

FORTGESETZTE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ABSCHNITTE VON POTENZREIHEN.

VON

ROBERT JENTZSCH

in BERLIN.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	S. 253
I. Abschnitt: Über die Nullstellen der Abschnitte von Potenzreihen.	
§ 1. Elementare algebraische Betrachtungen	» 255
§ 2. Über die Nullstellen der Abschnittsfolgen	» 260
II. Abschnitt: Über die Konvergenz der Abschnittsfolgen von Potenzreihen.	
§ 1. Über die Abschnitte von Potenzreihen mit dem Konvergenzradius ρ	» 263
§ 2. Über die Konvergenz von Abschnittsfolgen von Potenzreihen	» 265
§ 3. Ein weiteres Beispiel	» 267

Einleitung.

In meiner Inaugural-Dissertation: »Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen«¹ habe ich folgenden Satz ausgesprochen und bewiesen:

Jeder Punkt des Konvergenzkreises einer Potenzreihe ist Häufungspunkt für Nullstellen ihrer Abschnitte.

Liegen daher die Nullstellen der Abschnitte einer Potenzreihe $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ sämtlich auf einer im Endlichen verlaufenden, den Anfangspunkt o einfach umschließenden Kurve C , so erfüllen sie entweder die Kurve nicht dicht; dann reduziert sich die Potenzreihe auf ein Polynom; oder jeder Punkt der Kurve ist Häufungs-

¹ Berlin 1914.

punkt der Nullstellen und dann ist die Kurve ein Kreis, der Konvergenzkreis der Reihe.

Im ersten Falle hat nämlich nach dem erwähnten Satze die Reihe zunächst den Konvergenzradius ∞ , und die durch sie dargestellte ganze Funktion $f(x)$ nur endlich viele Nullstellen x_v auf C ; die Nullstellen der Abschnitte mithin nur endlich viele Häufungsstellen, nämlich diese Nullstellen von $f(x)$, deren Zahl, unter Berücksichtigung der Vielfachheit N sei. Wäre daher $f(x)$ kein Polynom, so hätten in der Nähe mindestens eines Punktes x_v unendlich viele Abschnitte mehr als N Wurzeln, $f(x)$ müsste daher von höherer als N -ter Ordnung verschwinden.

Im zweiten Falle hat die Reihe endlichen Konvergenzradius R und $|x| = R$ ist ganz von Nullstellen der Abschnitte, bzw. deren Häufungsstellen bedeckt, dieser Kreis muss also ein Teil von C sein; weil C aber den Nullpunkt einfach umschlingt, muss C mit diesem Kreise identisch sein.

Es ergibt sich die Aufgabe, alle Potenzreihen zu bestimmen, deren Abschnitte sämtliche Wurzeln auf dem Konvergenzkreise haben. Wählen wir $R = 1$, so zeigt sich, dass im wesentlichen die Reihe

$$1 + x + x^2 + \dots$$

die einzige ist, die sich dieser Eigenschaft erfreut; lässt man Nullstellen der Abschnitte ausser auf $|x| = 1$ auch im Unendlichen zu, so wird man, im wesentlichen, auf die Reihen:

$$1 + x^k + x^{2k} + \dots + x^{vk} + \dots \quad (v = 1, 2, \dots)$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet, geführt. Wir zeigen dies in § 1 durch eine elementare algebraische Betrachtung.

Ausser in den bezeichneten Fällen gibt es also Nullstellen, die nicht auf dem Konvergenzkreis liegen. Es kann vorkommen, dass sie sämtlich innerhalb oder sämtlich ausserhalb desselben liegen; im allgemeinen werden sie sich auch im Unendlichen häufen (§ 1 Ende).

Nun sind durch jede Potenzreihe unendlich viele Abschnittsfolgen gegeben, deren jede gleichfalls innerhalb des Konvergenzkreises gleichmässig konvergiert. Es ist von Interesse, auch die Nullstellen der Abschnitte einer bestimmten unendlichen Folge ins Auge zu fassen. Es kann aber vorkommen, dass die Nullstellen einer solchen Folge sich nur im Unendlichen häufen, während die Potenzreihe einen endlichen Konvergenzradius hat. Trotzdem lassen sich manche Beziehungen angeben zwischen den Nullstellen der Abschnitte einer Folge und denen gewisser anderen unendlichen Folgen. Betrachten wir etwa einen Winkelraum aus 0:

$$x = r e^{i\phi} \quad 0 < \phi < 2\alpha$$

und liegen die Häufungspunkte der in ihm belegenen Nullstellen der Folge $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots)$ im Unendlichen, so gilt dasselbe für alle »vorangehenden« Folgen $(\nu_1 - m, \nu_2 - m, \dots, \nu_k - m, \dots)$, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Diese und ähnliche Sätze enthält § 2.

Man könnte nun vermuten, dass wenigstens die 0 und 1 Stellen der Abschnitte jeder unendlichen Folge auf dem ganzen Konvergenzkreis dicht gelegene Häufungsstellen haben, das trifft aber aus dem folgenden merkwürdigen Grunde nicht zu: Es kann vorkommen, dass gewisse unendliche Abschnittfolgen auch ausserhalb des Konvergenzkreises noch gleichmässig konvergieren, — und so die analytische Fortsetzung der durch die Reihe dargestellten Funktion ausserhalb des Kreises liefern. Diese, wie es scheint, bisher gar nicht beachtete Tatsache, wird im II. Abschnitt § 2, 3 durch Beispiele deutlich gemacht, die wir auf ganz elementarem Wege, allerdings mit Benutzung des VITALI'schen Satzes, gewinnen.

Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0, von denen gewisse unendliche Abschnittfolgen in einem den Nullpunkt nicht enthaltenen Gebiete konvergieren, hat unlängst Herr KAKEYA¹ konstruiert; wir stellen seine Methode, ein wenig kürzer, in II, § 1, dar, und gewinnen durch eine leichte Verallgemeinerung folgenden Satz, der aufs deutlichste zeigt, dass es sich bei diesen Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0 und bei den sodann behandelten mit endlichem Konvergenzkreis um wesentlich verschiedene Verhältnisse handelt.

Sind endlich oder abzählbar unendlich viele, den Nullpunkt nicht enthaltende Gebiete G_1, G_2, \dots und in diesen je endlich (oder abzählbar unendlich viele) reguläre Funktionen $f_{11} \dots f_{1k_1}, f_{21} \dots f_{2k_2}, \dots$ gegeben, so lassen sich Potenzreihen (mit im allgemeinen verschwindendem Konvergenzradius) angeben, von denen gewisse unendliche Abschnittfolgen in G_ν (gleichmässig in jedem in G_ν gelegenen inneren Gebiete) gegen $f_{\nu,k}$ konvergieren ($\nu = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \nu_k$).

I. Abschnitt: Über die Nullstellen der Abschnitte von Potenzreihen.

§ 1. Elementare algebraische Betrachtungen.

Die Potenzreihe $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ hat die Eigentümlichkeit, dass die Nullstellen ihrer sämtlichen Abschnitte auf dem Einheitskreise liegen; es fragt

¹ KAKEYA, On some applications of a Theorem about polynomial sequences. The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 5, Nr 1, 2. Cf. die im selben Heft enthaltene Note von J. PÁL. (1914.)

sich, ob noch andere Potenzreihen ausser den durch eine Substitution $x' = e^{i\theta} x$ aus der angegebenen hervorgehenden dieselbe Eigenschaft besitzen. Um nachzuweisen, dass diese Frage zu verneinen ist, kann man sich einer ganz elementaren algebraischen Betrachtung bedienen, die vielleicht auch sonst nicht ganz ohne Interesse ist.

Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ein Polynom n -ten Grades, so lässt sich dessen absoluter Betrag auf dem Einheitskreise bekanntlich schreiben:

$$\begin{aligned}
 |P_n(x)|^2 &= (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \left(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{1}{x} + \dots + \bar{a}_n \frac{1}{x^n} \right) \\
 &= P_n(x) \cdot \bar{P}_n \left(\frac{1}{x} \right) \\
 (1) \quad &= \frac{1}{x^n} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) (\bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_n) \\
 &= \frac{1}{x^n} P_n(x) \cdot Q_n(x) = \frac{1}{x^n} R_{2n}(x).
 \end{aligned}$$

Wenn nun die Nullstelle x_1 einer Gleichung:

$$(2) \quad P_n(x) = \alpha$$

auf dem Einheitskreise liegt, so hat die Gleichung $2n$ -ten Grades:

$$(3) \quad R_{2n}(x) - |\alpha|^2 x^n = 0$$

ebenfalls die Wurzel x_1 in mindestens demselben Vielfachheitsgrade auf dem Einheitskreise.

Daraus folgt: Falls sich (3) nicht auf eine Identität reduziert, gibt es höchstens $2n$ Punkte auf dem Einheitskreise, für die das Polynom $P_n(x)$ gleichen absoluten Betrag hat. (3) ist aber nur dann eine Identität, wenn $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ ist; $P_n(x)$ also aus dem einen Gliede $a_n x^n$; $|a_n| = |\alpha|$ besteht.

Es ist auch klar, wie sich diese (bekannten) Überlegungen, statt für den Einheitskreis für Kurven durchführen lassen, die durch eine Gleichung $\bar{x} = Q(x)$ oder, wenn man die einfachsten Sätze über Elimination benutzt, durch eine Gleichung $Q(x, \bar{x}) = 0$ gegeben sind, wo die Q rationale Funktionen bedeuten.

Aus dem Vorstehenden folgt speziell, dass es höchstens 2 Zahlen α, β von gleichem absolutem Betrage geben kann, sodass $P_n(x) = \alpha$ und $P_n(x) = \beta$ sämtliche Nullstellen auf den Einheitskreise haben. Es soll gezeigt werden, dass es im allgemeinen auch nicht zwei derartige Zahlen geben kann; es soll also bewie-

sen werden: Hat eine Gleichung $P_n(x) = \alpha$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so hat jede andere Gleichung $P_n(x) = \beta$; $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$ mindestens eine Wurzel, die nicht auf dem Einheitskreise liegt, sofern nicht $P_n(x)$ sich auf $a_n x^n$ reduziert, $|a_n| = |\alpha| = |\beta|$.

Auch dieser Satz ist fast trivial; gibt es nämlich 2 Zahlen α ; β ; $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$, sodass $(P_n(x) - \alpha)(P_n(x) - \beta) = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise hat, so ist:

$$|a_0 - \alpha| = |a_0 - \beta| = |a_n|$$

und

$$\begin{aligned} |P_n(x) - a_0|^2 &= (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \left(\bar{a}_1 \frac{1}{x} + \bar{a}_2 \frac{1}{x^2} + \dots + \bar{a}_n \frac{1}{x^n} \right) \\ &= (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}) (\bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_n) \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \end{aligned}$$

für $|x| = 1$, und daher hätte die Gleichung $(2n - 2)$ -ten Grades

$$(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}) (\bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_n) - |a_n|^2 x^{n-1} = 0$$

$2n$ Wurzeln auf dem Einheitskreise, was ausgeschlossen ist, sofern sie sich nicht auf die Identität reduziert. Damit ist der Beweis fertig.

Anwendungen. Es sei eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

vorgelegt, deren sämtliche Abschnitte all ihre Nullstellen auf dem Einheitskreise haben; man darf annehmen $a_0 = a_1 = 1$. Es soll gezeigt werden, dass dann auch $a_n = 1$ ist. Dies sei für $n \leq \nu$ bewiesen, die Gleichung:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^\nu + a_{\nu+1} x^{\nu+1} = 0$$

hat dann all ihre Nullstellen auf dem Einheitskreise, ebenso:

$$x^{\nu+1} + x^\nu + \dots + x + a_{\nu+1} = 0$$

aber auch:

$$x^{\nu+1} + x^\nu + \dots + x + 1 = 0.$$

Da $|a_{\nu+1}| = 1$ ist, genügt die Anwendung des zuletzt ausgesprochenen Satzes, um einzusehen, dass $a_{\nu+1} = 1$ sein muss.

Etwas allgemeiner ist folgende Frage: Welche Potenzreihen haben als Nullstellen ihrer Abschnitte nur auf dem Einheitskreis und im Unendlichen gelegene Punkte? Es sei:

$$1 + x^\nu + a_{\nu+1} x^{\nu+1} + \dots$$

eine solche; wir behaupten, es ist dann $a_n = 0$ für $n \neq k \cdot \nu$; $a_{k \cdot \nu} = 1$, wo k eine beliebige positive Zahl bedeute. Dies sei bewiesen für $k \leq m$, die Potenzreihe laute also:

$$1 + x^\nu + x^{2\nu} + \dots + x^{m\nu} + a_\lambda x^\lambda + \dots$$

Der Abschnitt: $1 + x^\nu + x^{2\nu} + \dots + x^{m\nu} + a_\lambda x^\lambda$ hat alle Nullstellen auf dem Einheitskreis, ebenso das Polynom:

$$x^\lambda + x^{\lambda-\nu} + x^{\lambda-2\nu} + \dots + x^{\lambda-m\nu} + a_\lambda = P_\lambda(x) + a_\lambda.$$

Daher ist $|a_\lambda| = 1$ und a_λ reell, da sonst das Polynom $P_\lambda(x) + \bar{a}_\lambda$ ebenfalls alle Nullstellen auf dem Einheitskreise, P_λ also in 2λ Punkten auf dem Einheitskreise den gleichen absoluten Betrag 1 hätte.

Es sei jetzt ϱ eine primitive ν -te Einheitswurzel; seien x_1, x_2, \dots die Wurzeln von $P_\lambda(x) = -a_\lambda$, so sind $\varrho x_1, \varrho x_2, \dots$ die Wurzeln von $P_\lambda(x) = -a_\lambda \varrho^\lambda$, also Stellen, wo $P_\lambda(x)$ gleichfalls den absoluten Betrag 1 hat, die sämtlich auf dem Einheitskreise liegen. Nach unserem Hilfssatz muss also sein: $a_\lambda = a_\lambda \cdot \varrho^\lambda$

$$\varrho^\lambda = 1;$$

es ist also λ durch ν teilbar, $\lambda = n\nu$.

Das Polynom: $1 + x + x^2 + \dots + x^m + a_\lambda x^n = P(x)$, wo $a_\lambda = \pm 1$, hat gleichfalls alle Nullstellen auf dem Einheitskreise, mit x_ν ist auch $\bar{x}_\nu = \frac{1}{x_\nu}$ Nullstelle von gleichem Vielfachheitsgrad. $P(1)$ verschwindet nicht, $P(-1)$ höchstens von erster Ordnung, denn sonst müsste $P(1) = 0$ sein, was für $n > m$ ausgeschlossen ist. Mithin ist $P(x)$ eine reziproke Gleichung $n = m + 1$; $a_\lambda = 1$. W. z. b. w.

Herr Prof. FROBENIUS hat erheblich einfachere Beweise der beiden eben dargelegten Sätze bemerkt, welche ich, mit seiner gütigen Erlaubnis, hier einfüge. Prof. FROBENIUS schliesst folgendermassen: liegen die Nullstellen von $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ alle auf dem Einheitskreise, so ist:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$$\bar{P}(x) = \bar{a}_0(1 - x x_1)(1 - x x_2) \dots (1 - x x_n), \text{ weil } \bar{x}_\nu = \frac{1}{x_\nu} \text{ ist,}$$

$$\text{mithin: } \frac{\bar{P}(x)}{\bar{a}_0} = \frac{1}{a_n} x^n P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\text{folglich: } \frac{\bar{a}_\mu}{\bar{a}_0} = \frac{1}{a_n} \cdot a_{n-\mu}.$$

Hat also eine Gleichung $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + a_n x^n = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so folgt sofort $a_n \neq 0$ und dann $a_n = 1$. Hat ferner eine Gleichung $1 + x^\nu + x^{2\nu} + \dots + x^{n\nu} + a_k x^k = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so folgt entsprechend

$$a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_{k-\nu+1} = 0$$

$$a_{k-\nu} \neq 0$$

und daher ist $k = (n + 1)\nu$. Ferner ist:

$$\frac{\bar{a}_\nu}{\bar{a}_0} = \frac{1}{a_k} a_{k-\nu}$$

also, weil $\bar{a}_0 = \bar{a}_\nu = a_{k-\nu} = 1$ ist, $a_k = 1$. W. z. b. w.

Hat die durch die Reihe dargestellte Funktion auf dem Einheitskreise nur einen Pol, so liegen keine Häufungsstellen der Nullstellen ausserhalb des Einheitskreises. (Diss. S. 21—23.)¹

Es ist aber auch leicht, weitergehende Klassen von Reihen anzugeben, bei denen alle Nullstellen der Abschnitte innerhalb (bzw. ausserhalb) des Konvergenzkreises liegen.

Nach einem bekannten algebraischen Satze von КАКЕЛЫА liegen nämlich die Nullstellen eines Polynoms:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

dessen Koeffizienten sämtlich reell sind und der Bedingung:

$$0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$$

genügen, sämtlich innerhalb des Einheitskreises. Eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1 hat also alle Nullstellen ihrer Abschnitte innerhalb, bzw. ausserhalb des Konvergenzkreises, wenn ihrer Koeffizienten alle positiv sind und der Bedingung $a_{n-1} < a_n$ bzw. $a_{n-1} > a_n$ genügen.² Hierher gehört z. B. die Potenzentwicklung von $-\log(1-x)$.

¹ Der dort angegebene Beweis lässt sich leicht auf folgende Behauptung ausdehnen: Hat $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$ auf dem Einheitskreise nur Pole, ist also $f(x) = R(x) + \sum b_\nu x^\nu$, wo $R(x)$ eine rationale Funktion ist und $\sum b_\nu x^\nu$ einen grösseren Konvergenzradius hat wie $\sum a_\nu x^\nu$, so hat für gehörig grosse n der n -ten Abschnitt der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ in jedem Kreis $|x| = R + \epsilon$ (ϵ bel. klein) ebenso viele Wurzeln wie der entsprechende Abschnitt der Entwicklung von $R(x)$.

² Es sind das diejenigen speziellen Reihen, für die die Herren PÓLYA und LINDWART den eingangs erwähnten allgemeinen Satz meiner Diss. zuerst bewiesen haben.

Aus einem Satze des folgenden § 2 geht hervor, dass die Nullstellen einer unendlichen Folge von Abschnitten für sich die ganze Peripherie $|x| = 1$ mit Häufungspunkten erfüllen, wenn die Nullstellen alle innerhalb des Einheitskreises liegen, also speziell bei den zuletzt erwähnten Reihen.

§ 2. *Über die Nullstellen der Abschnittfolgen.*

Es lassen sich immer ganze transzendente Funktionen ohne Nullstellen angeben, deren Potenzreihe beliebig vorgegebene Anfangskoeffizienten hat. Denn es seien etwa in $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ $a_0, a_1, \dots, a_n, |a_0| \neq 0$, vorgegeben, gesucht wird eine ganze Funktion $g(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n$, sodass $e^{g(x)} = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ wird. Die Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_n , sind dann durch die Gleichungen

$$(I) \quad \begin{aligned} e^{b_0} &= a_0, \\ b_1 e^{b_0} &= a_1, \\ &\dots \dots \dots \\ b_n e^{b_0} + \Phi(b_0, \dots, b_{n-1}) &= a_n \end{aligned}$$

bestimmt; b_{n+1}, \dots bleiben willkürlich. Sei danach ein Polynom n_1 -ten Grades $P_{n_1}(x)$ gegeben, das keine Nullstellen ≤ 1 hat, so lässt sich demnach eine ganze Funktion ohne Nullstellen mit den Anfangsgliedern $P_{n_1}(x) + x^{n_1+1}$ bilden; daher auch ein Polynom P_{n_2} ($n_2 > n_1 + 1$), das für $|x| \leq 2$ keine Nullstellen hat; dann benutzt man $P_{n_2} + x^{n_2+1}$ und bildet fortlaufend entsprechende ganze Funktionen und Polynome. Die so erhaltene Potenzreihe, deren Abschnitte P_{n_1}, P_{n_2}, \dots keine Häufungsstelle von Nullstellen im Endlichen besitzen, hat jedenfalls einen Konvergenzradius < 1 , der aber vielleicht 0 ist.

Um das zu vermeiden, verfahren wir etwa folgendermassen. Die Form der Gleichungen (I) zeigt, dass bei positiven b_n , die dann gleichfalls positiven a_n monoton mit den b_n wachsen. Betrachtet man nun etwa $e^{x + \frac{x^2}{2}}$, so sind die Koeffizienten der entsprechenden Potenzreihe sämtlich positiv und ≤ 1 , denn es ist:

$$e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots} = 1 + x + x^2 + \dots \quad \text{für } |x| < 1,$$

man gehe bis zu $a_{n_2} x^{n_2}$, so dass $1 + x + x^2 + \dots + a_{n_2} x^{n_2}$ keine Nullstellen < 2 hat. In der Entwicklung der Funktion $e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}}$ gilt über die Koeffizienten

das Gleiche, aber der Koeffizient von x^{n_2+1} ist grösser als $\frac{1}{n_2+1}$, während die Koeffizienten bis $a_{n_2}x^{n_2}$ dieselben bleiben. Man sieht, wie die Methode weiter verläuft. Man kann schrittweise eine Indexfolge n_2, n_3, \dots konstruieren, sodass in der Entwicklung der Funktion $e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} + \frac{x^{n_3+1}}{n_3+1} + \dots$ Abschnitte auftreten, deren Nullstellen bezw. ausserhalb der Kreise $|x|=2, 3, \dots$ um den Nullpunkt liegen, und der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1.¹

Es sei nun eine beliebige Potenzreihe gegeben:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \right).$$

Eine unendliche Folge ihrer Abschnitte bezeichnen wir mit (ν_1, ν_2, \dots) , verstehen darunter also die Folge der Abschnitte:

$$P_{\nu_k}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{\nu_k} x^{\nu_k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Durch das eben beregte Beispiel ist also gezeigt: die Nullstellen einer Abschnittsfolge brauchen keinen Häufungspunkt im Endlichen zu haben, auch wenn der Konvergenzkreis ein endlicher ist.

Dennoch bestehen zwischen den verschiedenen unendlichen Folgen (die im Innern des Konvergenzkreises sämtlich gleichmässig gegen dieselbe Funktion konvergieren) jedenfalls gewisse Zusammenhänge. Einige davon, die sich auf Funktionen von endlichem Geschlecht beziehen, gehen aus den Sätzen von PÓLYA über Polynomreihen, sowie aus den am Schluss meiner Dissertation angedeuteten algebraischen Sätzen hervor, sie sind aber sehr speziell.

Nehmen wir nun an, dass die Folge $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots)$ in dem unendlichen Winkelraum: $x = r e^{i\phi}$ $0 \leq r < \infty$, $0 < \phi < 2\alpha$ keine Häufungsstelle von Nullstellen, die im Endlichen gelegen ist, habe, so lassen sich unter dieser Voraussetzung folgende Sätze beweisen:

1. Es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} = 0$.

2. Auch jede der Folgen $(\nu_1 - l, \nu_2 - l, \nu_3 - l, \dots, \nu_k - l, \dots)$, wo l eine ganze Zahl bedeutet, hat dieselbe Eigenschaft.

¹ Die Funktionen $f_\nu(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = \frac{1}{1-x}$ habe ich schon Diss. S. 32 in ähnlichem Zusammenhange betrachtet, bin aber damals nicht bis zu diesem Resultat gelangt. Man kann es einrichten, dass $|x|=1$ natürliche Grenze wird, indem man noch $n_\nu > n_{\nu-1} + \nu$ wählt dann wird nämlich $\lim_{\nu \rightarrow \infty} n_\nu - n_{\nu-1} = \infty$ (Satz von HADAMARD-FABRY).

Zum Beweise benutzen wir folgenden Hilfssatz der Diss. (S. 14—16).¹ Falls $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \dots, P_{\nu_k}, \dots$ auf einem Bogen des Konvergenzkreises keine Häufungsstellen von Nullstellen haben, ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{P_{\nu_k}(x)}$ bei passender Fixierung der Funktionszweige, gleichmässig in jedem Gebiete gleich 1, das mit einem endlichen Stück an diesen Bogen stösst und in dem keine Häufungspunkte von Nullstellen dieser Abschnitte im Innern oder auf dem Rande liegen. Daraus folgt in unserem Falle:

Es ist: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{P_{\nu_k}(x)} = 1$ gleichmässig für jedes endliche im Winkelraum gelegene innere Gebiet. Für $x = r e^{i\alpha}$ ist aber:

$$P_{\nu_k}(x) = a_{\nu_k} (x - x_{\nu_k, 1}) (x - x_{\nu_k, 2}) \dots (x - x_{\nu_k, \nu_k}),$$

$$|P_{\nu_k}(x)| \geq |a_{\nu_k}| (r \sin \alpha)^{\nu_k},$$

$$\sqrt[k]{|P_{\nu_k}(x)|} \geq r \sin \alpha \sqrt[k]{|a_{\nu_k}|}.$$

Da α endlich $\neq 0$ ist, r aber beliebig gross gewählt werden darf, der $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{P_{\nu_k}(x)}$ jedoch 1 ist, folgt die Behauptung 1. Beh. 2. ist eine Folge der gleichmässigen Konvergenz. Habe nämlich die Folge $(\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \dots, \nu_k - 1, \dots)$ eine Häufungsstelle ξ von Nullpunkten innerhalb des Winkelraumes, und seien die entsprechenden Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ so ist auch:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{P_{\nu_k}(\xi_k)} = 1$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{\nu_k}|} |\xi_k| = 1,$$

$$|\xi| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{\nu_k}|} = 1,$$

was nach 1 ausgeschlossen ist. Durch Fortsetzung dieses Schlusses folgt 2.

Betrachtet man jetzt eine unendliche Folge, die Häufungsstellen von Nullstellen in dem Winkelraum im Endlichen besitzt: $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots)$, und solche gibt es, so geht aus 2. hervor, dass auch für die »nach rechts benachbarten« Folgen $(\mu_1 + l, \mu_2 + l, \dots)$ (l ganz, positiv) dasselbe zutrifft. Betrachtet man die rechte benachbarte Folge einer ν -Folge, so hat diese in dem Winkelraum nur

¹ Er ist dort nicht besonders formuliert, doch ist sein Beweis dort vollständig entwickelt.

Häufungspunkte ξ von Nullstellen, die der Bedingung $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[\nu'_k + 1]{|a_{\nu'_k + 1}|} |\xi| = 1$ genügen,¹ und ähnlicher Sätze liessen sich noch mehrere anführen.

Bei alledem ist durchaus massgebend, dass in der Menge der (nicht abzählbar unendlich vielen) Folgen durch die Beziehung: eine Folge soll vor einer anderen vorangehen, wenn für sie selbst oder die durch Wiederholung von Abschnitten aus ihr hervorgehenden Folgen der Grad des k -ten Abschnitts der ersten kleiner ist als der des k -ten Abschnitts der zweiten die Menge nicht geordnet wird.

Nun liegt es nahe, gemäss dem nach den Untersuchungen von LANDAU und CARATHÉODORY² gültigen Satz, die 0- und 1-Stellen der Abschnitte einer Folge zu betrachten. Hier aber stösst man auf die merkwürdige Tatsache, dass dieser Satz hier nicht anwendbar ist, weil gewisse Abschnittfolgen auch ausserhalb des Konvergenzkreises konvergieren können.

Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit behandeln wir diese Erscheinung, indem wir sehr weit reichende Beispiele direkt konstruieren. Der Weg, etwa Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1 zu bilden, von denen unendlich viele Abschnitte etwa für $R(x) > 0$ keine 0- und 1-Stellen haben, unter Benutzung der Bedingungen für den Variabilitätsbereich der Koeffizienten solcher Abschnitte, scheint schwer gangbar zu sein; andererseits werfen unsere Beispiele ein gewisses Licht auf diese Ungleichheitsbedingungen.³

II. Abschnitt: Über die Konvergenz der Abschnittfolgen von Potenzreihen.

§ 1. Über die Abschnitte von Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0.

Wir schicken der hier eigentlich wichtigen Frage über Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius Einiges über solche mit dem Konvergenzradius 0 voraus, da dieser unlängst Gegenstand einer interessanten Arbeit von S. KAKEYA gewesen sind, deren Inhalt wir, ihn verallgemeinernd, kurz, wie folgt, darlegen.

Es sei ein den Nullpunkt nicht enthaltendes, endliches, ganz in $|x| \leq R$ gelegenes Gebiet G gegeben und in ihm eine analytische Funktion $f(x)$; G werde

¹ $(\nu'_k + 1)$ sei die Teilfolge von $(\nu_k + 1)$, die den betreffenden Punkt liefert.

² Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. S. B. Berlin 1911. P. 587—613.

³ Vergl. dafür ausser den Arbeiten von CARATHÉODORY, TOEPLITZ, J. SCHUR und FROBENIUS besonders die unlängst erschienene Arbeit von G. PICK: Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. Math. Ann. Bd. 77. (1915).

durch G_1, G_2, \dots so approximiert, dass $G_{n+1} G_n$ enthält, und jeder Punkt von G in einem G_ν vorkommt. Es sei P_{n_1} ein Polynom, so dass:

$$|f(z) - P_{n_1}(z)| < \epsilon \text{ für } G_1 \text{ ist.}$$

Ferner:

$$\left| \frac{f(z) - P_{n_1}(z)}{z^{n_1+1}} - P_{n_2} \right| < \frac{\epsilon}{2R_1^{n_1+1}} \text{ für } G_2,$$

$$\left| \frac{f(z) - P_{n_1}(z) - P_{n_2}(z)z^{n_1+1}}{z^{n_1+n_2+2}} - P_{n_3} \right| < \frac{\epsilon}{3R_1^{n_1+n_2+2}} \text{ für } G_3$$

usw. Solche Polynome gibt es, da $z=0$ nicht in G liegt. Die Potenzreihe $P_{n_1} + z^{n_1+1}P_{n_2} + z^{n_1+n_2+2}P_{n_3} + \dots$ hat dann die Eigenschaft, dass eine gewisse ihrer Abschnittsfolgen für jedes innere Gebiet von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergiert. Es ist nämlich z. B. für G_1 :

$$|f - P_{n_1}| < \epsilon,$$

$$|f - P_{n_1} - z^{n_1+1}P_{n_2}| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|f - P_{n_1} - z^{n_1+1}P_{n_2} - z^{n_1+n_2+2}P_{n_3}| < \frac{\epsilon}{3} \text{ u. s. f.}$$

Augenscheinlich kommt man bei dieser Konstruktion auf Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0, falls man annimmt, dass der Nullpunkt auf der Grenze von G liegt und ein singulärer Punkt für f ist. In anderen Fällen wird man nichts über den Konvergenzradius aussagen können.¹

Es seien jetzt abzählbar unendlich viele im Endlichen liegende, den Nullpunkt nicht enthaltende Gebiete und Funktionen darin gegeben²

$$G_1: f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1\nu_1}, \dots, g_1 \text{ ganz in } |x| \leq R_1 \text{ gelegen,}$$

$$G_2: f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2\nu_2}, \dots, g_2 \text{ ganz in } |x| \leq R_2 \text{ gelegen}$$

usw. Man sucht P_{n_1} so, dass:

$$|f_{11} - P_{n_1}| < \epsilon \text{ ist in } G_1,$$

sodann P_{n_2}, P_{n_3}, \dots dass:

$$\left| \frac{f_{12} - P_{n_1}}{z^{n_1+1}} - P_{n_2} \right| < \frac{\epsilon}{2R_1^{n_1+1}} \text{ ist in } G_1,$$

¹ Die Konstruktion bei Kakeya ist ein klein wenig anders, sodass er immer den Konvergenzradius 0 erhält.

² Die Funktionen seien auch auf den Rändern noch regulär, sonst müsste man die Gebiete auch erst, wie oben, approximieren.

$$\left| \frac{f_{21} - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2} - P_{n_3}}{z^{n_1+n_2+2}} \right| < \frac{1}{3} \frac{1}{R_2^{n_1+n_2+1}} \text{ in } g_2,$$

$$\left| \frac{f_{11} - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2} - z^{n_1+n_2+2} P_{n_3} - P_{n_4}}{z^{n_1+n_2+n_3+3}} \right| < \frac{1}{4} \frac{1}{R_1^{n_1+n_2+n_3+3}} \text{ in } g_1$$

usw.; nach dem bekannten Diagonalverfahren Gebiete und Funktionen abwechseln lassend und immer wieder von vorne beginnend erhält man eine Potenzreihe, die jede der Funktionen in dem entsprechenden Gebiet mit einer bestimmten Abschnittsfolge gleichmässig approximiert. Damit ist der Satz, der am Ende der Einleitung angegeben ist, bewiesen.¹

§ 2. Über die Konvergenz von Abschnittsfolgen von Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreise ausserhalb desselben.

Wir gehen nunmehr dazu über, die angekündigten Beispiele zu entwickeln. Sie sind so gehalten, dass selbst eine zahlenmässige Konstruktion solcher Reihen möglich wäre.

Die absoluten Beträge der Funktionen

$$f_\nu(x) = x^\nu \cdot e^{-\nu(x+1)} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

liegen in dem aus dem Halbkreis $|x| \leq 1$, $\Re(x) \leq 0$ und dem Streifen $\Re(x) \geq 0$, $|\Im(x)| \leq 1$ zusammengesetzten Gebiete G_1 unterhalb 1. Wird $x = u + iv$ gesetzt, so ist nämlich zunächst für $|x| \leq 1$:

$$|f_\nu(x)| \leq e^{-\nu(u+1)} \leq 1, \text{ da } u \geq -1 \text{ ist,}$$

für $|v| \leq 1$, $u \geq 0$ ist

$$|f_\nu(x)| = (u^2 + v^2)^\nu e^{-\nu(u+1)} \leq (u^2 + 1)^\nu e^{-\nu(u+1)} \\ \leq (u + 1)^\nu e^{-\nu(u+1)} < 1.$$

Setzt man:

$$f_\nu(x) = e^{-\nu} x^\nu + a_{\nu+1}^{(\nu)} x^{\nu+1} + a_{\nu+2}^{(\nu)} x^{\nu+2} + \dots \quad \nu = 1, 2, \dots$$

so sind alle Koeffizienten dieser Potenzreihe kleiner als 1.

Ich betrachte jetzt ein Gebiet G , gebildet aus dem erwähnten Halbkreis und einem endlichen Stücke des Streifens, etwa den Rechteck $0 \leq \Re(x) \leq 10$,

¹ Vgl. P. MONTEL, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910, für eine ähnliche Verallgemeinerung.

$|\Im(x)| \leq 1$. Es sei P_{ν_1} ein Abschnitt der Potenzreihe für $f_1(x)$ von der Beschaffenheit, dass:

$$|f_1 - P_{\nu_1}| < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

sei in G . Ebenda ist dann, da G ein Teil von G_1 ist:

$$|P_{\nu_1}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

P_{ν_1} habe den Grad ν_1 ; da die f_ν ganze transzendente Funktionen sind, ist die Bestimmung der P_{ν_1} usw. möglich, ein wie grosser Teil des Streifens auch gewählt werde. Ferner sei P_{ν_2} so bestimmt, dass:

$$\left| \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 f_{\nu_1+1} - P_{\nu_2} \right| < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ ist in } G.$$

Dann ist ebenda:

$$|P_{\nu_2}| < \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2,$$

ν_2 sei der Grad von P_{ν_2} . Dann sucht man P_{ν_3} so, dass:

$$\left| \left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2 f_{\nu_2+1} - P_{\nu_3} \right| < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ ist in } G, \text{ usw.}$$

Betrachtet man jetzt die Reihe $P_{\nu_1} + P_{\nu_2} + P_{\nu_3} + \dots$, so ist das eine Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu$, denn es ist $\nu_2 \geq \nu_1 + 1$ gemäss dem Vorhergehenden, da die Entwicklung von f_{ν_1+1} mit der Potenz x^{ν_1+1} erst beginnt.

Die Koeffizienten dieser Reihe $\sum_1^{\infty} b_\nu x^\nu$ sind dem absoluten Betrage nach alle kleiner als 1; der Konvergenzradius also mindestens 1. Ferner ist der Koeffizient von x : e^{-1} , der von x^{ν_1+1} : $\left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 e^{-(\nu_1+1)}$, der von x^{ν_2+1} : $\left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2 e^{-(\nu_2+1)}$, allgemein:

$$b_{\nu_k+1} = e^{-(\nu_k+1)} \frac{1}{\nu_k^2},$$

$$\lim_{k=\infty} |b_{\nu_k+1}|^{\frac{1}{\nu_k+1}} = e^{-1} \lim_{k=\infty} \left(\frac{1}{\nu_k^2}\right)^{\frac{1}{\nu_k+1}} = \frac{1}{e}.$$

Also $\overline{\lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{1}{e}$; der Konvergenzradius ist also höchstens e , er liegt zwischen 1 und e . Das Gebiet G reicht also sicher über den Konvergenzkreis hinaus. Aber in G ist:

$$|P_{v_1}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$|P_{v_1} + P_{v_2}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_1}\right)^2,$$

$$|P_{v_1} + P_{v_2} + P_{v_3}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_2}\right)^2.$$

Daher allgemein:

$$|P_{v_1} + P_{v_2} + \dots + P_{v_k}| < 2 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \right) < 2 \frac{\pi^2}{6}$$

für jedes k ; die Folge der Abschnitte $P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, \dots$ der Potenzreihe ist demnach in G gleichmässig konvergent. Denn die absoluten Beträge aller dieser Abschnitte liegen in G unterhalb einer gemeinsamen Schranke und die Folge konvergiert ferner in dem Teile von G , der zum Konvergenzkreis gehört, sodass der Satz von STIELTJES—VITALI zur Anwendung kommen kann.

§ 3. Ein weiteres Beispiel.

Noch weiter führt eine etwas andere Methode. Man kann darnach nämlich Potenzreihen mit endlichem, von 0 verschiedenen Konvergenzradius herstellen, von denen eine bestimmte Folge von Abschnitten in jedem beschränkten inneren Teile eines bis ins Unendliche reichenden Gebietes, etwa einer Halbebene, gleichmässig konvergiert.

Die ganze transzendente Funktion:

$$f_1(x) = \frac{1 - e^{-x}}{(1 + e)^2}$$

bleibt für $\Re(x) \geq -1$ dem absoluten Werte nach unter $\frac{1}{e+1}$. Ihre Potenzentwicklung sei:

$$f_1(x) = \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + a_3^{(1)} x^3 + \dots + a_v^{(1)} x^v + \dots$$

Die ganze Funktion:

$$f_n(x) = f_1(x) + [1 - a_n^{(1)}(e + 1)^{2n}] (f_1(x))^n$$

hat die Potenzentwicklung:

$$f_n(x) = \frac{x}{(e + 1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} + \frac{x^n}{(e + 1)^{2n}} + a_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \dots,$$

sie stimmt also in den ersten n Koeffizienten mit der von $f_1(x)$ überein, während sich der von x^n leicht angeben lässt.

Es sei nun eine Folge von positiven ganzen Zahlen ν_1, ν_2, \dots so gewählt, dass $b_0 = \frac{1}{e + 1}$, $b_1 = 2 b_0^{\nu_1}$, $b_2 = 2 (b_0 + b_1)^{\nu_2}$, \dots , $b_k = 2 (b_0 + b_1 + \dots + b_{k+1})^{\nu_k}$ gesetzt, die unendliche Reihe $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ konvergiert und ihre Summe kleiner als 1 ist. Eine solche Wahl ist augenscheinlich auf unendlich viele Arten möglich.

Ferner werden in der Ebene der Variablen $x = u + iv$ die Gebiete

$$\begin{aligned} G_1: & \quad -1 \leq u \leq 1; \quad -1 \leq v \leq +1 \\ G_2: & \quad -1 \leq u \leq 2; \quad -2 \leq v \leq +2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_n: & \quad -1 \leq u \leq n; \quad -n \leq v \leq +n \end{aligned}$$

betrachtet; jeder Punkt der Halbebene $u > -1$ ist, von einem gewissen n_0 ab, in allen Gebieten G_n ($n \geq n_0$) enthalten; G_ν enthält G_k , falls $\nu > k$ ist.

Da $f_1(x)$ eine ganze Funktion ist, kann man ein $n \geq \nu_1$ so bestimmen, dass

- 1) $|a_n^{(1)}| \leq \frac{1}{(e + 1)^{2n}}$ ist und
- 2) $|f_1(x) - \frac{x}{(e + 1)^2} - a_2^{(1)} x^2 - \dots - a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}| < b_1$ ist in G_1 .

Für dieses n ist dann:

$$\begin{aligned} 1) \quad |f_n(x)| &= |f_1(x)| + [1 - a_n^{(1)}(e + 1)^{2n}] |f_1(x)|^n < \\ &< \frac{1}{e + 1} + 2 \left(\frac{1}{e + 1} \right)^n \leq \frac{1}{e + 1} + 2 \left(\frac{1}{e + 1} \right)^n = b_0 + b_1 \end{aligned}$$

für $\Re(x) \geq -1$,

$$2) \quad \left| \frac{x}{(e + 1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} \right| < b_0 + b_1 \text{ in } G_1.$$

Jetzt geht man von $f_n(x)$ aus, bestimmt n' so, dass $n' \geq n_2$ ist und ferner:

$$|a_{n'}^{(n)}| \leq \frac{1}{(e+1)^{2n'}}$$

sowie

$$\left| f_n(x) - \frac{x}{(e+1)^2} - \dots - a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} - \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} - \dots - a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} \right| < b_2$$

ist in G_2 .

Wir haben dann:

$$1) \quad |f_{n'}^{(1)}(x)| = |f_n(x) + [1 - a_n^{(n)}(e+1)^{2n'}](f_n(x))^{n'}| < b_0 + b_1 + b_2$$

in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$,

$$2) \quad \left| \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} + \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} + \dots + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} \right| < b_0 + b_1 + b_2$$

in G_2 .

Der Koeffizient von $x^{n'}$ in der Potenzentwicklung der ganzen Funktion $f_{n'}^{(1)}(x)$ ist $\left(\frac{1}{e+1}\right)^{2n'}$.

In dieser Weise fahren wir fort und gelangen zu einer Potenzreihe:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} \\ & + \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} + a_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \dots + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} \\ & + \frac{x^{n'}}{(e+1)^{2n'}} + \dots \end{aligned}$$

deren Konvergenzradius höchstens $(e+1)^2$ und mindestens 1 ist. Das Letztere folgt daraus, dass alle Koeffizienten absolut kleiner als 1 sind, da die Funktionen, deren Entwicklung sie entstammen, in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$, also auch im Einheitskreise, dem absoluten Betrage nach unter 1 liegen.

Ferner liegen die absoluten Beträge der Abschnitte $P_{n-1} = \frac{x}{(e+1)^2} + \dots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}$; $P_{n'-1}$, $P_{n''-1}$, ... unterhalb 1 und zwar bezw. in den Gebieten G_1 , G_2 , G_3 , ... Nach dem STIELTJES-VITALI'schen Satze ist dadurch die Konvergenz der Abschnittsfolge P_{n-1} , $P_{n'-1}$, ... in der ganzen Halbebene, in jedem der Gebiete G_v gleichmässig gesichert.

Fügt man (etwa) noch das Glied $3 \cdot x^0 = 3$ zu der Potenzreihe hinzu, so bleiben die Verhältnisse im allgemeinen ungeändert; keiner der Abschnitte P_ν ($\nu = n-1, n'-1, n''-1, \dots$) hat aber in dem entsprechenden Gebiete G_ν eine Null- oder Einsstelle. Die Null- und Einsstellen der Abschnitte dieser Folge häufen sich also nirgends in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$. Es liegen jedoch unendlich viele von den Nullstellen der betrachteten Abschnittsfolge in der Halbebene, denn sonst lägen sie, bis auf endlich viele in der Halbebene $\Re(x) \leq -1$, sodass nach einem Satze über Polynomreihen¹ die Folge in der ganzen Ebene konvergierte, d. h. eine ganze transzendente Funktion vorliegen müsste.

¹ Vgl. ΠÓΛΛΑ, Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Gött. Nachr. 1913.