener Kreis abgrenzen, in welchem $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$ gleichmässig vorhanden und gleich 1 ist, wie dies aus der gleichmässigen Konvergenz von $P_n(x)$ in demselben leicht gefolgert werden kann.

Es ist also jetzt bewiesen:

1. In dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ sind die Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ $(n > n_0)$ eindeutig zu bestimmen,

2. ebenda existiert eine gemeinsame obere Schranke für den absoluten Betrag dieser Funktionen,

3. in einem innerhalb dieses Kreises gelegenen kleineren Kreise ist $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$

gleichmässig vorhanden und gleich 1, wenn man die Zweige der Wurzeln nach 1. passend auswählt; ein Teil dieses Kreises liegt in $|x-x_0|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$, da sein Zentrum ξ dort liegt.

Daraus folgt nach dem Satz von STIELTJES—VITALI: Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$$

gleichmässig vorhanden in dem ganz in $|x-x_0|\leqq\varepsilon$ gelegenen Kreise $|x-x_0|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ und der limes gleich einer daselbst regulären analytischen Funktion $f(x)$. Diese muss hier aber 1 sein, da sie in unendlich vielen (den durch 3. bestimmen) Punkten im Innern ihres Regularitätsbereiches diesen Wert hat, welche Punkte auch nicht isoliert liegen, sondern sogar ein Gebiet ausfüllen.

Damit ist bewiesen: es ist gleichmässig für $|x-x_0|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)} = 1$$

oder, es lässt sich ein $n=n(\delta)$ so angeben, dass für $n\geqq n(\delta)$ und $|x-x_0|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|P_n(x)|\leqq(1+\delta)^n$$

ist, und ebenso:

$$|P_{n+1}(x)|\leqq(1+\delta)^{n+1}$$

also:

$$|a_{n+1}\cdot x^{n+1}| = |P_{n+1}(x)-P_n(x)|\leqq 2\cdot(1+\delta)^{n+1}.$$

Es sei $\delta=\frac{\varepsilon}{4R}$ gewählt und $|x|=R+\frac{\varepsilon}{2}$, was möglich ist, dann ist für alle $n\geqq n(\delta)=n(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}|\cdot\left(R+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+1}\leqq 2\left(1+\frac{\varepsilon}{4R}\right)^{n+1}.$$

Folglich:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\leqq\frac{1+\frac{\varepsilon}{4R}}{R+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Es ist aber:

$$\lim_{n=\infty} {}^{n+1}\sqrt{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R};$$

die Bedingung

$$\frac{1}{R} \leqq \frac{1+\frac{\varepsilon}{4R}}{R+\frac{\varepsilon}{2}}$$

oder:

$$1+\frac{\varepsilon}{2R} \leqq 1+\frac{\varepsilon}{4R}$$

ist aber bei endlichem R für kein $\varepsilon \neq 0$ erfüllt, so dass wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

Der letzte Schritt des Beweisverfahrens entspricht, wie man leicht sieht, folgender allgemeinen Aussage: in keinem Punkte ausserhalb des Konvergenzkreises ist der lim. sup. der Folge $|P_1(x)|, \sqrt{|P_2(x)|}, \ldots \sqrt[n]{|P_n(x)|}, \ldots$ kleiner oder gleich 1.

§ 2.

Ergänzungen und Anwendungen.

Mit Vorstehendem ist der Beweis des Hauptsatzes erledigt. Man kann ihm noch folgende Formen geben:

1. Aus den Abschnitten $P_1, \ldots P_n, \ldots$ lässt sich stets eine (unendliche) Folge herausheben, so dass alle diese Abschnitte in beliebig vorgeschriebener Nähe einer vorgeschriebenen Stelle des Konvergenzkreises eine Nullstelle haben.

2. Zeichnet man die Nullstellen sämtlicher Abschnitte $P_n(x)$ in der Ebene auf und bestimmt zu dieser Menge M die Menge M' ihrer Häufungspunkte, so liegen in jedem Kreise $|x| \leqq R-\varepsilon$ nur endlich viele Punkte von M', in jedem Kreise $|x| \leqq R+\varepsilon$ unendlich viele; nämlich die ganze Peripherie $|x| = R$.

Diese zweite Aussage vervollständigen wir durch nachstehende Betrachtung. Mit $\Phi(n)$ bezeichne man die Anzahl der Nullstellen von $P_n(x)$ innerhalb des Kreises $|x| = R+\varepsilon$, dann gilt:

Satz 2. Es ist für beliebig kleines ε $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 1$, oder es gibt unendlich viele Abschnitte $P_n(x)$, welche mehr als $n(1-\delta)$ von ihren n Wurzeln in dem Kreise $|x| \leqq R+\varepsilon$ haben, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse ist.

Beweis. In dem Kreise $|x| = R - \varepsilon_0$ hat $f(x)$ nur endlich viele Wurzeln, da $f(x)$ eine für $|x| < R$ reguläre Funktion ist. Wir bezeichnen diese mit $x_1, x_2, \dots x_\nu$, so dass:

$$0 < |x_1| \leqq |x_2| \leqq \cdots \leqq |x_\nu|$$

ist. In dem Kreise $|x| \leqq R - \varepsilon_0$ konvergiert die Potenzreihe gleichmässig gegen $f(x)$, es lässt sich also ein Index $n(\delta)$ so bestimmen, dass für $n \geqq n(\delta)$ die Wurzeln $x_{1,n}, \dots x_{\nu,n}$ von $P_n(x)$ um weniger als δ von $x_1, \dots x_\nu$ abweichen, und $|x_{\nu+1,n}| \geqq R - \varepsilon_0 - \delta$ ist. Es ist daher:

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| = |x_{1,n} \cdots x_{n,n}| > ||x_1| - \delta|^\nu \cdot (R - \varepsilon_0 - \delta)^{\Phi(n) - \nu} \cdot (R + \varepsilon)^{n - \Phi(n)}$$

denn $\Phi(n)$ von den Wurzeln von $P_n(x)$ sind kleiner als $R + \varepsilon$, von denen ν um weniger als δ von $|x_1|, \dots |x_\nu|$ abweichen, also grösser sind als $||x_1| - \delta|$, der Rest ist grösser als $R - \varepsilon_0 - \delta$. Wählen wir δ kleiner als $\frac{|x_1|}{2}$, so ist mithin:

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| > \left|\frac{x_1}{2}\right|^\nu \cdot (R - \varepsilon_0 - \delta)^{\Phi(n) - \nu} \cdot (R + \varepsilon)^{n - \Phi(n)}$$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < |a_0|^{\frac{1}{n}} \cdot \left|\frac{2}{x_1}\right|^{\frac{\nu}{n}} \cdot \frac{(R + \varepsilon)^{\frac{\Phi(n)}{n} - 1}}{(R - \varepsilon_0 - \delta)^{\frac{\Phi(n)}{n} - \frac{\nu}{n}}}.$$

Da ν eine endliche Zahl ist für jedes positive ε_0, so ist mithin:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \overline{\lim_{n = \infty}} \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \varepsilon_0 - \delta}\right)^{\frac{\Phi(n)}{n}},$$

oder, wenn wir noch $\varepsilon_0 + \delta = \delta_1$ setzen und bedenken, dass es möglich sei, ebenso wie ε_0 und δ einzeln, auch $\varepsilon_0 + \delta$ beliebig klein zu machen:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \delta_1}\right)^{\overline{\lim\limits_{n = \infty}} \frac{\Phi(n)}{n}}.$$

Ist also $\overline{\lim\limits_{n = \infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = \alpha < 1$, so wäre:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \delta_1}\right)^\alpha$$

für alle beliebig kleinen δ_1, also auch, da links eine von δ_1 unabhängige Grösse steht:

$$\frac{1}{R} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \frac{(R + \varepsilon)^\alpha}{R^\alpha}$$

oder:

$$\frac{1}{R^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{(R+\varepsilon)^{1-\alpha}},$$

was für $\varepsilon > 0, \alpha < 1$ einen Widerspruch enthält. Daher ist für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes lautet: Häufungsstellen der ersten, der zweiten, ... der ν-ten, ... Nullstellen von $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen innerhalb jedes Kreises $|x| = R + \varepsilon$, also auf der Peripherie des Konvergenzkreises oder innerhalb desselben. Als ν-te Nullstelle von $P_n(x)$ ist hierbei $x_{\nu,n}$ bezeichnet, wenn man die Nullstellen von $P_n(x)$ in eine Reihe nach wachsendem absoluten Betrag geordnet hat. Denn hätten nur die ν-ten Nullstellen einen Häufungspunkt der angegebenen Lage, aber nicht mehr die $(\nu+1)$-ten, so wäre von einem gewissen n ab: $\Phi(n) \leq \nu$, also $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\nu}{n} = 0$, was dem bewiesenen Satze widerspricht. Herr F. LUKÁCS[1] hatte, auf entsprechendem Wege, nur gefunden $\Phi(n) \geq 1$, von einem gewissen n ab, statt des genauen Satzes $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 1$. Dies ist nämlich das genaueste hier zu erzielende Resultat, denn es lassen sich Reihen angeben, für welche $\underline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 0$. Dazu betrachte man etwa zunächst die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} x^{\nu!}$. Die Abschnitte:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \cdots + x^{\nu!}$$

wo $\nu! \leq n < (\nu+1)!$ ist, haben im Endlichen $\nu!$ Wurzeln, so dass etwa für die Abschnitte $P_{\nu!-1}$ $\Phi(n) \leq (\nu-1)!$ ist, also $\underline{\lim} \frac{\Phi(n)}{n} = \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{(\nu-1)!}{\nu!-1} = 0$. Es ist leicht, wegen der Stetigkeit der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Reihen zu konstruieren, deren Koeffizienten sämtlich nicht verschwinden, und die die gleiche Eigentümlichkeit zeigen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass statt der Nullstellen der $P_n(x)$ auch die Nullstellen von $P_n(x) - a$ zugrunde gelegt werden können; oder da $f(x)$ und $f'(x)$ im selben Kreise um 0 regulär sind, auch die Nullstellen von $P'_n(x)$ usw.

Anwendungen der vorstehenden Sätze ergeben sich leicht, wenn man spezielle Fälle betrachtet. Es gelten z. B. folgende Sätze:

[1] l. c.

1. Sind die Nullstellen der Abschnitte einer Potenzreihe von einem gewissen n ab sämtlich reel, so konvergiert die Potenzreihe entweder nirgends oder in der ganzen Ebene,[1] denn die Menge M' besteht hier nur aus Punkten auf der Achse des Reellen, erfüllt also keinen im Endlichen gelegenen Kreis. Dieser Satz steht in Beziehung zu einem Theorem von LAGUERRE und ist von Herrn PÉTROVITCH (im Falle positiver Wurzeln) besonders hervorgehoben worden.

2. Liegen die Nullstellen der Abschnitte sämtlich in einer Halbebene, so konvergiert die Potenzreihe nirgends oder in der ganzen Ebene, und ähnliche Sätze mehr.

Es genügt auch, diese Voraussetzung nur für unendlich viele Abschnitte zu machen; wie durch eine algebraische Betrachtung dieser Fall auf den folgenden zurückgeführt werden könne, kann man aus den Andeutungen am Ende von Kapitel III dieser Arbeit entnehmen; doch ist zu bemerken, dass, um das Resultat zu erlangen, die Anwendung des Satzes von PÓLYA und LINDWART natürlich rascher zum Ziel führt (siehe unten).

3. Genügen die Nullstellen der Abschnitte einer Bedingung der Form $\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left|\frac{1}{x_{\nu,n}}\right|^p < M$ für alle n und feste positive Grössen p und M, so konvergiert die Potenzreihe nirgends oder in der ganzen Ebene.

Denn in jedem Kreise $|x| \leqq R$ hat $P_n(x)$ höchstens $\nu = M \cdot R^p$ Nullstellen. Es wäre also $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n} = 0$, wenn $\Phi(n)$ für den Kreis $|x| = R$ gebildet wird, so dass der Konvergenzradius grösser als R sein müsste.

Dass in den gennanten Fällen die dargestellten ganzen transzendenten Funktionen, falls wir $R = 0$ ausschliessen, von endlichem Geschlecht sind, und die Bestimmung desselben hat Herr PÓLYA zuerst, in Verallgemeinerung LAGUERRE'scher Untersuchungen, für Fall 2. sowie allgemeinere Fälle ausgeführt. Diese Tatsachen sind bei weitem in seinen Sätzen über Polynomfolgen enthalten, wenn man sie speziell auf die Abschnitte der Potenzreihen bezieht (vgl. auch unten). Es darf hier vielleicht bemerkt werden, dass die Arbeiten von PÓLYA mir die Veranlassung zur Beschäftigung mit den hier behandelten Fragen gaben.[2]

[1] LAGUERRE, Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. Oeuvres I. p. 174—177.

[2] Vgl. zu diesen ganzen Anwendungen folgende Arbeiten, die sich allerdings zumeist nur, bzw. auch, auf Polynomreihen beziehen: PÓLYA, Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Gött. Nachr. 1913; derselbe, Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln. Rend. Palermo T. 36, 1913; PÓLYA und LINDWART, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rend. Pal. T. 37, 1914; JENTZSCH, Sur l'extension d'un théorème de LAGUERRE, Comptes Rendus 1914, t. 158; E. LINDWART, Über eine Methode von LAGUERRE zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion. Göttingen 1914.

§ 3.

Betrachtung eines speziellen Falles.

Wir betrachten noch einen speziellen Fall, in dem die Funktion $\Phi(n)$ sich genauer bestimmen lässt, nämlich den Fall, dass nur ein einfacher Pol auf dem Konvergenzkreise $|x| = R$ liegt. Es kann dann gesetzt werden: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + + \cdots + a_n x^n + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots + \frac{\alpha}{1 - \frac{x}{x_1}}$, wo $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ einen grösseren Konvergenzradius R_1 als $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ hat. Es ist dann:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

$$+ \alpha \left(1 + \frac{x}{x_1} + \cdots + \frac{x^n}{x_1^n}\right) = Q_n(x) + R_n(x)$$

$$= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{x_1}}.$$

Es sei $R_1 > R + 2\varepsilon$. Dann ist in dem Kreise $|x| \leq R + 2\varepsilon$ die durch $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ dargestellte Funktion regulär, es gibt daher eine obere Schranke M für jeden Abschnitt $\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$ von $\sum_0^\infty b_\nu x^\nu$, falls man x auf den Kreis $|x| \leq R + \varepsilon$ beschränkt. Daher ist für $|x| = R + \varepsilon$:

$$\left|\sum_0^n b_\nu x^\nu\right| \leq M.$$

Es ist aber für gehörig grosses n:

$$\left|\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{x_1} - 1}\right| > \frac{\left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^{n+1} - 1}{\frac{R+\varepsilon}{R} + 1} = \frac{\left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^{n+} - 1}{2 + \frac{\varepsilon}{R}}$$

beliebig gross, so dass von einem gewissen n ab:

$$M < |a| \cdot \left| \frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{x_1} - 1} \right|,$$

also auch:

$$|Q_n(x)| = \left| \sum_0^n b_\nu x^\nu \right| < |R_n(x)|$$

ist.

Daher hat nach einem allgemeinen Satz der Funktionentheorie $Q_n(x) + R_n(x) = P_n(x)$ ebenso viele Nullstellen innerhalb $|x| \leqq R + \varepsilon$ wie $R_n(x)$. $R_n(x)$ hat aber n Nullstellen, so dass von einem gewissen n ab für $|x| \leqq R + \varepsilon$: $\Phi(n) = n$ ist. Damit ist bewiesen:

Satz 3. Liegt auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe nur ein einfacher Pol der durch die Reihe dargestellten Funktion, so hat jeder Abschnitt der Reihe von einem gewissen Index an alle seine Wurzeln innerhalb des Kreises $|x| = R + \varepsilon$. (ε beliebig klein, positiv.)

Dies gilt schon für den Fall zweier einfachen Pole auf dem Konvergenzkreise nicht mehr, wie das Beispiel $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_0^\infty x^{2\nu}$ lehrt, denn hier ist $\Phi(2n) = 2n$, aber $\Phi(2n-1) = 2n-2$.

Es hat im Allgemeinen keineswegs jede unendliche Folge von Abschnitten an der ganzen Peripherie des Konvergenzkreises Häufungsstellen von Nullstellen. Es lassen sich z. B, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu x^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 konstruieren, von denen bestimmte Abschnittsfolgen in jedem endlichen inneren Gebiete der Halbebene $R(x) \geqq -1$ gleichmässig konvergieren, sonach am ganzen Konvergenzkreis nur vereinzelte Häufungsstellen von Nullstellen haben können, nämlich die Nullstellen der durch die Potenzreihe für $|x| < 1$ dargestellten, durch die Abschnittsfolge für $R(x) > -1$ fortgesetzten analytischen Funktion (ausser $x = -1$). Diese Tatsache verdient vielleicht deswegen hervorgehoben zu werden, weil, wie nach dem in der Einleitung dieser Arbeit angegebenen Beweise leicht ersichtlich ist, die von HURWITZ bemerkte Tatsache auch gültig bleibt, wenn man nicht alle, sondern nur unendlich viele Abschnitte der Potenzreihe in Betracht zieht.

DRITTES KAPITEL.

Über Folgen von analytischen Funktionen.

§ 1.

Einige spezielle Folgen.

Die in Kapitel II § 1 für Potenzreihen werwendete Beweismethode lässt sich auf einige Typen von Reihen ausdehnen, von denen hier zwei besonders wichtige erwähnt seien:

1. Die Entwickelungen nach FABER'schen Polynomen. Diese bilden die natürliche, aus der Theorie der konformen Abbildung hervorgehenden Verallgemeinerungen der Potenzreihen. Jedem einfach zusammenhängenden, von einer analytischen Kurve berandeten Gebiete G lässt sich nach FABER eine Folge von Polynomen $P_1(x), \ldots P_n(x), \ldots$ so zuordnen, dass jede in G reguläre analytische Funktion $F(x)$ sich auf eine bestimmte Weise in eine in jedem inneren Teilgebiete von G gleichmässig konvergente Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln lässt, die nirgends ausserhalb G konvergiert. Dann gilt folgender Satz: die Nullstellen der Polynome $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x) = Q_n(x)$ haben zu Häufungsstellen im Innern von G alle Nullstellen von $F(x)$ und nur diese, sowie den ganzen Rand von G. Der Beweis und gewisse Verschärfungen des Satzes sind, wenn man die FABER'schen Formeln zugrunde legt, wie vorhin auszuführen.

2. Die DIRICHLET'schen Reihen. Betrachtet man etwa eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^s}$ und sei σ_0 die Abszisse der Konvergenzgeraden derselben, so liegen auf dieser Geraden die Nullstellen der Abschnitte $\sum\limits_{1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^s} = Q_n(s)$ überall dicht. Der Beweis ergibt sich nach denselben Prinzipien wie der in Kapitel II § 1 geführte unter Benutzung der Funktionen $\frac{\log Q_n(s)}{\log n}$ an Stelle der dort benutzten $\sqrt[n]{P_n(x)}$. Dieses zweite Resultat hat mir Herr K. KNOPP, dem ich meinen Beweis für Potenzreihen vorgetragen hatte, gütigst mitgeteilt.

§ 2.

Allgemeine Betrachtungen über Funktionenfolgen.

In dem allgemeinen Falle der Folgen analytischer Funktionen liegt alles viel komplizierter als bei den Potenzreihen. Denn:

1. braucht das Gebiet gleichmässiger Konvergenz kein Kreis zu sein,
2. kann es aus mehreren getrennten Stücken bestehen,
3. braucht auf dem Rande eines Gebietes gleichmässiger Konvergenz kein singulärer Punkt der Grenzfunktion f zu liegen.

Jedoch sind die einzelnen Gebiete gleichmässiger Konvergenz einfach zusammenhängend.[1] Daher sind hier dem Beweise des Hauptsatzes einige elementarere Betrachtungen vorauszuschicken.

Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}x + \cdots + a_{n,\nu}x^n + \cdots$$

und $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ gleichmässig für $|x| \leqq R - \varepsilon$ (ε beliebig klein), aber nicht für einen Kreis $|x| \leqq R + \varepsilon$ (ε beliebig klein), $\varepsilon > 0$. In diesem Falle bezeichnen wir den Kreis $|x| = R$ als den grössten Kreis gleichmässiger Konvergenz K um 0 der Folge $f_\nu(x)$, wobei natürlich die Regularität der Funktionen f_ν für $|x| < R$ vorausgesetzt ist. Der Konvergenzradius der Reihe für $f_\nu(x)$: $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} a_{\varkappa,\nu}\, x^\varkappa$ sei ϱ_ν; es soll also sein:

$$\varrho_\nu \geqq R.$$

ϱ' sei die untere Grenze der ϱ_ν. ϱ sei der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_0^\infty a_\nu x^\nu$. Nach den gemachten Voraussetzungen ist jedenfalls auch $\varrho \geqq R$. Es sind dann folgende Fälle möglich:

1. $\varrho' > R$; $\varrho > R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = \frac{x^\nu}{1-x} + 2^\nu x^\nu = (1 + 2^\nu)x^\nu + x^{\nu+1} + x^{\nu+2} + \cdots$$

$$f(x) = 0$$

$$\varrho' = 1,\ \varrho = \infty,\ R = \frac{1}{2}.$$

---

[1] Vgl. Montel, Leçons sur les séries de polynômes. Paris 1910.

2. $\varrho' = R$; $\varrho > R$. Bespiel:

$$f_\nu(x) = x^\nu \cdot \frac{1}{1-x} = x^\nu + x^{\nu+1} + \cdots .$$

$$f(x) = 0.$$

$$\varrho' = 1, \quad \varrho = \infty, \quad R = 1.$$

3. $\varrho' = R$; $\varrho = R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} + 2x^\nu + 2x^{\nu+1} + \cdots = \frac{x^\nu + 1}{1-x}$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} + x^\nu + \cdots \qquad = \frac{1}{1-x}$$

$$\varrho' = 1, \quad \varrho = 1, \quad R = 1.$$

4. $\varrho' > R$; $\varrho = R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu = \frac{1 - x^{\nu+1}}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\varrho' = \infty, \quad \varrho = 1, \quad R = 1.$$

Diese verschiedenen Fälle treten mithin schon bei den trivialsten Beispielen auf. Sei also $|x| = R$ der grösste Kreis gleichmässiger Konvergenz der Folge $f_\nu(x)$, so lässt sich ein $\nu = \nu(\delta)$ angeben, so dass:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leqq \delta \text{ ist für } \nu \geqq \nu(\delta) \text{ und } |x| \leqq R - \varepsilon_1,$$

oder:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{(R-\varepsilon_1)^n}.$$

Ist es umgekehrt möglich, ein $\nu = \nu(\delta)$ für jedes δ zu bestimmen, so dass:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon_1)^n} \text{ ist für } \nu \geqq \nu(\delta),$$

so ist, falls $f(x)$ und $f_\nu(x)$ alle für $|x| < R + \varepsilon_1$ regulär sind:

$$|f(x)-f_\nu(x)| \leq \sum_0^\infty |a_n - a_{n,\nu}|\cdot|x|^n \leq \delta\cdot\sum_0^\infty \frac{|x|^n}{(R+\varepsilon_1)^n}$$

$$\leq \delta\cdot\frac{1}{1-\dfrac{|x|}{R+\varepsilon_1}} \text{ für } \nu \geq \nu(\delta);\ |x| \leq R+\varepsilon_2 < R+\varepsilon_1,$$

also die Folge der $f_\nu(x)$ für $|x| < R+\varepsilon_2$ (ε_2 beliebig $< \varepsilon_1$) gleichmässig konvergent.

Mit jeder Folge von Funktionen $f_\nu(x)$ sind nun unendlich viele andere Folgen verbunden, von denen wir besonders die Polynomfolgen hervorheben. Wir bilden:

$$P_\nu^\varkappa(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}x + \cdots + a_{\varkappa,\nu}x^\varkappa.$$

Jeder Folge von Zahlenpaaren $(\nu_1, \varkappa_1), (\nu_2, \varkappa_2), \ldots (\nu_n, \varkappa_n), \ldots$, wo $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$ und $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots$, ordnen wir dann die »$(\nu, \varkappa)$-Folge» $P_{\nu_1}^{\varkappa_1}, P_{\nu_2}^{\varkappa_2}, \ldots$ zu. Wir beweisen dann folgenden Satz:

Jede $(\nu, \varkappa)$-Folge konvergiert mindestens für $|x| \leq R-\varepsilon$ (ε beliebig, $\varepsilon > 0$) gleichmässig, und es gibt mindestens eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, die für kein Gebiet $|x| \leq R+\varepsilon$ gleichmässig konvergiert (und damit auch unendlich viele).

Es ist klar, dass, wenn eine $(\nu, \varkappa)$-Folge gleichmässig für ein beliebig kleines Gebiet um 0 konvergiert, ihr limes wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$ mit $f(x)$ daselbst übereinstimmt.

Beweis. 1. Es ist für $\nu \geq \nu_1(\delta)$:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leq \frac{\delta}{\left(R-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^n}$$

daher

$$f(x) - P_\nu^\varkappa(x) = \sum_0^\varkappa (a_n - a_{n,\nu})x^n + \sum_{\lambda=\varkappa+1}^\infty a_\lambda x^\lambda;\quad |x| < R$$

leicht abzuschätzen. Da $f(x)$ für $|x| < R$ regulär ist, ist es möglich, ein $n(\delta)$ so zu wählen, dass:

$$\left|f(x) - \sum_0^m a_\nu x^\nu\right| \leq \delta \text{ für } |x| \leq R-\varepsilon \text{ und } m \geq n(\delta)$$

ist, für ein bestimmtes von 0 verschiedenes ε.

Wegen $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$ kann man den Index λ von $\varkappa_\lambda$ so gross wählen, dass $\varkappa_\lambda \geqq n(\delta)$ wird für $\nu \geqq \nu_2(\delta)$. Für $\nu \geqq \nu_1(\delta)$; $\nu_2(\delta)$ ist daher:

$$|f(x) - P_\nu^\varkappa| \leqq \sum_0^\varkappa \frac{\delta}{\left(R - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot (R-\varepsilon)^n + \delta < \delta + 2\delta \cdot \frac{R - \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}.$$

Damit ist aber die gleichmässige Konvergenz in $|x| \leqq R - \varepsilon$ gewährleistet.

2. Ist $\varrho = R$, so braucht der zweite Teil des Satzes keinen längeren Beweis, da dann offenbar keine $(\nu, \varkappa)$-Folge in einem Kreise $|x| < R + \varepsilon$ gleichmässig konvergiert.

Im allgemeinen verfährt man so. Nach der Bestimmung von R kann man zu jedem ε für gewisse δ unendlich viele ν finden, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, für die die Bedingung:

$$(1) \qquad |a_n - a_{n,\nu}| \geqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n} \qquad \begin{array}{l} \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots \\ \delta \leqq \delta(\varepsilon) \end{array}$$

für je mindestens ein n erfüllt ist. Es gibt also Folgen:

$$(\nu_1, n_1), (\nu_2, n_2), \ldots \qquad (\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots)$$

für die

$$|a_{n_a} - a_{n_a, \nu_a}| \geqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{n_a}}$$

ist. $\delta < \delta(\varepsilon)$, für jedes $\varepsilon > 0$, das man vorher gewählt hat.

Dies folgt aus den früheren Bemerkungen. Es müssen hier aber unendlich viele verschiedene n vorkommen, denn sonst wäre für unendlich viele ν und ein festgehaltenes n:

$$|a_n - a_{n,\nu_a}| \geqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n},$$

während doch $\lim\limits_{a=\infty} |a_n - a_{n,\nu_a}| = 0$ ist.

Daher kann man aus der Folge der Paare (ν_a, n_a) eine andere auswählen, $(\nu_a, \varkappa_a)$, so dass $\nu_{a+1} > \nu_a$; $\varkappa_{a+1} > \varkappa_a$ ist. Wir behaupten, dass die zugehörige $(\nu, \varkappa)$-Folge nicht gleichmässig für $|x| \leqq R + \varepsilon$ gegen die in $|x| \leqq R + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 > \varepsilon)$ reguläre Funktion $f(x)$ konvergiert. Denn dann wäre:

$$\left|f(x) - P_{\nu_a}^{\varkappa_a}(x)\right| \leqq \frac{\delta}{2} \text{ für } \nu \geqq \nu(\delta) \text{ und } |x| \leqq R + \varepsilon; \text{ also:}$$

$$|a_n - a_{n,\nu_a}| \leqq \frac{\frac{\delta}{2}}{(R+\varepsilon)^{n_a}} \text{ für } \nu \geqq \nu(\delta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa_a = n_a$$

also speziell

$$|a_{n_a} - a_{n_a,\nu_a}| \leqq \frac{\frac{\delta}{2}}{(R+\varepsilon)^{n_a}}$$

was der vorhin getroffenen Bestimmung der n_a, ν_a widerspricht.

Damit ist aber nur folgendes bewiesen: Ist $R_{\nu,\varkappa}$ der zu einer $(\nu, \varkappa)$-Folge gehörige Radius des grössten Kreises gleichmässiger Konvergenz, so gibt es $(\nu, \varkappa)$-Folgen für jedes $\varepsilon > 0$, so dass $R_{\nu,\varkappa} < R + \varepsilon$ ist; denn die Auswahl der $(\nu, \varkappa)$-Folge hing von ε ab. Jetzt wähle man, um den Beweis zu vollenden, eine Folge gegen 0 abnehmender ε: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \cdots \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ und bestimme zu jedem von ihnen eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, für die $R^{(n)}_{\nu,\varkappa} < R + \varepsilon_n$ ist. Durch ein passendes Ineinanderordnen dieser Folgen kann man dann eine solche erhalten für die $R_{\nu,\varkappa} \leqq R^{(n)}_{\nu,\varkappa}$ ist für jedes n, also $\leqq R$, da aber nach 1. $R_{\nu,\varkappa} \geqq R$ ist, ist für diese Folge:

$$R_{\nu,\varkappa} = R.$$

Da ein ähnlicher Einordnungsprozess später nochmals auftritt (§ 3, Ende), sei hier dessen Ausführung übergangen.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Es ist gezeigt: Für jede $(\nu, \varkappa)$-Folge ist:

$$1. \quad R_{\nu,\varkappa} \geqq R$$

und es gibt eine Folge,

$$2. \quad \text{für die } R_{\nu,\varkappa} = R \text{ ist.}$$

Betrachten wir etwa die Folge $f_\nu(x)$, wo: $f_\nu(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu + 2^{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} + 2^{\nu+2} \cdot x^{\nu+2} + \cdots$, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $|x| \leqq \frac{1}{2}$, also $R = \frac{1}{2}$; während z. B. für die Folge (ν, ν):

$$P_\nu^\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu, \quad R_{\nu,\nu} = 1$$

ist, jedoch für die Folge $(\nu, 2\nu)$:

$$P_\nu^{2\nu}(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu + 2^{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} + \cdots + 2^{2\nu} \cdot x^{2\nu}, \quad R_{\nu,2\nu} = \frac{1}{2} = R \text{ ist.}$$

Es seien noch folgende Bemerkungen über die Konvergenzbedingungen beigefügt. Der Konvergenzradius von $f_\nu(x)$ ist gegeben durch:

$$\frac{1}{\varrho_\nu} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_{n,\nu}|},$$

der von $f(x)$ durch:

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|};$$

es ist ferner:

$$\varrho' = \underline{\lim_{\nu=\infty}} \varrho_\nu$$

Sind also die Gleichungen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$ bekannt, d. h. konvergieren im Punkte 0 die Folgen $f_\nu(0)$; $f'_\nu(0)$; $\cdots$ gegen endliche Zahlen, so sind die Bedingungen $\varrho > 0$, $\varrho' > 0$ notwendig, jedoch nicht hinreichend für die gleichmässige Konvergenz in einem noch so kleinen Gebiete um 0. Dies lehrt folgendes Beispiel: $f_\nu(x) = (\nu \cdot x)^\nu$; $f(x) = 0$. Hier ist $\varrho_\nu = \infty$, $\varrho' = \infty$, $\varrho = \infty$, aber $R = 0$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen also dafür, dass ein Punkt 0, in dem $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu^{(x)}(x = 0, 1, 2, \ldots)$ sämtlich existieren, Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz sei, lauten:

1. $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$.

2. Es gibt eine Grösse R derart, dass $|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{R^n}$ ist, für $\nu \geqq \nu(\delta)$, für jedes n und beliebig vorgegebenes δ. Umgekehrt ist ein Punkt 0, für dem $\lim a_{n,\nu} = a_n$ vorhanden ist, $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$ ist, dann und nur dann nicht Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz, wenn es zu jedem $R \neq 0$ Werte δ gibt derart, dass:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{\delta}{R^n}$$

ist, für unendlich viele Paare (n, ν), unter denen solche mit beliebig grossem ν (und folglich n)[1] vorkommen. Aus dieser Bedingung lässt sich noch das δ wegschaffen. Denn sei für ein $R \neq 0 (R < \varrho', R < \varrho)$ und alle n, und alle $\nu \geqq \nu_0$:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{1}{R^n},$$

[1] Vgl. S. 240 unten.

so ist:

$$|f(x)-f_\nu(x)| \leqq \sum_0^m |a_n - a_{n,\nu}| \cdot |x|^n + |x|^m \cdot \frac{1}{1-\frac{|x|}{R}} \cdot \frac{1}{R^m} \text{ für } |x|<R$$

$$< \sum_0^m |a_n - a_{n,\nu}| \cdot |x|^n + \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot 2 \text{ für } |x| < \frac{R}{2}.$$

Wählen wir also m so gross, dass $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} < \frac{\delta}{2}$ wird, darauf ν so gross, dass:

$$\left(\frac{1}{2}R\right)^n |a_n - a_{n,\nu}| < \frac{\delta}{2(m+1)}$$

wird für $n = 0, 1, 2, \ldots m$, so wird für $\nu \geqq \nu(m) = \nu(\delta)$ und

$$\nu \geqq \nu_0 \text{ und } |x| < \frac{1}{2}R;$$

$$|f(x)-f_\nu(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

so dass man folgenden Satz aussprechen darf: Ist $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$, $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$, so ist 0 dann und nur dann kein Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz, wenn es unendlich viele Paare (n, ν), $\lim n = \infty$, $\lim \nu = \infty$ für jedes $R > 0$ gibt, so dass für diese:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{1}{R^n}$$

ist. Man kann offenbar diese Betrachtungen benutzen, um Bedingungen für die Grösse des R abzuleiten, dies sei hier übergangen, da sich weiter unten ein deutlicheres Kriterium für R ergibt. Diese ganz elementaren Überlegungen sollten vor allem den Zusammenhang der Konvergenz einer Funktionenfolge mit der Konvergenz der durch sie bestimmten Polynomfolgen erläutern.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Ist R der Konvergenzradius gleichmässiger Konvergenz, so ist es nicht nötig, dass die Nullstellen von $f_\nu(x)$ auf dem Kreise $|x| = R$ auch nur eine

Häufungsstelle haben; auch auf dem ganzen Rande des um o gelegenen Gebietes G gleichmässiger Konvergenz braucht keine solche zu liegen. Dies geht schon aus dem Beispiel $x, x^2, x^3, \ldots$ hervor; freilich ist hier $f(x) = 0$; jedoch lässt sich diese Erscheinung auch an Beispielen, wo $f(x) \neq$ const. ist, nachweisen. Es sei:

$$f_\nu(x) = e^{x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Hier ist $\varrho_\nu = \infty$, $\varrho' = \infty$, $\varrho = 1$, $R = 1$. (Fall 4, oben.) Hier hat keine der Funktionen f_ν überhaupt eine Nullstelle, von einer Häufung derselben auf dem Rande des Konvergenzgebietes (gleichmässiger Konvergenz) $|x| = 1$ kann also keine Rede sein. Es ist leicht, hieraus auch Beispiele von Polynomfolgen mit nicht konstanter Grenzfunktion zu konstruieren, bei denen gleichfalls nicht am Rande von G, geschweige denn auf $|x| = R$, eine Häufungsstelle von Nullstellen der Polynome liegt.

Dagegen beweisen wir folgenden Satz:

Mindestens eine (ν, x)-Folge hat jeden Punkt von $|x| = R$ als Häufungsstelle ihrer Nullstellen, und dann auch unendlich viele; — sofern sich die Grenzfunktion nicht auf o reduziert.

Beweis. Entweder ist $\varrho = R$ oder $\varrho > R$. 1. Im ersten Falle gibt es nach dem Haupsatze des Kapitels II eine Folge von Abschnitten von $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n x^n$, deren Nullstellen jeden Punkt von $|x| = R$ zur Häufungsstelle haben. Diese Abschnitte sind sicher unter sämtlichen enthalten. Wir wählen jetzt ν_2 so gross, dass sich die Wurzel von $P^2 = a_0 + a_1 x$ von der Wurzel von $P^2_{\nu_2} = a_{0,\nu_2} + a_{1,\nu_2} x$ um höchstens 1 unterscheidet; sodann $\nu_3 > \nu_2$ so gross, dass die beiden Wurzeln von $P^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sich von denen von $P^3_{\nu_3} = a_{0,\nu_3} + a_{1,\nu_3} x + a_{2,\nu_3} x^2$ um höchstens $\frac{1}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterscheiden usw. Man kann so verfahren, da $\lim\limits_{\nu = \infty} a_{n,\nu} = a_n$ ist, es sich jedesmal nur um endlich viele Koeffizienten handelt und unter Benutzung des Satzes, dass die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetig von den Koeffizienten abhängen. Es ist dann klar, dass sich die Nullstellen von $P^a_{\nu_a}$ an denselben Stellen häufen werden wie die von P^a, d. h. längs des ganzen Kreises $|x| = R$. Damit ist der erste Fall erledigt. 2. Ist $\varrho > R$, aber $\varrho' = R$, so kann man noch ähnlich einfach verfahren. Die Abschnitte von

$f_\nu(x)$ haben als Häufungspunkte ihrer Nullstellen alle Punkte der Peripherie $|x| = \varrho_\nu$. Wir wählen einen Abschnitt von $f_1(x)$: $P_1^{\varkappa_1}(x)$, der eine Nullstelle hat, die sich von $x = \varrho_1$ um weniger als 1 unterscheidet, sodann $P_1^{\varkappa_2}(x)$, der eine Nullstelle hat, die sich von $x = \varrho_2$ um weniger als $\frac{1}{2}$ unterscheidet ($\varkappa_2 > \varkappa_1$), sodann $P_3^{\varkappa_3}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{3}$ von $\varkappa = -\varrho_3$, $P_4^{\varkappa_4}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{4}$ von $x = \varrho_4 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $P_5^{\varkappa_5}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{5}$ von $x = \varrho_5 \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}$ usw.; immer höhere Einheitswurzeln werden benutzt und dabei die Regel $\varkappa_{\nu+1} > \varkappa_\nu$ beachtet. Man sieht leicht ein, dass man auch hier wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \varrho_\nu = R$, und weil die Einheitswurzeln auf der Kreisperipherie überall dicht liegen, eine Polynomfolge der gewünschten Art erhält.

3. Es bleibt der Fall $\varrho' > R$, $\varrho > R$ zu erledigen, der anders zu behandeln ist. In diesem Falle gibt es nicht für jedes δ ein $\nu(\delta)$, so dass für alle $\nu > \nu(\delta)$ und alle n:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n}$$

ist, für ein beliebiges, aber fest gewähltes ε. Es gibt also für jedes ε nach § 2 unendlich viele Paare

$(n_1, \nu_1), (n_2, \nu_2), \ldots, n_1 < n_2 < n_3 < \cdots, \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, für die:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n}$$

ist, $\delta \leqq \delta(\varepsilon)$, ε beliebig klein, aber fest.

Wählen wir also die Folge $(\varkappa_\alpha, \nu_\alpha) \equiv (n_\alpha, \nu_\alpha)$, so ist für diese:

$$|a_{\varkappa_\alpha} - a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}. \tag{1}$$

Nun soll $\varrho > R$ sein, es ist also möglich von vornherein $\varepsilon = \frac{\varrho - R}{2}$, $\varrho = R + 2\varepsilon$ zu setzen. Nun folgt

$$|a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} - |a_{\varkappa_\alpha}|.$$

Es ist aber $\overline{\lim\limits_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\varkappa]{|a_\varkappa|} = \frac{1}{\varrho}$, also von einem gewissen $\varkappa$ ab:

$$|a_\varkappa|\varrho^\varkappa < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}\right)^\varkappa; \quad \varkappa \geqq \varkappa(\varepsilon).$$

Mithin:

$$|a_{\varkappa_a,\nu_a}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}} - \frac{1}{(R+2\varepsilon)^{\varkappa_a}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}\right)^{\varkappa_a}$$

$$> \frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}} \left\{ \delta - \left\{ \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}}{1 + \frac{\varepsilon}{R+\varepsilon}} \right\}^{\varkappa_a} \right\}$$

demnach für $\varkappa_a > \varkappa(\delta)$, d. h. a gehörig gross gewählt:

$$|a_{\varkappa_a,\nu_a}| > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}$$

oder auch

$$\left|\frac{a_{0,\nu_a}}{a_{\varkappa_a,\varkappa_a}}\right| < |a_{0,\nu_a}| \frac{2(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}{\delta}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite stellt das Produkt dar aller Wurzeln von

$$a_{0,\nu_a} + a_{1,\nu_a}x + \cdots + a_{\varkappa_a,\nu_a} \cdot x^{\varkappa_a} = f_{\nu_a}^{\varkappa_a}(x).$$

Die Zahl derselben innerhalb $|x| = R + 2\varepsilon$ bezeichnen wir mit $\Phi(\nu_a, \varkappa_a)$; die kleinste mit x_{ν_a,ν_a}. Es ist dann (vgl. Kap. II § 2):

$$\left|\frac{a_{0,\nu_a}}{a_{\varkappa_a,\nu_a}}\right| > |x_{\nu_a,\varkappa_a}|^{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)} \cdot (R+2\varepsilon)^{\varkappa_a - \Phi(\nu_a,\varkappa_a)}$$

daher:

$$|x_{\nu_a,\varkappa_a}|^{\frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a}} \cdot (R+2\varepsilon)^{1-\frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a}} < |a_{0,\nu_a}|^{\frac{1}{\varkappa_a}} \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\varkappa_a}} \cdot (R+\varepsilon).$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass $a_0 \neq 0$ sei, so folgt hieraus ohne weiteres, dass $\lim\limits_{a=\infty} \frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a} \neq 0$ sein kann; denn dann ergäbe sich links $R + 2\varepsilon$, rechts $R + \varepsilon$ als limes.

Damit ist bewiesen: im Falle $\varrho' > R$, $\varrho > R$ lässt sich für jedes $\varepsilon > 0$ eine

Folge $(\nu_a, \varkappa_a)$ angeben, so dass, wenn $\Phi(\nu_a, \varkappa_a)$ die Anzahl der Nullstellen von $f_{\nu_a}^{\varkappa_a}$ innerhalb $|x| = R + \varepsilon$ bedeutet, $\lim\limits_{a=\infty} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} \neq 0$ ist.

Dass sogar $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} = 1$ ist, erwähnen wir ohne Beweis; es ergibt sich ähnlich wie oben Kap. II § 2 ohne neue Schwierigkeit.

Dieser Satz enthält natürlich noch nicht den Hauptsatz für $\varrho' > R$, $\varrho > R$, er gewährleistet nur *eine* Häufungsstelle auf dem Kreise. Dagegen ist zu bemerken, dass zum Beweise desselben nur $\varrho > R$, nicht $\varrho' > R$ benutzt worden ist, und wenn wir die Betrachtungen für $\varrho = R$ oben mit denen von Kap. II § 2 kombinieren, so ergibt sich der allgemeine Satz:

Ist $|x| = R$ der grösste Kreis gleichmässiger Konvergenz um 0 einer Folge $f_\nu(x)$, und ε eine beliebig kleine positive Grösse, so lässt sich eine $(\nu, \varkappa)$-Folge angeben, für die $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} = 1$ ist, wobei Φ sich auf den Kreis $|x| = R + \varepsilon$ bezieht.

Dieser Satz ist für die Anwendungen wichtig.[1] Speziell besagt er: Es gibt eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, dass sowohl die ersten wie die zweiten usw. Wurzeln von $f_{\nu_a}^{\varkappa_a}$, wenn man die Wurzeln der Grösse nach ordnet, auf $|x| = R$ eine Häufungsstelle besitzen.

Um den Beweis des Hauptsatzes zu Ende zu führen, verfahren wir wie folgt. Es sei $x_0 = R e^{i\vartheta_0}$ ein Punkt auf $|x| = R$, der für keine $(\nu, \varkappa)$-Folge ein Häufungspunkt von Nullstellen sei. Dann lässt sich um ihn ein Kreis K beschreiben, so dass innerhalb keine der Funktionen $f_\nu^\varkappa$ von gewissen ν_0 und $\varkappa_0$ ab Nullstellen besitzen. Es gibt aber eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, für die:

$$\left| a_{\varkappa_a} - a_{\varkappa_a, \nu_a} \right| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}$$

ist, bei festem δ und ε. Dies ε denken wir uns so gewählt, dass ein Stück von

---

[1] In der vorstehenden Überlegung ist folgender Satz enthalten: Bestimmt man für jede $\nu, \varkappa)$-Folge den $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \sqrt[\varkappa_a]{|a_{\varkappa_a, \nu_a}|} = \frac{1}{\rho_{\varkappa,\nu}}$ und ist ρ'' die untere Grenze aller $\rho_{\varkappa,\nu}$, so ist R gleich der kleinsten unter den drei Zahlen ρ, ρ', ρ''. Man kann diesem Satz eine allgemeinere Form geben, wenn man beachtet, dass $a_{\varkappa_a, \nu_a} \cdot \nu_a!$ der Wert der $\varkappa_a$-ten Ableitung von f_{ν_a} im Punkte 0 ist, und statt des Kreises $|x| = R$ um den Nullpunkt den entsprechenden um einen beliebigen Punkt ξ der Ebene aus $\nu_a! \left(\frac{\partial^{\varkappa_a} f_{\nu_a}}{\partial x^{\varkappa_a}}\right)_{x=\xi}$ bestimmt; es ist damit die Verallgemeinerung der CAUCHY'schen Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe für allgemeine Funktionenfolgen geleistet.

dem Kreise $|x| = R + 3\varepsilon$ noch im Innern von K verläuft, und $\varrho \geqq R + 3\varepsilon$ ist. Nun ist es, ähnlich wie in Kap. II § 1, möglich, für jede der Funktionen $\sqrt[\varkappa]{f_\nu^\varkappa}$, $\varkappa \geqq \varkappa_0$, $\nu \geqq \nu_0$ einen Zweig so zu bestimmen, dass auf diese dann der Satz von STIELTJES Anwendung findet; es folgt dann, wie a. a. O., dass jede Folge von diesen Funktionen $\sqrt[\varkappa]{f_\nu^\varkappa}$, $\varkappa \geqq \varkappa_0$, $\nu \geqq \nu_0$, die einer $(\nu, \varkappa)$-Folge entspricht, in jedem ganz im Innern von K gelegenen Gebiete gleichmässig gegen 1 konvergiert. Wir fassen speziell die Folgen $(\varkappa_\alpha, \nu_\alpha)$ und $(\varkappa_\alpha - 1, \nu_\alpha)$ ins Auge; es ist dann, wie eben gezeigt:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[\varkappa_\alpha]{\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}\right|} &< 1 + \varepsilon_0 \\ \sqrt[\varkappa_\alpha - 1]{\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha - 1}\right|} &< 1 + \varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha > \alpha(\varepsilon_0)$$

und zwar in jedem ganz im Innern von K gelegenen Gebiete, also auch für Punkte vom absoluten Betrage $R + 3\varepsilon$. Dann ist auch:

$$\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha} - f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha - 1}\right| = \left|a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha} \cdot x^{\varkappa_\alpha}\right| < 2\,(1 + \varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha} \quad \text{für } \alpha > \alpha(\varepsilon_0),\ x \text{ in } K.$$

Es ist aber $\lim\limits_{\alpha = \infty} \sqrt[\varkappa_\alpha]{|a_{\varkappa_\alpha}|} \leqq \frac{1}{\varrho}$, also für $\alpha \geqq \alpha(\delta_0)$:

$$|a_{\varkappa_\alpha}|\,\varrho^{\varkappa_\alpha} \leqq (1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha}$$

oder:

$$|a_{\varkappa_\alpha}| \leqq \frac{(1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha}}{\varrho^{\varkappa_\alpha}} \leqq \frac{(1 + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}.$$

Andrerseits ist:

$$|a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| \leqq 2 \cdot (1 + \varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha} \frac{1}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

$$|a_{\varkappa_\alpha} - a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| < \frac{1}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} \{(1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha} + 2(1 + \varepsilon)^{\varkappa_\alpha})\}$$

$$\text{für } \alpha \geqq \alpha(\delta_0)$$

$$\alpha \geqq \alpha(\varepsilon_0).$$

Da nun aber

$$|a_{\varkappa_\alpha} - a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| > \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

ist, bei festem δ und ε, so müsste sein:

$$\frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} < \frac{1}{(R+3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} \{(1+\delta_0)^{\varkappa_\alpha} + 2(1+\varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha}\}.$$

Wir wählen nun etwa

$$\varepsilon_0 = \delta_0 = \varepsilon \cdot \frac{1}{R+\varepsilon},$$

so ergäbe sich:

$$\delta < \frac{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}{(R+3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} \cdot 3 \cdot (R+2\varepsilon)^{\varkappa_\alpha} \cdot \frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

oder:

$$\delta < 3 \cdot \left(\frac{R+2\varepsilon}{R+3\varepsilon}\right)^{\varkappa_\alpha} \text{ für } \begin{matrix} \alpha \geq \alpha(\delta_0) \\ \alpha \geq \alpha(\varepsilon_0) \end{matrix}; \ \delta, \varepsilon \text{ fest.}$$

Das ist aber ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen: Für jeden Punkt des Kreises $|x| = R$ lässt sich eine $(\nu, \varkappa)$-Folge finden, deren Nullstellen ihn zum Häufungspunkt haben.

Jetzt beachte man, dass, um eine Folge der im Hauptsatz vorgesehenen Beschaffenheit zu erhalten, es offenbar genügt, nur zu verlangen, dass ihre Nullstellen alle Punkte $x = R \cdot \varepsilon_n$ zu Häufungspunkten hätten, wo ε_n eine beliebige Einheitswurzel sei. Diese aber sind abzählbar, sie seien, irgendwie mit (1), (2), ... (n), ... bezeichnet. Es gibt nun nach dem Bewiesenen eine $(\nu, \varkappa)$-Folge $(\nu, \varkappa)_1$, die unter ihrer Nullstellen beliebig nahe bei (1) belegene besitzt usw. Diese $(\nu, \varkappa)_\alpha$-Folgen denke man sich nun so ausgewählt, dass auch jede unendliche Teilfolge von $(\nu, \varkappa)_\alpha$ den Punkt (α) als Häufungsstelle ihrer Nullstellen besitzt. Dann bilde man eine neue Folge aus allen diesen zusammen, welche mit jeder von ihnen eine unendliche Teilfolge gemeinsam hat. Das geschieht etwa nach folgender Regel. Man nehme 1. $(\nu_1, \varkappa_1)_1$; 2. aus $(\nu, \varkappa)_2$ das erste Indexpaar für das $\nu > \nu_{1,1}$, $\varkappa > \varkappa_{1,1}$ ist; 3. aus $(\nu, \varkappa)_1$ das nächste nunmehr mögliche, das also genügend grosse Indices besitzt; 4. wieder das nächstpassende aus $(\nu, \varkappa)_2$; 5. aus $(\nu, \varkappa)_3$; 6. aus $(\nu, \varkappa)_1$; 7. aus $(\nu, \varkappa)_2$; 8. aus $(\nu, \varkappa)_3$; 9. aus $(\nu, \varkappa)_4$ usw. Man wendet also ein ähnliches Verfahren an wie G. Cantor beim Nachweise transzendenter Zahlen. Diese neue Folge hat dann alle gewünschten Eigenschaften, w. z. b. w.

§ 4.

Anwendungen.

In diesem allgemeineren Falle ist der Hauptsatz nicht von so unmittelbarer Anwendbarkeit wie im zweiten Kapitel. Er deckt jedoch den Grund auf, warum eine Folge wie

$$f_n = e^{x+\frac{x^2}{n}+\cdots+\frac{x^n}{n}} = 1 + x + \cdots + x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

nur im Einheitskreise konvergiert, als in der Verteilung der Nullstellen der Abschnitte gegeben und erledigt somit theoretisch vollständig die gestellte Frage. Für die Anwendung kommt er jedoch vor allem deshalb nicht leicht in Betracht, weil über die Nullstellen der Abschnitte einer Funktion, z. B. einer ganzen transzendenten Funktion oder auch eines Polynoms wenig bekannt ist. Nur die einfachsten Fälle lassen sich sofort erledigen. So, wenn eine Folge der von Herrn Pétrovitch betrachteten ganzen transzendenten Funktionen, deren Abschnitte lauter positive (oder reelle) Wurzeln haben, in einem beliebig kleinen Kreise konvergiert, so konvergiert diese Folge immer; und eben dasselbe gilt für Funktionen, deren Abschnitte lauter Wurzeln in einer Halbebene haben, wie sie Herr Pólya behandelt hat und in ähnlichen Fällen.

Dagegen ist der Satz, den die Herren Pólya und Lindwart, und sodann, unabhängig von ihnen, Verfasser über Polynomreihen aufgestellt haben,[1] nicht ohne weiteres den vorstehenden Betrachtungen zugänglich. Dieser Satz lautet: Ist für eine Folge von Polynomen gleichzeitig die Summe $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left|\frac{1}{x_{\nu,n}}\right|^p < M$, wo p und M feste positive Zahlen sind und $x_{\nu,n}$ die Wurzeln von $P_n(x)$ bedeuten und konvergiert diese Reihe in einem beliebig kleinen Gebiete, so konvergiert sie immer (und stellt eine Funktion von endlichem Geschlecht $\varrho \leqq p$ dar). Die Voraussetzung über die Konvergenz in einem beliebig kleinen Gebiete kann (nach Vitali) durch die andere ersetzt werden, dass Konvergenz in unendlich vielen Punkten mit einem Häufungspunkt im Endlichen statthabe. Um diesen Satz, dessen direkter Beweis nicht sonderlich umständlich ist, mit dem in Vorstehenden entwickelten Tatsachen in Zusammenhang zu bringen, bedarf es einer längeren Überlegung, deren Resultat zwar eigentlich ins Gebiet der Algebra gehört, aber wie es scheint (ausser im Falle $p = 1$) durch die Methoden der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen, allerdings die einfachsten, leichter gewonnen

[1] Vgl. die S. 233 angegebenen Arbeiten.

wird.[1] Die dazu nötigen Hilfsmittel sind sämtlich in der Dissertation des Herrn LINDWART enthalten, der sie jedoch unter einem ganz anderen Gesichtspunkte verwendet. Es möge genügen, den wichtigsten hierhergehörigen Satz ohne Beweis anzuführen, der den erwähnten Satz mit den hier entwickelten verknüpft.

Ist $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_n x^n = 0$ eine algebraische Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_n$, und für diese $\sum_1^n \left|\frac{1}{x_\nu}\right|^p < M$, so sind für alle Abschnitte

$$P_{p+\nu} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_{p+\nu-1} x^{p+\nu-1}$$

$$\nu = 2, 3, \ldots n + 1 - p$$

(und überhaupt für alle Abschnitte), die Summen $\sum_{\nu=1}^{\nu=a} \left|\frac{1}{x_{\nu,a}}\right|^{p+\varepsilon}$, wo $x_{\nu,a}$ die Wurzeln von $P_a(x) = 0$ bedeuten, unterhalb einer nur von $\varepsilon, a_0, \ldots a_{p-1}, M$ (nicht von $a_p, \ldots a_n, n$) abhängigen Grösse A gelegen, für jedes $\varepsilon > 0$.

[1] Vgl. namentlich Kapitel III der Dissertation von LINDWART; in § 2 wird daselbst auch ein algebraischer Beweis des wichtigsten hier in Betracht kommenden Hilfssatzes gegeben.

Inhaltsverzeichnis.