AUSZUG AUS EINEM BRIEFE DES HERRN LANDAU AN DEN HERAUSGEBER.

Göttingen, 24. 7. 1918.

Hochverehrter Herr Kollege!

. . . .

Der in Ihrer bekannten Arbeit *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note)* [Acta Mathematica, Bd. XXIX (1905), S. 101—181] bewiesene Satz A (S. 107—108) besagt: *Es sei* $\alpha > 0$, $F_\alpha(x)$ *Ihre spezielle ganze Funktion* (5) *oder irgend eine ganze Funktion von* x *oder auch nur z. B. auf dem durch ein komplexes* $x_0 \neq 0$ *gehenden Halbstrahl von* 0 *bis* ∞x_0 *definiert und stetig.*[1] *Es sei ferner*

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

konvergent (d. h., da wegen $\alpha > 0$ *in* $\omega = 0$ *sicher hineinintegriert werden kann,* $\lim\limits_{\Omega = \infty} \int\limits_0^\Omega$ *vorhanden). Dann konvergiert*

$$f(\Theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega \Theta x_0)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $0 \leqq \Theta \leqq 1$ *und zwar gleichmässig für* $\Theta_0 \leqq \Theta \leqq 1$, *wo* Θ_0 *irgend eine feste Zahl der Strecke* $0 < \Theta_0 < 1$ *ist.*

---

[1] Auch die Stetigkeit wird nicht voll gebraucht; doch ist dies für meine gegenwärtigen Bemerkungen unwesentlich.

Ich erlaube mir, Sie darauf aufmerksam zu machen, dass die gleichmässige Konvergenz von $f(\Theta x_0)$ auf der ganzen Strecke $0 \leqq \Theta \leqq 1$ besteht[1]; im Falle $\alpha = 1$ hat dies schon Herr HARDY in seiner Arbeit *Notes on some points in the integral calculus,* XXXI, *The uniform convergence of Borel's integral* [The Messenger of Mathematics, Ser. II, Bd. XL (1911), S. 161—165] gezeigt, aber nicht einfach genug.

Beweis: Da Sie gleichmässige Konvergenz für $\frac{1}{2^\alpha} \leqq \Theta \leqq 1$ schon bewiesen haben, darf ich mich auf $0 < \Theta < \frac{1}{2^\alpha}$ beschränken. Ich setze $\frac{1}{\alpha} = \beta$ und habe,

$$F_\alpha(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega)$$

[1] In meiner Arbeit ist die gleichmässige Konvergenz des Integrals

$$\text{(A)} \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\theta x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $0 \leqq \theta \leqq 1$ in dem Falle bewiesen, dass

$$F_\alpha(z) = k_0 + \frac{k_1}{\underline{|\alpha.1}} z + \frac{k_2}{\underline{|\alpha.2}} z^2 + \cdots + \frac{k_\nu}{\underline{\alpha.\nu}} z^\nu + \cdots,$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r};\ r > 0$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

konvergiert. (Cf. pag. 107, 108; 112, 113.)

Wenn dagegen nur die Integrabilität von

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\theta x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

und die Konvergenz von

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

vorausgesetzt wird, ist der Satz, wie Herr LANDAU richtig angibt, nur für den Fall $0 < \theta_0 \leqq \theta \leqq 1$ bewiesen.

Ich habe in der genannten Arbeit keinen Gebrauch gehabt für einen weitergehenden Satz als den darin bewiesenen.

Ich hatte mir jedoch vorbehalten, auf das Studium des Integrals (A) zurückzukommen, in dem Falle, dass von

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\theta x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

nur die Integrabilität vorausgesetzt wird (cf. p. 108, 111). Eine grössere Arbeit hierüber habe ich seit lange ausgearbeitet. *Mittag-Leffler.*

gesetzt, nachzuweisen, dass, wenn $\varphi(\omega)$ für $\omega \geqq 0$ reell und stetig ist, aus der Konvergenz von

$$\int_0^\infty \varphi(\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta \qquad (\beta > 0)$$

für $H > 0$ eine Ungleichung

$$\left| \int_H^\infty \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta \right| < \varrho(H)$$

folgt, wo $\varrho(H)$ von Θ frei ist und $\varrho(H) \to 0$ bei $H \to \infty$ ist. (Bei $\psi(\omega)$ gilt alsdann dasselbe.)

Ich wähle eine Zahl K, sodass $|\varphi(\omega)| < K$ für $0 \leqq \omega \leqq 1$ ist; und eine Zahl M, sodass für $\omega_1 \geqq 0, \omega_2 \geqq 0$ stets

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta \right| < M$$

ist; alsdann ist für $\omega_3 \geqq 0, \omega_4 \geqq 0$

$$(1) \qquad \left| \int_{\omega_3}^{\omega_4} \varphi(\Theta\,\omega)\, e^{-\Theta^\beta \omega^\beta}\, d\,\omega^\beta \right| < \frac{M}{\Theta^\beta}.$$

Ich setze ferner für $H > 0$ die Zahl μ gleich der grösseren der beiden Zahlen H und $\frac{1}{\Theta}$,

$$I_1 = \int_H^\mu \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta,\ I_2 = \int_\mu^\infty \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta.$$

(Die Konvergenz von I_2 ist ja bekannt.)

Es genügt,

$$|I_1| < \varrho_1(H),\ |I_2| < \varrho_2(H)$$

darzutun, wo $\varrho_1(H)$ und $\varrho_2(H)$ von Θ frei sind und bei $H \to \infty$ gegen 0 streben.

I_1 ist $= 0$, falls $H \geqq \frac{1}{\Theta}$; falls aber $H < \frac{1}{\Theta}$, ist

$$|I_1| \leqq \int_H^{\frac{1}{\Theta}} K\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta < \int_H^\infty K\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta = \varrho_1(H) \to 0.$$

Wegen $\Theta^\beta < \frac{1}{2^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} < 1$ ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für $\Omega > \mu$

$$\int_\mu^\Omega \varphi(\Theta\omega) e^{-\omega^\beta} d\omega^\beta = \int_\mu^\Omega e^{-(1-\Theta^\beta)\omega^\beta} \varphi(\Theta\omega) e^{-\Theta^\beta\omega^\beta} d\omega^\beta$$

$$= e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} \int_\mu^{\Omega'} \varphi(\Theta\omega) e^{-\Theta^\beta\omega^\beta} d\omega^\beta \quad (\mu \leqq \Omega' \leqq \Omega),$$

also nach (1)

$$\left| \int_\mu^\Omega \varphi(\Theta\omega) e^{-\omega^\beta} d\omega^\beta \right| < e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} \frac{M}{\Theta^\beta},$$

folglich wegen $\Theta^\beta < \frac{1}{2}$

$$|I_2| \leqq e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} M \cdot \frac{1}{\Theta^\beta} < e^{-\frac{1}{2}\mu^\beta} M \cdot 4 e^{\frac{1}{4\Theta^\beta}},$$

also wegen $\frac{1}{\Theta} \leqq \mu$

$$|I_2| < e^{-\frac{1}{2}\mu^\beta} M \cdot 4 e^{\frac{1}{4}\mu^\beta} = 4 M e^{-\frac{1}{4}\mu^\beta},$$

folglich wegen $\mu \geqq H$

$$|I_2| < 4 M e^{-\frac{1}{4}H^\beta} = \varrho_2(H) \to 0.$$

. . . .

Edmund Landau.