

# ÜBER DIE NULLSTELLEN DER RIEMANNSCHEN ZETA-FUNKTION.

VON

R. J. BACKLUND

in HELSINGFORS.

## § 1. Einleitung.

1. Die RIEMANN'sche Funktion  $\zeta(s)$  ist bekanntlich eine in der ganzen Ebene der komplexen Variable  $s = \sigma + it$ , mit Ausnahme des Poles  $s = 1$ , reguläre analytische Funktion. In der Halbebene  $\sigma > 1$  wird sie durch die DIRICHLET'sche Reihe

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

sowie durch das unendliche Produkt

$$(2) \quad \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

wo  $p$  alle Primzahlen durchläuft, dargestellt. Die Funktion genügt weiter der Funktionalgleichung

$$(3) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s),$$

durch welche ihre Werte in zwei Punkten, die symmetrisch zum Punkte  $s = \frac{1}{2}$  liegen, mit einander verbunden werden. Wenn

$$(4) \quad \chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

gesetzt wird, kann diese Beziehung durch die Gleichung

$$(5) \quad \zeta(s) = \zeta(1-s)$$

ausgedrückt werden.

2. Wenn der erste Schritt der EULER'schen Summationsformel auf die Summe  $\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^s}$  angewendet wird, erhält man aus (1) die Formel

$$(6) \quad \zeta(s) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s \int_n^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_1(u)}{u^{s+1}} du,$$

wo

$$(7) \quad \bar{\varphi}_1(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$$

ist.<sup>1</sup> Durch partielle Integration erhält man hieraus weiter

$$(8) \quad \zeta(s) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \frac{B_1 s}{2n^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \int_n^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_2(u)}{u^{s+2}} du,$$

wo  $B_1$  die erste BERNOULLI'sche Zahl und  $\bar{\varphi}_2(u)$  eine periodische Funktion mit der Periode 1 bezeichnet, die im Intervalle  $0 < u < 1$  mit dem Polynome  $\varphi_2(u) = u^2 - u + \frac{1}{6}$  zusammenfällt. Durch weitere Entwicklung folgt hieraus

$$(9) \quad \zeta(s) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{r=1}^k T_r + R_k,$$

wo

$$(10) \quad T_r = (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} \frac{s(s+1) \cdots (s+2r-2)}{n^{s+2r-1}}$$

und

$$(11) \quad R_k = - \frac{s(s+1) \cdots (s+2k+1)}{(2k+2)!} \int_n^{\infty} \frac{\bar{P}_{2k+2}(u)}{u^{s+2k+2}} du$$

ist. Hier bedeutet  $B_r$  die  $r$ :te BERNOULLI'sche Zahl, während  $\bar{P}_r(u)$  eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist, die im Intervalle  $0 \leq \sigma \leq 1$  mit dem BERNOULLI'schen

<sup>1</sup>  $[u]$  bezeichnet die grösste ganze Zahl  $\leq u$ .

Polynome  $P_\nu(u)$  übereinstimmt.<sup>1</sup> Für das Restglied  $R_k$  gilt die Ungleichung<sup>2</sup>

$$(12) \quad |R_k| < \left| \frac{s+2k+1}{\sigma+2k+1} \right| |T_{k+1}|.$$

Die Formel (9) besteht für  $\sigma > -(2k+1)$ , und da  $k$  beliebig gross gewählt werden kann, liefert sie also einen Beweis für die Fortsetzbarkeit von  $\zeta(s)$  über die ganze Ebene. Die Formel ist für numerische Berechnung von  $\zeta(s)$  besonders geeignet.

Aus (1) folgt, dass  $|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma)$  für  $\sigma > 1$  ist. In der Halbebene  $\sigma \geq \sigma_0 (> 1)$  ist also  $\zeta(s)$  beschränkt. Weiter erhalten wir aus der für  $\sigma > -1$  gültigen Formel (8), wenn wir  $n = 1$  wählen,

$$(8') \quad \zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{B_1 s}{2} - \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty \frac{\bar{\varphi}_2(u)}{u^{s+2}} du,$$

woraus folgt, dass  $\frac{|\zeta(s)|}{t^2}$  im Gebiete  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0, |t| > t_0 (> 0)$  beschränkt ist. In der Halbebene  $\sigma \geq 0$  ist also, nach der bekannten, von LANDAU eingeführten Bezeichnungweise

$$(13) \quad \zeta(s) = O(t^2).$$

3. Aus (2) geht hervor, dass die Zetafunktion in der Halbebene  $\sigma > 1$  keine Nullstellen besitzt. Aus (3) folgt dann weiter, dass sie in den Punkten  $s = -2, -4, -6, \dots$  Nullstellen erster Ordnung hat (die s. g. trivialen Nullstellen), sonst aber keine Nullstellen in der Halbebene  $\sigma < 0$ . Die übrigen Nullstellen von  $\zeta(s)$  gehören also dem Streifen  $0 \leq \sigma \leq 1$  an.

Dass von diesen Nullstellen keine auf der reellen Achse liegen, ersehen wir z. B. aus der Gleichung

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\bar{\varphi}_1(u)}{u^{s+1}} du,$$

welche aus (6) für  $n = 1$  hervorgeht. Da nach (7)  $|\bar{\varphi}_1(u)| \leq \frac{1}{2}$  ist, haben wir nämlich für reelle  $s (> 0)$

<sup>1</sup> Vgl. E. LINDELÖF, *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (Acta Soc. Sc. Fenn., Tom XXXI, 1902); *Sur une formule sommatoire générale* (Acta Mathematica, Bd 27, S. 305–311).

<sup>2</sup> Vgl. R. J. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannsches Zetafunktion* (Dissertation, Helsingfors 1916, S. 17–18).

$$\left| s \int_1^{\infty} \frac{\bar{r}_1(u)}{u^{s+1}} du \right| < \frac{s}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{s+1}} = \frac{1}{2},$$

und da weiter  $\frac{1}{s-1} < -1$  für  $0 < s < 1$  ist, so wird also in diesem Intervalle  $\zeta(s) < 0$ .

Für  $s=0$  nimmt die Funktion den von Null verschiedenen Wert  $-\frac{1}{2}$  an, wie aus der Gleichung (8') hervorgeht.

#### 4. Die Funktion

$$(14) \quad \xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

ist eine ganze Funktion. Die Pole von  $\zeta(s)$  und  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  werden nämlich von den Nullstellen der Faktoren  $s(s-1)$  und den trivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$  aufgehoben. Die Nullstellen von  $\xi(s)$  fallen hiernach mit den nicht-trivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$  zusammen.

Nach (5) genügt  $\xi(s)$  der Funktionalgleichung

$$(15) \quad \xi(s) = \xi(1-s).$$

Weil  $\xi(s)$  auf der reellen Achse reell ist und also in Punkten, die in bezug auf dieser Achse symmetrisch liegen, konjugierte Werte annimmt, können wir aus (15) schliessen, dass diese letzte Eigenschaft auch in bezug auf der Geraden  $\sigma = \frac{1}{2}$  gilt, und dass also  $\xi(s)$  auf derselben reell ist. Die Nullstellen von  $\xi(s)$  liegen demnach symmetrisch sowohl zur reellen Achse als zur Geraden  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

### § 2. Existenz der Nullstellen von $\xi(s)$ . Abschätzung der Dichtigkeit derselben.

5. Wir wollen in diesem Paragraphen die Existenz der nicht-trivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$  sowie die v. MANGOLDT'sche Formel für die Anzahl derselben unter einer gegebenen Ordinate beweisen. Hierzu benutzen wir den elementaren Grundsatz der Funktionentheorie, der aussagt, dass das Argument einer analytischen Funktion, die in einem endlichen Gebiete regulär ist, auf dem Rande desselben nicht verschwindet und im Innern desselben  $n$  Nullstellen hat, genau um  $2n\pi$  wächst, wenn die Variable den Rand des Gebietes in positivem Sinne durchläuft.

Es sei also  $N(T)$  die Anzahl der Nullstellen von  $\xi(s)$ , deren Ordinate zwischen 0 und  $T (> 0)$  fällt, wobei jede etwa  $k$ -fache Nullstelle  $k$ -mal gezählt werde. Wir nehmen an, dass  $T$  mit der Ordinate keiner von diesen Nullstellen zusammenfalle. Im Rechteck  $R$  mit den Ecken  $a - Ti$ ,  $a + Ti$ ,  $1 - a + Ti$ ,  $1 - a - Ti$ , wo  $a$  eine reelle Zahl  $> 1$  bezeichnet, hat  $\xi(s)$  dann  $2N(T)$  Nullstellen.

Es sei  $\mathcal{A}_R \arg \xi(s)$  der Zuwachs des Arguments von  $\xi(s)$ , wenn  $s$  den Rand dieses Rechtecks in positivem Sinne beschreibt. Nach dem angeführten Grundsatz haben wir dann

$$4\pi N(T) = \mathcal{A}_R \arg \xi(s).$$

Infolge der in Art. 4 der Einleitung hervorgehobenen Eigenschaft der Funktion  $\xi(s)$ , in Punkten, die zu einer von den Geraden  $t = 0$  und  $\sigma = \frac{1}{2}$  symmetrisch liegen, konjugierte Werte anzunehmen, ist aber  $\mathcal{A}_R \arg \xi(s)$  gleich viermal demjenigen Zuwachs, den das Argument von  $\xi(s)$  erfährt, wenn  $s$ , vom Punkte  $a$  der reellen Achse ausgehend, nur den ersten Viertel der Begrenzung des Rechtecks beschreibt (Strecken-zug  $abc$  in der Figur). Wenn wir diesen Zuwachs mit  $\mathcal{A}_{abc} \arg \xi(s)$  bezeichnen haben wir also

$$(16) \quad N(T) = \frac{1}{\pi} \mathcal{A}_{abc} \arg \xi(s).$$

Nach (14) ist

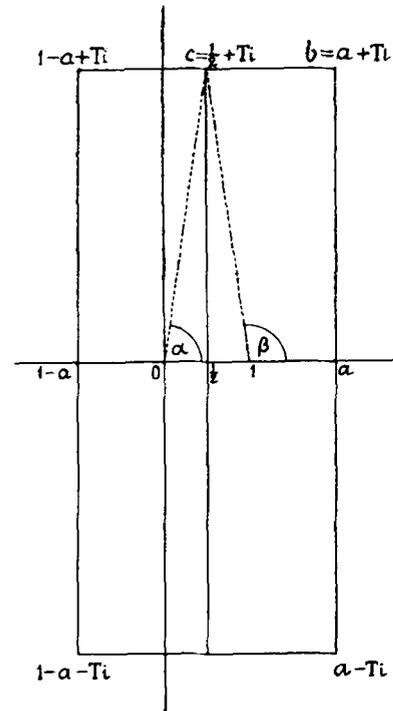
$$(17) \quad \arg \xi(s) = \arg s + \arg (s - 1) + \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s),$$

und wir müssen also die Zuwächse der einzelnen Glieder dieser Summe auswerten. Die ganze Schwierigkeit der Aufgabe liegt dabei in der Aufschätzung des Zuwachses von  $\arg \zeta(s)$  auf der Strecke  $bc$ .

6.  $\mathcal{A}_{abc} \arg s$  und  $\mathcal{A}_{abc} \arg (s - 1)$  sind die in der Figur mit bzw.  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichneten Winkel. Da diese Supplementwinkel sind ist also

$$(18) \quad \mathcal{A}_{abc} \arg s + \mathcal{A}_{abc} \arg (s - 1) = \pi.$$

Weiter ist  $\arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{t}{2} \log \pi$ , und somit



$$(19) \quad \mathcal{A}_{abc} \arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{T}{2} \log \pi.$$

Zur Berechnung von  $\mathcal{A}_{abc} \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  benutzen wir die asymptotische Darstellung von  $\log \Gamma(s)$ :

$$(20) \quad \log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + J(s),$$

wo das Restglied  $J(s)$  in der folgenden Form geschrieben werden kann:<sup>1</sup>

$$(21) \quad J(s) = -\int_0^{\infty} \frac{\bar{p}_1(u)}{s+u} du = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\bar{P}_2(u)}{(s+u)^2} du.$$

$\bar{P}_2(u)$  bedeutet diejenige periodische Funktion mit der Periode 1, die im Intervalle  $0 \leq u \leq 1$  mit dem zweiten BERNOULLI'schen Polynome  $u^2 - u$  zusammenfällt.

Wenn längs des negativen Teils der reellen Achse ein Schnitt gelegt wird und derjenige Zweig von  $\log \Gamma(s)$  gewählt wird, der für reelle und positive  $s$  reell ist, so ist  $\log \Gamma(s)$  in allen Punkten der zerschnittenen Ebene eindeutig bestimmt, und wir haben also<sup>2</sup>

$$(22) \quad \mathcal{A}_{abc} \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right).$$

Aus (20) erhalten wir

$$(23) \quad \Im \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{2} \log \frac{|s|}{2} + \frac{\sigma-1}{2} \arg s - \frac{t}{2} + \Im J\left(\frac{s}{2}\right).$$

Wenn wir  $s = \frac{1}{2} + Ti$  setzen, folgt hieraus

$$(24) \quad \Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + R(T),$$

wo das Restglied folgenden Ausdruck hat:

$$(25) \quad R(T) = \Im J\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) + \frac{T}{4} \log \left(1 + \frac{1}{4Ti}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2T}.$$

Wenn wir schliesslich

<sup>1</sup> Vgl. E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions* (Paris 1905, S. 87–101).

<sup>2</sup> Wenn  $u$  eine beliebige komplexe Grösse bedeutet, bezeichnen wir den reellen Teil derselben mit  $\Re u$ , den Koeffizienten von  $i$  im imaginären Teil mit  $\Im u$ .

$$(26) \quad \mathcal{A}_{abc} \arg \zeta(s) = \pi P(T)$$

setzen, so kommt nach (16), (17), (18), (19), (22), (24) und (26) die Formel

$$(27) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + P(T) + \frac{1}{\pi} R(T)$$

heraus. Die v. MANGOLDT'sche Formel

$$(28) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ist also bewiesen, wenn wir zeigen, dass die zwei letzten Glieder in (27) von der Ordnung  $\log T$  sind.

7. Die Grössenordnung des Restgliedes  $R(T)$  können wir sogleich abschätzen. Für  $\sigma > 0$  ist nach (21) offenbar  $J(s) = O\left(\frac{1}{t}\right)$  und somit

$$\Im J\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Da die übrigen Glieder in (25) ebenfalls von dieser Ordnung sind, haben wir also

$$(29) \quad R(T) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

8. Für die Abschätzung von  $P(T)$  bedienen wir uns folgender Überlegung.

Wenn das Argument einer Funktion gleich einem ungeraden Vielfach von  $\frac{\pi}{2}$  ist, verschwindet der reelle Teil der Funktion. Im Punkte  $a$  ist  $\arg \zeta(s) = 0$ , und die erste auf dem Wege  $abc$  gelegene Nullstelle von  $\Re \zeta(s)$  trifft also ein, wenn  $\arg \zeta(s) = \pm \frac{\pi}{2}$  ist. Zwischen je zwei auf einander folgenden weiteren Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  variiert  $\arg \zeta(s)$  entweder um 0 oder um  $\pm \pi$ . Wenn  $\Re \zeta(s)$  auf  $abc$  genau  $n$  Nullstellen aufweist, muss also  $\mathcal{A}_{abc} \arg \zeta(s)$  numerisch kleiner als  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  sein, und somit

$$(30) \quad |P(T)| < n + \frac{1}{2}.$$

Nun wählen wir die Zahl  $a$  so, dass  $\Re \zeta(s)$  auf der ganzen Geraden  $\sigma = a$  und also besonders auf der Strecke  $ab$  stets grösser als eine feste positive Zahl ist. Diese Bedingung ist z. B. für  $a = 2$  erfüllt, denn wir haben für  $s = 2 + ti$

$$(31) \quad \Re \zeta(s) > 1 - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \frac{3}{4} - \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Es erübrigt also nur eine obere Grenze der Anzahl  $n$  der Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  auf der Strecke  $bc$  zu berechnen.

9. Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion

$$(32) \quad f(s) = \frac{1}{2} [\zeta(s + Ti) + \zeta(s - Ti)],$$

welche für reelle  $s$  gleich  $\Re \zeta(\sigma + Ti)$  ist.

Es sei  $l$  die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion  $f(s)$  im Kreise  $|s - a| \leq a - \frac{1}{2}$ . Da  $f(s)$  auf der Strecke  $\frac{1}{2} \leq s \leq a$  dieselben Werte annimmt wie  $\Re \zeta(s)$  auf der Strecke  $bc$ , ist offenbar

$$(33) \quad n < l.$$

10. Zur Abschätzung der Zahl  $l$  bedienen wir uns des JENSEN'schen Satzes. Wenn eine Funktion  $f(s)$  im Kreise  $|s| \leq r$  regulär ist und dort genau  $k$  Nullstellen,  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , hat, während  $|f(0)| = m \neq 0$  ist, so ist nach diesem Satze

$$(34) \quad \log \frac{m r^k}{|a_1| |a_2| \cdots |a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{M}{m} > \frac{r^k}{|a_1| |a_2| \cdots |a_k|},$$

wo  $M$  das Maximum von  $|f(s)|$  auf der Peripherie  $|s| = r$  bezeichnet.

Diese Ungleichung wird verstärkt, wenn beliebig viele von den Faktoren  $\left| \frac{r}{a_i} \right|$ , welche ja  $\geq 1$  sind, fortgelassen werden, sowie auch wenn unter  $a_1, a_2, \dots, a_k$  Nullstellen ausserhalb des Kreises  $|s| = r$  mitgerechnet werden, denn dadurch werden in der obigen Ungleichung Faktoren, die  $< 1$  sind, rechts hinzugefügt. Diese Ungleichung bleibt also gültig, wenn rechts beliebig viele und irgend welche Nullstellen der Funktion  $f(s)$  gewählt werden.

Wenn speziell  $l$  die Anzahl der Nullstellen von  $f(s)$  in einem konzentrischen Kreise  $|s| \leq \rho (< r)$  bezeichnet, ist demnach

$$\frac{M}{m} > \left(\frac{r}{\varrho}\right)^l,$$

woraus folgt

$$(35) \quad l < \frac{\log \frac{M}{m}}{\log \frac{r}{\varrho}}.$$

11. Diese Ungleichung wenden wir nun auf die Funktion (32) im Kreise  $|s - a| \leq r$  an, indem wir  $a - \frac{1}{2} < r \leq a$  und  $\varrho = a - \frac{1}{2}$  wählen. Wenn  $T$  nur so gross ist, dass die Punkte  $s = 1 + Ti$  und  $s = 1 - Ti$  ausserhalb des Kreises  $|s - a| \leq r$  fallen, ist  $f(s)$  in diesem Kreise regulär, und wenn  $M$  das Maximum von  $f(s)$  auf der Peripherie  $|s - a| = r$  bezeichnet und

$$m = |f(a)| = |\Re \zeta(a + Ti)|$$

gesetzt wird, erhalten wir also die Ungleichung (35).

Nach (13) ist nun  $f(s) = O((T + |t|)^2)$  für  $\sigma \geq 0$ . Im Kreise  $|s - a| \leq r$  ist also  $f(s) = O(T^2)$  und somit  $M = O(T^2)$ , woraus folgt

$$\log M = O(\log T).$$

Da weiter nach (31)  $m$  für jedes  $T$  grösser als  $\frac{1}{4}$  ist, wenn nur  $a \geq 2$  gewählt wird, schliessen wir aus (35), dass  $l = O(\log T)$  ist, und hieraus nach (33), dass  $n = O(\log T)$  ist, woraus schliesslich nach (30) folgt

$$(36) \quad P(T) = O(\log T).$$

Hiermit ist nach (27) und (29) die Formel (28) bewiesen.

12. Da nach dieser Formel  $N(T)$  mit  $T$  unendlich wird, können wir zuerst schliessen, dass  $\xi(s)$  wirklich unendlich viele Nullstellen besitzt.

Wenn wir allgemein mit  $\varepsilon(x)$  eine Funktion bezeichnen, die mit wachsendem  $x$  dem Werte 0 zustrebt, können wir (28) in der Form

$$(37) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log T (1 + \varepsilon(T))$$

schreiben. Hieraus erhalten wir weiter, wenn wir  $N$  statt  $N(T)$  schreiben,

$$\log N = \log T (1 + \varepsilon(T)),$$

oder umgekehrt

$$\log T = \log N (1 + \varepsilon(N)),$$

und nach (37) wird somit

$$T = 2\pi \frac{N}{\log N} (1 + \varepsilon(N)).$$

Wenn

$$\varrho_n = \beta_n + i\alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

die in der Halbebene  $t > 0$  liegenden, nach wachsenden Ordinaten  $\alpha$  geordneten Nullstellen von  $\xi(s)$  bezeichnen, ist also

$$\alpha_n = 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + \varepsilon(n)),$$

und folglich auch, weil  $0 \leq \beta_n \leq 1$ ,

$$|\varrho_n| = 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + \varepsilon(n)).$$

Hieraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\varrho_n} \right|$$

divergent ist, während die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\varrho_n} \right|^{1+\varepsilon}$$

konvergiert, wie klein auch die positive Zahl  $\varepsilon$  ist.

### § 3. Numerische Abschätzung des Restgliedes in der Formel für $N(T)$ .

13. In der Formel (27) setzen wir zur Abkürzung

$$N(T) - \left( \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} \right) = Q(T),$$

wobei also

$$(38) \quad Q(T) = P(T) + \frac{1}{\pi} R(T)$$

ist.  $P(T)$  und  $R(T)$  sind bzw. durch die Gleichungen (26) und (25) definiert.

v. MANGOLDT<sup>1</sup> hatte bewiesen, dass für  $T > 28,558$

$$|Q(T)| < 0,43200 \log T + 1,91662 \log \log T + 12,20375$$

ist. Durch Verschärfung gewisser Einzelheiten in v. MANGOLDT's Beweis gelang es GROSSMANN<sup>2</sup> diese Ungleichung durch die folgende zu ersetzen:

$$|Q(T)| < 0,29062 \log T + 1,7862 \log \log T + 6,13695.$$

Dabei wurde  $T > 50$  angenommen.

Durch numerische Ausnutzung der in § 2 befolgten Methode hatte ich für  $T > 200$  die Ungleichung

$$|Q(T)| < 0,275 \log T + 0,979 \log \log T + 7,446$$

gefunden.<sup>3</sup> Nach einer Bemerkung von Herrn Professor E. LINDELÖF lässt sich aber eine gewisse angenäherte Symmetrie des Arguments der Zetafunktion hier heranziehen, wodurch die Koeffizienten der obigen Formel etwa auf die Hälfte reduziert werden. Wir erhalten in dieser Weise die Abschätzung

$$(39) \quad |Q(T)| < 0,137 \log T + 0,445 \log \log T + 4,350.$$

14. Wir wollen zuerst die erwähnte Symmetrieeigenschaft beweisen.

Wir bezeichnen im folgenden mit  $\mathcal{A}_1 \arg f(s)$  den Zuwachs des Arguments einer Funktion  $f(s)$ , wenn der reelle Teil der Variable  $s = \sigma + it$  von  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{1}{2} + \delta$  ( $\delta > 0$ ) variiert, mit  $\mathcal{A}_2 \arg f(s)$  den Zuwachs desselben Arguments, wenn  $\sigma$  von  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{1}{2} - \delta$  variiert.

Nach (5) nimmt die Funktion  $\zeta(s)$  in Punkten, die symmetrisch zur Geraden  $\sigma = \frac{1}{2}$  liegen, konjugierte Werte an. Folglich haben wir

$$\mathcal{A}_1 \arg \zeta(s) = -\mathcal{A}_2 \arg \zeta(s),$$

und also nach (4)

$$(40) \quad \mathcal{A}_1 \arg \zeta(s) + \mathcal{A}_2 \arg \zeta(s) = -\mathcal{A}_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \mathcal{A}_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \\ - \mathcal{A}_1 \arg \pi^{-\frac{s}{2}} - \mathcal{A}_2 \arg \pi^{-\frac{s}{2}}.$$

<sup>1</sup> Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion  $\xi(t)$  (Mathematische Annalen, Bd 60, 1905).

<sup>2</sup> Über die Nullstellen der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion und der Dirichletschen  $L$ -Funktionen (Dissertation, Göttingen, 1913).

<sup>3</sup> Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann (Comptes rendus, t. 158, 1914).

Da  $\arg x^{-\frac{s}{2}} = -\frac{t}{2} \log x$  ist, so sind die zwei letzten Glieder der rechten Seite gleich 0. Wir wollen weiter zeigen, dass die Summe der zwei übrigen Glieder eine Grösse von der Ordnung  $\frac{1}{t}$  ist, und dass also, wenn  $s$  sich symmetrisch nach beiden Seiten von der Geraden  $\sigma = \frac{1}{2}$  bewegt, die Zuwächse von  $\arg \zeta(s)$  bis auf eine Grösse dieser Ordnung einander entgegengesetzt gleich sind.

Wenn wir  $\sigma = \frac{1}{2} + \delta$  setzen, so ist nach (23)

$$\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 + t^2}{4} + \frac{\delta - \frac{1}{2}}{2} \arg s - \frac{t}{2} + 3J\left(\frac{s}{2}\right).$$

Da  $\arg s = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sigma}{t}$  ist, können wir diese Gleichung in der Form

$$\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 + t^2}{4} + \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} + \left(\frac{1}{t}\right)$$

schreiben, wo

$$\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1 - \sigma}{2} \arctg \frac{\sigma}{t} + 3J\left(\frac{s}{2}\right)$$

ist. Hieraus erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} + \delta \frac{\pi}{4} + \mathcal{A}_1\left(\frac{1}{t}\right), \\ \mathcal{A}_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} - \delta \frac{\pi}{4} + \mathcal{A}_2\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Im folgenden wird  $-\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{5}{4}$  und also  $0 \leq \delta \leq \frac{3}{4}$  angenommen. Wir erhalten dann (wenn z. B.  $t > 1$  ist)

$$\begin{aligned} \left| \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} \right| &= \frac{t}{4} \log \left( 1 + \frac{\delta + \delta^2}{\frac{1}{4} + t^2} \right) < \frac{\delta + \delta^2}{4t} \leq \frac{21}{64t}, \\ \left| \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} \right| &= \left| \frac{t}{4} \log \left( 1 - \frac{\delta - \delta^2}{\frac{1}{4} + t^2} \right) \right| < \frac{\delta - \delta^2}{2t} \leq \frac{1}{8t}. \end{aligned} \quad (42)$$

Zur Abschätzung von  $\left(\frac{1}{t}\right)$  bedienen wir uns der von STIELTJES<sup>1</sup> gegebenen Ungleichung

$$(43) \quad |J(s)| < \frac{B_1}{2r} \sec^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{6(r+\sigma)},$$

wo  $s = re^{i\theta}$  gesetzt ist. Sobald  $t > 1$  ist, erhalten wir dann

$$\left|3J\left(\frac{s}{2}\right)\right| \leq \left|J\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{1}{3t\left(1-\frac{1}{4t}\right)} < \frac{4}{9t}.$$

Ferner wird

$$\left|\frac{1-\sigma}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{t}\right| < \frac{5}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{4t} < \frac{25}{32t}.$$

Wir haben also

$$\left|\left(\frac{1}{t}\right)\right| < \frac{4}{9t} + \frac{25}{32t} = \frac{353}{288t}$$

und folglich ist sowohl  $\left|\mathcal{A}_1\left(\frac{1}{t}\right)\right|$  als  $\left|\mathcal{A}_2\left(\frac{1}{t}\right)\right|$  sicher kleiner als  $\frac{353}{144t} < \frac{3}{t}$ . Nach (41) und (42) wird dann

$$\mathcal{A}_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \delta \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{t}\right)_1,$$

$$\mathcal{A}_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = -\delta \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{t}\right)_2,$$

wo

$$\left|\left(\frac{1}{t}\right)_1\right| < \frac{3}{t} + \frac{21}{64t} < \frac{4}{t}$$

und

$$\left|\left(\frac{1}{t}\right)_2\right| < \frac{3}{t} + \frac{1}{8t} < \frac{4}{t}$$

ist, woraus weiter folgt

$$\left|\mathcal{A}_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \mathcal{A}_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{t}\right)_1 + \left(\frac{1}{t}\right)_2\right| < \frac{8}{t}.$$

Nach (40) haben wir also für  $t > 1$

$$(44) \quad |\mathcal{A}_1 \arg \zeta(s) + \mathcal{A}_2 \arg \zeta(s)| < \frac{8}{t}.$$

Diese Ungleichung drückt die gesuchte Eigenschaft der Funktion  $\zeta(s)$  aus, die im folgenden benutzt wird.

<sup>1</sup> Vgl. LINDELÖF, *Le calcul des résidus* (S. 99, Formel (5)).

15. Hiernach gehen wir zur Abschätzung von  $Q(T)$  über. Nach (38) haben wir

$$(45) \quad |Q(T)| \leq |P(T)| + \left| \frac{1}{\pi} R(T) \right|.$$

Bei der Abschätzung von  $|P(T)|$  setzen wir in der Formel (26)

$$|\mathcal{J}_{abc} \arg \zeta(s)| = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi + r_1,$$

wo wir die ganze Zahl  $n$  so wählen, dass  $0 \leq r_1 < \pi$  wird.<sup>1</sup> Dann haben wir

$$(46) \quad |P(T)| < n + \frac{1}{2}.$$

Die Zahl  $a$  soll nun wieder so gewählt werden, dass auf der Geraden  $\sigma = a$  stets  $|\arg \zeta(s)| < \frac{\pi}{2}$  ist, und zwar so klein wie möglich, weil der Koeffizient von  $\log T$  in der gesuchten Abschätzung hierdurch etwas verbessert wird (vgl. (39)).

Nach der für  $\sigma > 1$  gültigen Formel

$$\log \zeta(s) = \sum_{m,p} \frac{1}{m p^{m s}},$$

wo  $p$  alle Primzahlen und  $m$  alle positive ganze Zahlen durchläuft, erhält man

$$(47) \quad |\arg \zeta(s)| = |3 \log \zeta(s)| \leq |\log \zeta(s)| \leq \sum_{m,p} \frac{1}{m p^{m \sigma}} = \log \zeta(\sigma).$$

In einem Punkte zwischen  $\sigma = 1,237$  und  $\sigma = 1,238$  wird  $\log \zeta(\sigma) = \frac{\pi}{2}$ . Wenn  $a \geq 1,238$  gewählt wird, ist also die erwünschte Bedingung erfüllt. Wir wählen im folgenden  $a = \frac{5}{4}$ .

16. Wenn  $s$  nun den Weg  $abc$  beschreibt, bleibt  $|\arg \zeta(s)| < \frac{\pi}{2}$  auf der ganzen Strecke  $ab$ . Auf  $bc$  muss dagegen  $|\arg \zeta(s)|$  die Werte  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi,$

<sup>1</sup> Bei der folgenden Abschätzung setzen wir voraus, dass  $|\mathcal{J}_{abc} \arg \zeta(s)| > \frac{3\pi}{2}$  und also  $n \geq 2$  ist. Ist diese Annahme nicht erfüllt, so ist nach (26)  $|P(T)| < \frac{3}{2}$ , welche Grenze viel niedriger ist als diejenige, die wir im folgenden erhalten werden.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots, \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$  durchlaufen, kann aber einen jeden von diesen Werten in mehreren Punkten annehmen. Alle diese Punkte sind Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  (vgl. Art. 8). Wir greifen diejenigen heraus, in welchen  $|\arg \zeta(s)|$  zum *letzten* Male die betreffenden Werte annimmt und bezeichnen diese Punkte mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Auf der Strecke von  $\alpha_\nu$  bis  $c$  ist also  $|\arg \zeta(s)| > \frac{\pi}{2} + (\nu-1)\pi$ . Der Punkt  $\alpha_n$  kann eventuell mit dem Punkte  $c = \frac{1}{2} + Ti$  zusammenfallen.

Unsere Aufgabe ist nun die Anzahl  $n$  dieser Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  abzuschätzen, woraus sich dann nach (46) eine obere Grenze für  $|P(T)|$  ergeben wird.

Mit Hilfe der Beziehung (44) können wir zeigen, dass auf der zu  $cb$  in bezug auf der Geraden  $\sigma = \frac{1}{2}$  symmetrischen Strecke von  $c = \frac{1}{2} + Ti$  bis  $b' = -\frac{1}{4} + Ti$  wenigstens  $n-2$  Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  liegen. Wenn  $s$  die Strecke  $cb$  von links nach rechts durchläuft, so wird nämlich in den Punkten  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1$  der absolute Betrag des Zuwachses des Arguments von  $\zeta(s)$ , also  $|\mathcal{A}_1 \arg \zeta(s)|$ , bzw. gleich  $\eta, \eta + \pi, \eta + 2\pi, \dots, \eta + (n-1)\pi$ . Die Werte von  $|\mathcal{A}_2 \arg \zeta(s)|$  in den symmetrisch gelegenen Punkten auf  $cb'$  weichen von denselben Werten um Grössen ab, die nach (44) numerisch kleiner als  $\frac{8}{t}$ , also sobald  $t > 3$  gewählt wird, sicher  $< \pi$  sind. Also ist in den zu  $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \dots, \alpha_1$  symmetrischen Punkten

$$|\mathcal{A}_2 \arg \zeta(s)| > \pi, 2\pi, \dots, (n-2)\pi.$$

Wenn aber  $|\mathcal{A}_2 \arg \zeta(s)|$  in einem Punkte einen Wert erreicht hat, der grösser als  $\pi$  ist, so muss zwischen diesem Punkte und dem Punkte  $c$  wenigstens eine Nullstelle von  $\Re \zeta(s)$  liegen; wenn  $|\mathcal{A}_2 \arg \zeta(s)| > 2\pi$  geworden ist, muss  $s$  zwei Nullstellen von  $\Re \zeta(s)$  passiert haben u. s. w. Nach dem oben gesagten hat also  $\Re \zeta(s)$  auf  $cb'$  wenigstens  $n-2$  Nullstellen, und wenn wir diejenigen, die dem Punkte  $c$  am nächsten liegen, herausgreifen und dieselben, nach wachsender Abszisse geordnet, mit  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-2}$  bezeichnen, so ist

$$(48) \quad |\alpha'_\nu - c| < |\alpha_\nu - c| \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n-2).$$

17. Um nun die Zahl  $n$  abzuschätzen, bedienen wir uns wieder des JENSEN'schen Satzes (34), indem wir denselben auf die Funktion

$$(49) \quad F(s) = f(s_0 + s)$$

anwenden, wo  $f(s)$  durch (32) definiert ist und  $s_0 = \frac{5}{4}$  ist. Den Nullstellen  $\alpha_\nu$

und  $\alpha'_\nu$  von  $\Re \zeta(s)$  entsprechen die Nullstellen  $a_\nu = \alpha_\nu - s_0$  und  $a'_\nu = \alpha'_\nu - s_0$  von  $F(s)$ .

$F(s)$  ist in dem Kreise  $|s| \leq r$  regulär, wenn nur  $r$  so klein gewählt wird, dass die Pole  $s = -\frac{1}{4} + Ti$  und  $s = -\frac{1}{4} - Ti$  ausserhalb des Kreises fallen. Wenn  $b_1, b_2, \dots, b_k$  die Nullstellen von  $F(s)$  in diesem Kreise sind, so ist dann nach dem genannten Satze

$$\log \frac{F(0) r^k}{|b_1 b_2 \dots b_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Wie bei der Ungleichung auf Seite 352 bemerken wir, dass die linke Seite der obigen Gleichung nur verkleinert werden kann, wenn wir anstatt  $b_1, b_2, \dots, b_k$  beliebig viele und irgend welche Nullstellen von  $F(s)$  wählen. Wenn wir besonders die Nullstellen  $a_1, a_2, \dots, a_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-2}$  wählen, erhalten wir also die Ungleichung

$$\log \frac{F(0) r^{2n-2}}{|a_1 \dots a_n a'_1 \dots a'_{n-2}|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Nach dem gesagten besteht dieselbe für jedes  $r$ , das nur  $< \left| -\frac{1}{4} + Ti \right|$  ist.

Wenn  $\frac{3}{4} = \varrho$  und  $|a_\nu| = \varrho - \delta_\nu, |a'_\nu| = \varrho + \delta'_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ ) gesetzt wird, so ist nach (48) stets  $\delta_\nu > \delta'_\nu$  und somit

$$|a_\nu a'_\nu| = (\varrho - \delta_\nu)(\varrho + \delta'_\nu) < \varrho^2 - \delta_\nu^2 < \varrho^2.$$

Weiter ist  $|a_{n-1}| < \varrho, |a_n| \leq \varrho$ . Wenn wir noch bemerken, dass  $|F(re^{i\varphi})| = |F(re^{-i\varphi})|$  ist, erhalten wir in dieser Weise die Ungleichung

$$\log |F(0)| \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n-2} < \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

oder, wenn  $\log \frac{r}{\varrho} = q$  gesetzt wird

$$2nq < 2q - \log |F(0)| + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

woraus schliesslich nach (45) und (46) folgt

$$(50) \quad |Q(T)| < \frac{1}{2\pi q} \int_0^{\pi} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{3}{2} - \frac{1}{2q} \log |F(0)| + \frac{1}{\pi} |R(T)|.$$

18. Um eine obere Grenze des Integrals in der Ungleichung (50) zu erhalten, müssen wir zuerst  $|F(s)|$  abschätzen. Hierzu bedienen wir uns bekannter Resultate hinsichtlich dem Anwachsen von  $|\zeta(s)|$ , wobei wir jedoch erst die Konstanten etwas genauer abschätzen müssen.

Auf der Geraden  $\sigma = 1$  ist, wie MELLIN<sup>1</sup> bewiesen hat,  $\zeta(s) = O(\log t)$ . Wir werden zeigen, dass in der Tat, von einem gewissen positiven Wert von  $t$  an, die Ungleichung

$$(51) \quad |\zeta(1 + ti)| < \log t$$

besteht.

Nach der Formel (8) der Einleitung finden wir für  $s = 1 + ti$

$$(52) \quad |\zeta(1 + ti)| < \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{t} + \frac{B_1 |s|}{2n^2} + \frac{|s(s+1)|}{2} \int_n^{\infty} \frac{|\bar{\varphi}_2(u)|}{u^3} du.$$

Da  $\varphi_2(u) = u^3 - u + \frac{1}{6}$  ist, so haben wir  $|\bar{\varphi}_2(u)| \leq \frac{1}{6}$  für alle Werte  $u$ , und also

$$\int_n^{\infty} \frac{|\bar{\varphi}_2(u)|}{u^3} du < \frac{1}{6} \int_n^{\infty} \frac{du}{u^3} = \frac{1}{12n^2}.$$

Weiter findet man leicht

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} < \log n + C,$$

wo  $C$  die EULER'sche Konstante bedeutet.<sup>2</sup> Wenn wir  $\left|\frac{s}{t}\right| = \alpha_1$  und  $\left|\frac{s(s+1)}{t^2}\right| = \alpha_2$

<sup>1</sup> Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht (Acta Soc. Sc. Fenn., Tome XXIX, 1900).

<sup>2</sup> Aus der Definition

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \log n \right\}$$

ergibt sich nämlich:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} \right) - \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} \right] \right\} =$$

setzen, so haben wir also

$$|\zeta(1+ti)| < \log n + C + \frac{1}{t} + \frac{t}{12n^2}\alpha_1 + \frac{t^2}{24n^3}\alpha_2.$$

Wenn wir nun  $n = \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil + 1$  wählen, so wird

$$\log n \leq \log \left( \frac{t}{3} + 1 \right) = \log \frac{t}{3} + \log \left( 1 + \frac{3}{t} \right) < \log \frac{t}{3} + \frac{3}{t}$$

und andererseits  $\frac{1}{n} < \frac{3}{t}$ , so dass wir die Ungleichung

$$|\zeta(1+ti)| < \log t - \log 3 + C + \frac{4}{t} + \frac{3}{4t}\alpha_1 + \frac{3}{8}\alpha_2$$

erhalten. Man hat aber  $-\log 3 < -1,098$ ,  $C < 0,578$  und weiter, wenn z. B.  $t \geq 50$  gewählt wird,  $\frac{3}{8}\alpha_2 < 0,376$  und  $\frac{1}{t}\left(4 + \frac{3}{4}\alpha_1\right) < 0,096$ . Daher ist für  $t \geq 50$

$$(53) \quad |\zeta(1+ti)| < \log t - 0,048,$$

und a fortiori ist also die Ungleichung (51) für  $t \geq 50$  erfüllt.

Wir bemerken noch, dass die Ungleichung

$$(54) \quad |\zeta(s)| < \log t - 0,048,$$

wenn  $t \geq 50$  ist, auch für  $\sigma > 1$  besteht. Wenn  $\sigma_0$  diejenige reelle Zahl ( $> 1$ ) bezeichnet, welche der Gleichung  $\zeta(\sigma_0) = \log 50 - 0,048$  befriedigt, so ist nämlich wegen der Abschätzung  $|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma)$  die Ungleichung (54) für  $\sigma > \sigma_0$  erfüllt, und für  $1 < \sigma \leq \sigma_0$  erhalten wir aus (8) eine Abschätzung von  $|\zeta(s)|$ , wo jedes einzelne Glied kleiner als das entsprechende in der obigen Abschätzung gemacht werden kann.

19. LINDELÖF hat bewiesen<sup>1</sup>, dass im Streifen  $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} \right) - \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} \right] \\ &> \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} \right) - \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} - \log n. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Quelques remarques sur la croissance de la fonction  $\zeta(s)$*  (Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome 32, 1908).

$$|\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t\right)$$

ist. Wir werden auch diese Abschätzung hier unter Berücksichtigung der numerischen Konstanten durchführen, indem wir zeigen, dass im Gebiete

$$(55) \quad 0 \leq \sigma \leq 1, t \geq 50$$

die folgende Ungleichung besteht:

$$(56) \quad |\zeta(s)| < \frac{t^2}{t^2 - 4} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t.$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion (vgl. (4))

$$(57) \quad \varphi(s) = \frac{\chi(s) \sqrt{\sin \frac{\pi s}{2}}}{\log(-si)} = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \sqrt{\sin \frac{\pi s}{2}}}{\log(-si)}$$

im Gebiete (55), wo sie offenbar regulär ist. Wir werden zuerst zeigen, dass auf dem Rande dieses Gebietes die Ungleichung

$$(58) \quad |\varphi(s)| < 1$$

erfüllt ist.

Zur Abschätzung von  $\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right|$  bedienen wir uns der Gleichung (20), die uns gibt:

$$\Re \log \Gamma(s) = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \log |s| - t \arg s - \sigma + \log \sqrt{2\pi} + \Re J(s).$$

Hieraus erhalten wir weiter

$$(59) \quad \Re \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sigma - 1}{2} \log \frac{t}{2} - \frac{\pi t}{4} + \log \sqrt{2\pi} + \varepsilon_1,$$

wo

$$\varepsilon_1 = \frac{t}{2} \arctg \frac{\sigma}{t} - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma - 1}{4} \log \left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right) + \Re J\left(\frac{s}{2}\right)$$

ist.

Die Grösse  $\varepsilon_1$  ist, wie eine Reihe im folgenden auftretender, mit  $\varepsilon$  oder  $\varepsilon(\sigma, t)$  nebst beigefügten Indices bezeichneten Grössen, im Gebiete (55) höchstens von der Ordnung  $\frac{1}{t^2}$  und ohne wesentlichen Einfluss auf das Endresultat. Bei der Abschätzung derselben wird deshalb keine grössere Genauigkeit erstrebt.

Erstens haben wir nach STIELTJES,<sup>1</sup> wenn wir

$$J(s) = \frac{1}{12s} + J_1(s)$$

und  $s = re^{i\theta}$  setzen,

$$|J_1(s)| < \frac{B_2}{12r^3} \left(\sec \frac{\theta}{2}\right)^4 = \frac{1}{90r(r+\sigma)^2}.$$

Für  $\sigma \geq 0$  ist also  $\left|J_1\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{4}{45r^3}$  und folglich

$$\left|\Re J\left(\frac{s}{2}\right)\right| \leq \left|\Re \frac{1}{6s}\right| + \left|J_1\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{\sigma}{6r^2} + \frac{4}{45r^3}.$$

Im Gebiete (55) wird demnach

$$\left|\Re J\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{1}{6t^2} + \frac{4}{45 \cdot 50t^2} < \frac{1}{5t^2}.$$

In demselben Gebiete ist weiter

$$\left|\frac{t}{2} \arctg \frac{\sigma}{t} - \frac{\sigma}{2}\right| < \frac{\sigma^3}{6t^2} \leq \frac{1}{6t^2},$$

$$\left|\frac{\sigma-1}{4} \log\left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right)\right| < \frac{1-\sigma}{4} \frac{\sigma^2}{t^2} \leq \frac{1}{27t^2},$$

und indem wir diese drei Ungleichungen zusammenfassen, erhalten wir also

$$|\varepsilon_1| < \frac{109}{270t^2} < \frac{1}{2t^2}.$$

Wenn wir noch  $e^{\varepsilon_1} = 1 + \varepsilon_2$  setzen, so wird im Gebiete (55)

$$|\varepsilon_2| < \frac{|\varepsilon_1|}{1 - |\varepsilon_1|} < 2|\varepsilon_1|.$$

Wir erhalten also aus (59)

$$(60) \quad \left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = V_{2\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{4}} (1 + \varepsilon_2),$$

wobei im Gebiete (55)

$$(61) \quad |\varepsilon_2| < \frac{1}{t^2}$$

ist.

<sup>1</sup> Vgl. z. B. E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus* (S. 97–99, Formeln (1) und (5)).

Ferner haben wir

$$(62) \quad \left| \pi^{-\frac{s}{2}} \right| = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}$$

und

$$\left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi t}{2}} (1 + \varepsilon_3), \quad |\varepsilon_3| < e^{-\pi t},$$

woraus folgt

$$(63) \quad \left| \sqrt{\sin \frac{\pi s}{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi t}{4}} (1 + \varepsilon_4),$$

wo  $|\varepsilon_4| < \frac{1}{2} |\varepsilon_3|$  ist, und also im Gebiete (55) z. B.

$$(64) \quad |\varepsilon_4| < \frac{1}{t^2}.$$

Schliesslich ist

$$\log(-si) = \log |s| - i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{t},$$

und wenn wir demnach

$$(65) \quad |\log(-si)| = (1 + \varepsilon_5) \log t$$

setzen, so wird, wie eine kleine Zwischenrechnung zeigt, im Gebiete (55)

$$(66) \quad |\varepsilon_5| < \frac{1}{t^2}.$$

Zusammengenommen, kommt aus (57), (60), (62), (63) und (65), wenn wir  $(1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_4) (1 + \varepsilon_5)^{-1} = 1 + \varepsilon_6$  setzen, die Gleichung

$$(67) \quad |\varphi(s)| = |\zeta(s)| \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{\sigma-1}{2}} (\log t)^{-1} (1 + \varepsilon_6)$$

heraus, wobei nach (61), (64) und (66) im Gebiete (55)

$$1 - \frac{4}{t^2} < \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-1} < 1 + \varepsilon_6 < \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{-1} < 1 + \frac{4}{t^2}$$

und also

$$(68) \quad |\varepsilon_6| < \frac{4}{t^2}.$$

Nach (53) haben wir nun

$$|\zeta(1+ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right) \log t,$$

wo  $a = 0,048$  ist. Wenn wir diese Ungleichung in (67) einsetzen, erhalten wir für  $\sigma = 1, t \geq 50$ , mit Rücksicht auf (68)

$$(69) \quad |\varphi(1 + ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right) \left(1 + \frac{4}{t^2}\right).$$

Nun ist die Funktion  $\varphi(s)$  so gewählt, dass die Relation

$$(70) \quad |\varphi(1 - \sigma + ti)| = |\varphi(\sigma + ti)|(1 + \varepsilon_7)$$

besteht, wo  $\varepsilon_7$  wieder eine kleine Grösse bezeichnet. Wir haben nämlich nach (5)

$$|\chi(1 - \sigma + ti)| = |\chi(\sigma + ti)|,$$

und aus dieser Gleichung nebst (63) und (65) folgt nach (57) die Gleichung (70), wenn wir

$$1 + \varepsilon_7 = (1 + \varepsilon_4(1 - \sigma, t))(1 + \varepsilon_4(\sigma, t))^{-1}(1 + \varepsilon_3(1 - \sigma, t))^{-1}(1 + \varepsilon_3(\sigma, t))$$

setzen. Mit Rücksicht auf (64) und (66) ist dann im Gebiete (55)

$$1 - \frac{5}{t^2} < \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-2} < 1 + \varepsilon_7 < \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{-2} < 1 + \frac{5}{t^2},$$

und also

$$(71) \quad |\varepsilon_7| < \frac{5}{t^2}.$$

Mittels (70) und (71) folgern wir nun sogleich aus (69) die Ungleichung

$$(72) \quad |\varphi(ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right) \left(1 + \frac{4}{t^2}\right) \left(1 + \frac{5}{t^2}\right).$$

Für  $t \geq 50$  sind aber die rechten Seiten von sowohl (69) als (72) kleiner als 1. Wir haben also bewiesen, dass die Ungleichung (58) auf den beiden der imaginären Achse parallelen Seiten des Gebietes (55) besteht.

Wir müssen noch zeigen, dass diese Ungleichung auch auf der Strecke  $t = 50, 0 \leq \sigma \leq 1$  erfüllt ist.

Wegen (70) und (71) ist dies wahr, wenn wir beweisen können, dass auf der Hälfte  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  dieser Strecke  $|\varphi(s)| < \left(1 + \frac{5}{t^2}\right)^{-1}$  ist. Nach (67) und (68) ist es wieder hierzu genügend zu zeigen, dass auf dieser Hälfte

$$|\zeta(s)| < \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{5}{t^2}\right)^{-1}$$

ist, oder also, dass die Ungleichung

$$(73) \quad |\zeta(\sigma + 50i)| < 0,9964 \left(\frac{25}{\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log 50$$

für  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  erfüllt ist.

Wir bezeichnen die Summe der  $n$  ersten Glieder der rechten Seite der Formel (9) mit  $H(s)$ , die Summe der übrigen Glieder mit  $K(s)$ , so dass also

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= H(s) + K(s), \\ H(s) &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s}, \\ K(s) &= \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^k T_\nu + R_k. \end{aligned}$$

Die Summe der positiven Glieder des Ausdruckes

$$\Re H(\sigma + 50i) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^\sigma} \cos(50 \log \nu) + \frac{1}{2n^\sigma} \cos(50 \log n)$$

bezeichnen wir mit  $A(\sigma)$ , die Summe der negativen Glieder mit  $B(\sigma)$ , so dass

$$\Re H(\sigma + 50i) = A(\sigma) - B(\sigma).$$

Analog setzen wir

$$\Im H(\sigma + 50i) = A'(\sigma) - B'(\sigma).$$

Für  $n = 10$  findet man

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}\right) &< 1,649, \quad B\left(\frac{1}{2}\right) < 1,870, \\ A'\left(\frac{1}{2}\right) &< 1,061, \quad B'\left(\frac{1}{2}\right) < 0,684. \end{aligned}$$

Da die Grössen  $A(\sigma)$ ,  $B(\sigma)$ ,  $A'(\sigma)$ ,  $B'(\sigma)$  alle mit wachsendem  $\sigma$  abnehmen und da  $A(\sigma)$  immer  $\geq 1$  ist, schliessen wir hieraus für  $\sigma \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -0,870 &< \Re H(\sigma + 50i) < 1,649 \\ -0,684 &< \Im H(\sigma + 50i) < 1,061. \end{aligned}$$

woraus weiter

$$|H(\sigma + 50i)| < 1,962$$

folgt. Wenn wir weiter  $k = 2$  wählen und  $|R_k|$  nach der Formel (12) abschätzen,

erhalten wir

$$|K(\sigma + 50i)| < \left| \frac{n^{1-s}}{s-1} \right| + |T_1| + |T_2| + \left| \frac{s+5}{\sigma+5} \right| |T_3|.$$

Für  $\sigma = \frac{1}{2}$  finden wir in dieser Weise  $\left| K\left(\frac{1}{2} + 50i\right) \right| < 0,281$ , und da die Glieder der rechten Seite im Intervalle  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  alle mit wachsendem  $\sigma$  abnehmen, ist also in diesem Intervalle

$$|K(\sigma + 50i)| < 0,281.$$

Also ist für  $s = \sigma + 50i$ ,  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$|\zeta(s)| < |H(s)| + |K(s)| < 2,243.$$

Andererseits ist für  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  die rechte Seite von (73) grösser als  $0,9964 \log 50 > 3,896$ .

In diesem Intervalle gilt also die Ungleichung (73), und folglich ist die Ungleichung (58) auf der Strecke  $t = 50$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$  erfüllt.

Hiermit ist bewiesen, dass diese Ungleichung auf dem ganzen Rande des Gebietes (55) besteht.

Weiter folgt aus (67) und (13), dass im Gebiete (55)

$$\rho(s) = O(t^2)$$

ist. Nach einem von PHRAGMÉN und LINDELÖF bewiesenen Satz<sup>1</sup> schliessen wir hieraus, dass die Ungleichung (58) auch im Innern vom Gebiete (55) besteht, und nach (67) und (68) folgt hieraus schliesslich die Ungleichung (56).

20. Schliesslich müssen wir noch  $|\zeta(s)|$  im Gebiete  $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0$  abschätzen, wozu wir die Funktionalgleichung (3) benutzen. Nach (60) haben wir für  $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ ,  $t \geq 25$

$$|T(s-1)| = \sqrt{2} \pi t^{\sigma-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}} (1 + \varepsilon'_2),$$

wo

$$(74) \quad |\varepsilon'_2| < \frac{1}{4t^2}$$

<sup>1</sup> *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés d'espaces monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (Acta Mathematica, Bd 31, S. 382, 1908). Vgl. die auf S. 362 zitierte Arbeit von LINDELÖF.

ist. Wegen der Relation  $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$  folgt hieraus

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi} t^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}} (\Gamma + \varepsilon'_2) \left| \frac{s-1}{t} \right|.$$

Weiter ist

$$\left| \cos \frac{\pi s}{2} \right| = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi t}{2}} |\Gamma + e^{\pi s i}|,$$

und nach (3) wird also

$$(75) \quad |\zeta(1-s)| = |\zeta(s)| \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{\sigma-\frac{1}{2}} (\Gamma + \varepsilon_9),$$

wo

$$\Gamma + \varepsilon_9 = (\Gamma + \varepsilon'_2) \left| \frac{s-1}{t} \right| |\Gamma + e^{\pi s i}|$$

gesetzt ist. Wegen (74) und der im Gebiete  $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ ,  $t \geq 25$  gültigen Ungleichungen

$$1 \leq \left| \frac{s-1}{t} \right| < 1 + \frac{1}{8t^2}, \quad 1 - e^{-\pi t} < |\Gamma + e^{\pi s i}| < 1 + e^{-\pi t}$$

ergibt sich, dass in diesem Gebiete die Ungleichung

$$(76) \quad |\varepsilon_9| < \frac{1}{2t^2}$$

erfüllt ist. Nach (54) folgt dann aus (75) und (76) für  $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ ,  $t \geq 50$

$$|\zeta(1-s)| < \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{\sigma-\frac{1}{2}} \log t \left( 1 - \frac{0.048}{\log t} \right) \left( 1 + \frac{1}{2t^2} \right) < \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{\sigma-\frac{1}{2}} \log t,$$

oder also für  $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0$ ,  $t \geq 50$

$$(77) \quad |\zeta(s)| < \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t.$$

21. Wir kehren jetzt zu der Funktion  $F(s)$  und der Ungleichung (50) zurück.

Die gefundenen verschiedenen Ungleichungen für  $|\zeta(s)|$  werden wir zur Abschätzung von  $|F(s)|$  in den entsprechenden Intervallen benutzen. Da bei

der Herleitung dieser Ungleichungen  $t \geq 50$  angenommen wurde, müssen wir im folgenden  $T - r \geq 50$  annehmen.

Aus der für  $\sigma > 1$  gültigen Ungleichung  $|\zeta(s)| \leq |\zeta(\sigma)|$  folgt erstens unmittelbar für  $\sigma \geq 0$

$$(78) \quad |F(s)| < \zeta\left(\frac{5}{4} + \sigma\right).$$

Zweitens folgt aus (54) für  $-\frac{1}{4} \leq \sigma \leq 0$

$$(79) \quad |F(s)| < \frac{1}{2} \{\log(T+t) + \log(T-t)\} < \log T.$$

Drittens erhalten wir für  $-\frac{5}{4} \leq \sigma \leq -\frac{1}{4}$  nach (56)

$$2|F(s)| < \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T+t) \left(1 - \frac{4}{(T+t)^2}\right)^{-1} + \\ + \left(\frac{T-t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T-t) \left(1 - \frac{4}{(T-t)^2}\right)^{-1}.$$

Wenn  $|t| < 2$  und  $T > 50$  angenommen wird, sind die Werte der Faktoren  $\left(1 - \frac{4}{(T+t)^2}\right)^{-1}$  und  $\left(1 - \frac{4}{(T-t)^2}\right)^{-1}$  kleiner als  $1 + \frac{5}{T^2}$ . Wenn wir

$$\psi(t) = \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T+t)$$

setzen, haben wir demnach

$$2|F(s)| < \left(1 + \frac{5}{T^2}\right) (\psi(t) + \psi(-t)).$$

Die zweite Ableitung von  $\psi(t)$  wird

$$\psi''(t) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{\frac{-4\sigma+17}{8}} \left\{ \sigma + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left(\sigma + \frac{1}{4}\right) \left(\sigma + \frac{9}{4}\right) \log(T+t) \right\}.$$

Das zweite Glied in den Klammern ist für  $-\frac{9}{4} < \sigma < -\frac{1}{4}$  positiv, und also wird

$\psi''(t) < 0$  für  $-\frac{5}{4} \leq \sigma \leq -\frac{1}{4}$ . Daraus folgt, dass

$$\psi(t) + \psi(-t) < 2\psi(0)$$

ist, und also

$$(80) \quad |F(s)| < \left(1 + \frac{5}{T^2}\right) \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log T.$$

Schliesslich finden wir nach (77) für  $-\frac{7}{4} < \sigma < -\frac{5}{4}$

$$2|F(s)| < \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log(T+t) + \left(\frac{T-t}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log(T-t).$$

In derselben Weise wie oben können wir hieraus schliessen, dass im Intervalle

$$-\frac{3}{2} < \sigma < -\frac{5}{4}$$

$$(81) \quad |F(s)| < \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log T$$

ist.

22. Wir betrachten jetzt das in der Ungleichung (50) rechts auftretende Integral.

Wenn wir

$$(82) \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{4r}\right), \quad \beta = \arccos\left(-\frac{5}{4r}\right)$$

setzen, so sind die Intervalle der Integrationsvariable  $\varphi$ , die denjenigen Intervallen von  $\sigma$  entsprechen, in welchen die obigen Ungleichungen (78), (79), (80) und (81) bestehen, der Reihe nach

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha, \quad \alpha < \varphi < \beta, \quad \beta < \varphi < \pi.$$

Hierbei ist  $r > \frac{5}{4}$  angenommen, weil dies für das Endresultat vorteilhaft ist.

Wir erhalten dann

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi < A \log \frac{T}{2\pi} + B \log \log T + C,$$

wo

$$A = -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \left(\sigma + \frac{1}{4}\right) d\varphi - \frac{1}{4\pi} \int_{\beta}^{\pi} \left(\sigma + \frac{5}{4}\right) d\varphi,$$

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{4},$$

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \zeta \left(\frac{5}{4} + \sigma\right) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left(1 + \frac{5}{T^2}\right) d\varphi,$$

und  $\sigma = r \cos \varphi$  ist. Nach (50) folgt hieraus weiter

$$|Q(T)| < A' \log T + B' \log \log T + C',$$

wo

$$A' = \frac{A}{q}, \quad B' = \frac{1}{4q}, \quad C' = \frac{1}{q} \left( C - A \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |F(0)| \right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} |R(50)|.$$

Wenn wir in der Formel für  $A$  die Integrationen ausführen, finden wir (vgl. (82))

$$\int_{\alpha}^{\pi} \left(\sigma + \frac{1}{4}\right) d\varphi = -r \sin \alpha + \frac{1}{4}(\pi - \alpha) = -\frac{1}{4} \left( \sqrt{16r^2 - 1} - \arccos \frac{1}{4r} \right),$$

$$\int_{\beta}^{\pi} \left(\sigma + \frac{5}{4}\right) d\varphi = -r \sin \beta + \frac{5}{4}(\pi - \beta) = -\frac{5}{4} \left( \sqrt{\frac{16r^2}{25} - 1} - \arccos \frac{5}{4r} \right).$$

Wenn wir zur Abkürzung  $\pi - \alpha = \gamma$ ,  $\pi - \beta = \delta$  setzen, können wir das Resultat in der folgenden Form schreiben:

$$A' = \frac{\text{tg } \gamma + 5 \text{ tg } \delta - (\gamma + 5 \delta)}{16 \pi q}.$$

Um das Minimum dieses Ausdruckes zu finden setzen wir seine erste Ableitung nach  $r$  gleich Null. Nach einigen Umformungen ergibt sich als Bedingung des Minimums

$$\text{tg } \gamma + 5 \text{ tg } \delta = 16 \pi A'.$$

Wenn wir  $r$  aus dieser Gleichung bestimmen, finden wir mit zwei Dezimalstellen  $r = 1,32$ . Mit diesem Werte  $r$  wird  $q = \log \frac{r}{\rho} = 0,563$  und

$$A' = 0,1361, \quad B' = 0,4422.$$

Von den Werten

$$\begin{aligned} \zeta(1,25) &= 4,5951, & \zeta(1,5) &= 2,6124, & \zeta(1,75) &= 1,9623, & \zeta(2) &= 1,6449, \\ \zeta(2,25) &= 1,4602, & \zeta(2,5) &= 1,3415, & \zeta(2,57) &= 1,3157 \end{aligned}$$

ausgehend erhalten wir weiter nach der Trapezregel, wenn wir beachten, dass die zweite Ableitung von  $\log \zeta\left(\frac{5}{4} + r \cos \varphi\right)$  nach  $\varphi$  positiv ist, und wenn wir

$$y_\nu = \log \zeta\left(\frac{5}{4} + \frac{\nu}{4}\right), \quad \varphi_\nu = \arccos \frac{\nu}{4r}, \quad (\nu = 0, 1, \dots, 5),$$

$$y_6 = \log \zeta(2,57), \quad \varphi_6 = 0$$

setzen,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \zeta\left(\frac{5}{4} + \sigma\right) d\varphi < \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^5 (y_\nu + y_{\nu+1})(\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}) = 0,1367$$

und also, da

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{\beta} \log\left(1 + \frac{5}{T^2}\right) d\varphi < \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \cdot \frac{5}{T^2} < \frac{5}{4 \cdot 50^2} = 0,0005$$

ist,  $C < 0,1372$ .

Es erübrigt noch eine obere Grenze von  $-\log |F(\sigma)| = -\log \Re \zeta\left(\frac{5}{4} + T i\right)$  zu berechnen. Nach (47) haben wir

$$(83) \quad \left| \log \zeta\left(\frac{5}{4} + t i\right) \right| \leq \log \zeta\left(\frac{5}{4}\right).$$

Wenn wir  $\log \zeta\left(\frac{5}{4} + t i\right) = x + i y$  setzen, so ist

$$(84) \quad \Re \zeta\left(\frac{5}{4} + t i\right) = e^x \cos y,$$

und weiter ist nach (83), wenn  $\log \zeta \left( \frac{5}{4} \right) = a$  gesetzt wird

$$(85) \quad x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Das Minimum von  $e^x \cos y$  im Bereiche (85) kann nur auf dem Rande desselben eintreten, und dann, wenn die Bedingungen

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2}, \quad y = a \sin y$$

erfüllt sind. Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich, wenn für die Zahl  $a$  ihr Wert  $1,525$  eingesetzt wird

$$x = -0,0721, \quad y = \pm 1,5233,$$

und der Wert des Minimums wird gleich  $0,0442$ .

Also ist  $|F(0)| = \Re \zeta \left( \frac{5}{4} + Ti \right) > 0,0442$  und somit

$$-\log |F(0)| < 3,1191.$$

Wir wollen schliesslich den durch (25) definierten Ausdruck  $R(T)$  abschätzen. Nach (43) ist

$$\left| 3J \left( \frac{1}{4} + \frac{Ti}{2} \right) \right| < \frac{1}{3 \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + T^2} \right)} < \frac{1}{3T},$$

und weiter ist

$$\left| \frac{T}{4} \log \left( 1 + \frac{1}{4T^2} \right) \right| < \frac{1}{16T},$$

$$\left| \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2T} \right| < \frac{1}{8T}.$$

Also wird

$$\frac{1}{\epsilon} |R(T)| < \frac{25}{48\pi T} < \frac{25}{48 \cdot 50\pi} = 0,0033.$$

Wir haben nun eine obere Grenze von allen in  $C'$  eingehenden Grössen bestimmt, und erhalten endlich

$$C' < 4,3491.$$

Hiermit ist die Ungleichung (39) bewiesen.

Nach den gemachten Voraussetzungen besteht dieselbe für  $T > 50 + r = 51,32$ . Durch die numerischen Rechnungen von GRAM, LINDELÖF und vom Verfasser<sup>1</sup> ist indessen die Lage sämtlicher Nullstellen von  $\zeta(s)$  im Intervalle  $|t| < 200$  schon genauer bestimmt. Dabei hat sich erwiesen, dass in diesem Intervalle stets  $|Q(T)| < 2$ , also bedeutend kleiner als nach (39) ausfällt. Die Abschätzung (39) ist in der Tat für jedes  $T \geq 2$  gültig.

---

<sup>1</sup> J. P. GRAM, *Note sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann* (Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1902). Abgedruckt in *Acta Mathematica*, Bd. 27.

E. LINDELÖF, *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, Bd. 31, 1902). Vgl. *Sur une formule sommatoire générale* (*Acta Mathematica*, Bd. 27).

R. J. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion* (Dissertation, Helsingfors 1916). Ich habe in dieser Arbeit 79 Nullstellen von  $\zeta(s)$  auf der Strecke  $\sigma = \frac{1}{2}$ ,  $0 < t < 200$  getrennt und zugleich bewiesen, dass diese Nullstellen die einzigen sind, deren imaginärer Teil zwischen 0 und 200 liegt.

