

# SUR LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES ET SUR L'EXPRESSION DE LA FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE PAR UNE DÉRIVÉE GÉNÉRALISÉE.

PAR

J. KAMPÉ DE FÉRIET

à PARIS.

(Extrait d'une lettre à M. P. APPELL.)

Je vais m'efforcer de vous présenter un résumé très bref de l'état actuel des recherches que j'ai entreprises dans ma Thèse »sur les fonctions hypersphériques», en suivant la voie que vous avez indiquée dans votre Mémoire<sup>1</sup> des »Rendiconti» de 1913.

Au Chapitre IV de ma Thèse (p. 69) j'ai donné les formules qui permettent de calculer les coefficients  $A_{m_1, \dots, m_p}$  et  $B_{m_1, \dots, m_p}$  du développement d'une fonction  $F(x_1, \dots, x_p)$  de  $p$  variables réelles, sous l'une ou l'autre forme:

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_p) = \sum A_{m_1, \dots, m_p} V_{m_1, \dots, m_p}^{(s)}(x_1, \dots, x_p),$$

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_p) = \sum B_{m_1, \dots, m_p} U_{m_1, \dots, m_p}^{(s)}(x_1, \dots, x_p);$$

mais comme je l'ai écrit au début même de ce Chapitre: »reste à savoir dans quels cas la série (1), ..., converge effectivement et représente la fonction  $F(x_1, \dots, x_p)$  dans le domaine  $X_p = 1 - x_1^2 - \dots - x_p^2 \geq 0$ ; nous ne ferons pour le moment qu'effleurer la question». Et je démontre (p. 70) que si les  $\left| \frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_p^{m_p}} \right|$  vérifient une certaine inégalité on peut affirmer la convergence de la série (1). Pour la

---

<sup>1</sup> P. APPELL: »Les polynomes  $V_{m, n}$  d'HERMITE et leurs analogues rattachés aux potentiels à  $q$  variables». (Rend. Circ. Math. di Palermo, t. XXXVI, 1913, p. 203—212).

série (2) j'obtiens des résultats plus généraux grâce à ce que j'ai pu former (p. 73) une majorante qui lui est simplement liée.

Mais au point de vue de l'Analyse Moderne la question de la représentation d'une fonction arbitraire  $F(x_1, \dots, x_p)$  par une série de fonctions hypersphériques  $U^{(s)}$  ou  $V^{(s)}$  était loin d'être épuisée; je considérais seulement ce Chapitre IV comme la base de travaux ultérieurs. L'idée se présentait naturellement d'essayer de souder la question à la Théorie générale des équations intégrales.

Les résultats que j'ai obtenus dans cette voie sont résumés en partie dans une Note des Comptes-Rendus (Tome 162 — p. 747 — séance du 15 mai 1916): «sur une équation intégrale de seconde espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales». Considérant sur l'hypersphère  $S$  deux points  $M(x_1, \dots, x_n, \varphi)$  et  $P(y_1, \dots, y_n, \psi)$ , je démontre qu'une fonction hypersphérique  $U$  vérifie la relation:

$$2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} U(P) = \mu(\mu+n) \int_{(S)}^{n+1} V_n(M, P) U(M) d\sigma_{n+1}.$$

Dans cette équation intégrale — en posant:

$$\cos \gamma = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + \sqrt{X_n} \sqrt{Y_n} \cos(\varphi - \psi),$$

$$\xi = \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

le noyau  $V_n(M, P)$  est une fonction  $V_n(\xi)$  dont je donne l'expression:

$$n V_n(\xi) = \int_0^1 \frac{1}{v} [(1 - \xi v)^{-n} - 1] (1 - v)^{\frac{n-1}{2}} dv.$$

Je suis d'ailleurs revenu sur la question et dans une nouvelle Note aux Comptes-Rendus (Tome 164 — p. 856, — séance du 29 mai 1917): «sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales», j'ai indiqué «un procédé permettant de former sans peine un grand nombre de noyaux nouveaux». Je pars d'un théorème que j'ai énoncé (avec une seule variable  $x$ ):

Soit  $F(x)$  une fonction représentée, dans l'intervalle  $(-1 \leq x \leq +1)$ , par la série uniformément convergente:

$$F(x) = \sum A_n U_n^{(s)}(x),$$

la fonction :

$$K(x, y) = \int_0^\pi F[xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \cos \omega] \sin \omega \, d\omega$$

admet dans le domaine  $(-1 \leq x, y \leq +1)$  le développement :

$$K(x, y) = 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum A_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+s)} U_n^{(s)}(x) U_n^{(s)}(y).$$

Bien que je n'aie pas fait allusion à ceci dans ma Note, je crois qu'en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $\frac{x}{\sqrt{s}}$  et  $\frac{y}{\sqrt{s}}$  et faisant tendre  $s$  vers l'infini, on doit pouvoir étendre<sup>1</sup> ces résultats aux polynômes d'HERMITE :

$$e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

Peut-être tombe-t-on très simplement ainsi sur certains des noyaux qui ont été obtenus par M<sup>me</sup> VERA MYLLER-LEBEDEV dans l'étude qu'elle a faite de ces polynômes d'HERMITE [Math. Ann. 64 (1907) p. 388].

Les résultats acquis dans ces deux Notes permettront sans doute d'utiliser les théorèmes généraux de la Théorie des équations intégrales dans l'étude de la convergence des séries de fonctions hypersphériques et de la représentation d'une fonction arbitraire par de telles séries.

Je passe maintenant à un autre sujet voisinant avec celui qui précède plutôt que le prolongeant, mais sur lequel je n'ai encore rien publié.

Dans son Mémoire sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique, JACOBI a démontré la formule :

$$F(-n, \alpha + n, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + n)} x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1} (1-x)^{\alpha+n-\gamma}]$$

( $n$  désignant un entier positif).

<sup>1</sup> En utilisant la formule que vous avez établie :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ s^{-\frac{n}{2}} U_n^{(s)} \left( \frac{x}{\sqrt{s}} \right) \right] = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

Je me suis demandé ce que donnerait ici l'introduction du symbole  $R^{(\lambda)}$  de la dérivée généralisée de RIEMANN-LIOUVILLE; ceci m'a conduit à une expression symbolique vraiment curieuse d'une fonction hypergéométrique quelconque  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ .

Quand  $\lambda$  est un nombre réel positif, on pose par définition:

$$R^{(\lambda)} f(x) = \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} f(xt) dt = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} f(t) dt,$$

d'où, en utilisant la formule de transformation d'une intégrale double due à LEJEUNE-DIRICHLET:

$$R^{(\mu+\lambda)} f(x) = R^{(\mu)} [R^{(\lambda)} f(x)] = R^{(\lambda)} [R^{(\mu)} f(x)]; \quad (\lambda > 0 \text{ et } \mu > 0).$$

Si  $f(x)$  est donnée sous la forme:

$$f(x) = x^{\rho-1} \sum_0^{+\infty} a_n x^n \quad (\rho > 0)$$

on a:

$$R^{(\lambda)} f(x) = x^{\lambda+\rho-1} \sum_0^{+\infty} \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\lambda+\rho+n)} a_n x^n;$$

et la fonction:  $x^{1-\rho-\lambda} R^{(\lambda)} f(x)$ , admet la même étoile principale (au sens de M. MITTAG-LEFFLER) que:  $x^{1-\rho} f(x)$ .

On pose ensuite:

$$R^{(0)} f(x) = f(x).$$

En désignant toujours par  $\lambda$  un nombre positif, on peut définir  $R^{(-\lambda)} f(x)$  de la façon suivante: soit  $k$  le plus petit nombre entier tel que  $k - \lambda$  soit positif, on a:

$$R^{(-\lambda)} f(x) = \frac{d^k}{d x^k} [R^{(k-\lambda)} f(x)];$$

on en déduit notamment, pour  $0 < \lambda < 1$ :

$$R^{(\lambda)} [R^{(-\lambda)} f(x)] = f(x);$$

en effet, la relation:

$$R^{(\lambda)} [\varphi(x)] = f(x),$$

équivalent alors à l'équation intégrale d'ABEL-VOLTERRA:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} \varphi(t) dt = f(x),$$

qui a pour solution

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\lambda} f(t) dt = \frac{d}{dx} [R^{(1-\lambda)} f(x)]. \quad -$$

Avec les définitions précédentes, si  $n$  est un nombre entier positif:

$$R^{(-n)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

et  $R^{(n)} f(x)$  coïncide avec l'intégrale de  $f(x)$  prise  $n$  fois entre les limites 0 et  $x$ .

Ceci rappelé, en rapprochant de la définition de  $R^{(\lambda)}$ , l'une des expressions classiques de  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  sous forme d'une intégrale définie:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx)^{-\beta} dt,$$

ou:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} (1-tx)^{\beta-\gamma} dt$$

j'obtiens bien simplement des expressions du type suivant:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta}]$$

ou:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} R^{(\alpha)} [x^{\gamma-\alpha-1} (1-x)^{\beta-\gamma}]$$

la dernière en particulier, généralise complètement celle de JACOBI. — De cette représentation par une dérivée généralisée de RIEMANN-LIOUVILLE, la plupart des propriétés de  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  doivent pouvoir se déduire d'une manière élégante, car la fonction, dont elle est ainsi la dérivée  $R^{(\lambda)}$ , est le binôme  $x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta}$ , dont les propriétés sont, pour ainsi dire, évidentes; et il y a souvent une étroite liaison entre les propriétés de  $f(x)$  et celles de  $R^{(\lambda)} f(x)$ . Je vais esquisser une revue rapide des propriétés de la fonction hypergéométrique, en les déduisant uniquement de son expression au moyen du symbole  $R^{(\lambda)}$ . —

Comme premier exemple, si dans la relation:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta}] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} R^{(\gamma-\beta)} [x^{\beta-1} (1-x)^{-\alpha}]$$

on fait  $\beta = \gamma$ , on obtient:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma(\alpha)} R^{(\gamma-a)} [x^{\alpha-1} (1-x)^{-\gamma}] = \frac{\Gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} (1-x)^{-a},$$

qui correspond à la propriété élémentaire:

$$F(\alpha, \gamma, \gamma, x) = (1-x)^{-a}.$$

Voici ensuite un des types d'artifices qui mènent aux nombreuses équations aux différences finies qui lient trois fonctions contigues:

$$\begin{aligned} x^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) &= R^{(\gamma-a-1)} [x^{\alpha} (1-x)^{-\beta}] \\ &= R^{(\gamma-a)} \frac{d}{dx} [x^{\alpha} (1-x)^{-\beta}] \\ &= R^{(\gamma-a)} [\alpha x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta} + \beta x^{\alpha} (1-x)^{-(\beta+1)}] \\ &= \alpha \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \beta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)} x^{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x), \end{aligned}$$

d'où:

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \frac{\beta}{\gamma} x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x).$$

En variant le procédé on parvient aux autres relations connues; par exemple, en groupant autrement les termes du second membre (3<sup>e</sup> ligne) de l'égalité ci-dessus, on peut écrire:

$$x^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) = R^{(\gamma-a)} [(\alpha-\beta) x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta} + \beta x^{\alpha-1} (1-x)^{-(\beta+1)}]$$

d'où:

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) = (\alpha-\beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x).$$

L'emploi répété d'artifices analogues, toujours faciles à imaginer, conduit aux autres équations aux différences finies. —

L'équation différentielle de GAUSS peut aussi se déduire aisément de l'expression de  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  au moyen de  $R^{(\lambda)}$ , en adaptant à la dérivation d'indice  $\lambda$  le procédé souvent employé pour tirer l'équation différentielle des polynômes de LEGENDRE de la formule d'OLINDE RODRIGUES.

Considérons, en effet, le binôme:

$$u(x) = x^\mu (1-x)^{\nu-\mu}$$

il vérifie l'équation différentielle:

$$(E) \quad x(1-x) \frac{du}{dx} - (\mu - \nu x) u = 0.$$

Prenons la dérivée  $R^{(\lambda)}$  de cette équation, en nous appuyant sur la formule générale:

$$R^{(\lambda)} [P_q(x) f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{k=q} (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{d^k P_q}{dx^k} R^{(\lambda+k)} f,$$

où  $P_q(x)$  désigne un polynôme de degré  $q$ ; d'où:

$$R^{(\lambda)} \left[ x(1-x) \frac{du}{dx} \right] = x(1-x) R^{(\lambda)} \left[ \frac{du}{dx} \right] - \lambda(1-2x) R^{(\lambda+1)} \left[ \frac{du}{dx} \right] - \lambda(\lambda+1) R^{(\lambda+2)} \left[ \frac{du}{dx} \right]$$

$$R^{(\lambda)} [(\mu - \nu x) u] = (\mu - \nu x) R^{(\lambda)} u + \lambda \nu R^{(\lambda+1)} u.$$

Si nous introduisons alors la fonction:

$$y(x) = R^{(\lambda+1)} u(x),$$

comme<sup>1</sup>,

$$R^{(\lambda)} \left[ \frac{du}{dx} \right] = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad R^{(\lambda+1)} \left[ \frac{du}{dx} \right] = R^{(\lambda)} u = \frac{dy}{dx}, \quad R^{(\lambda+2)} \left[ \frac{du}{dx} \right] = y,$$

nous voyons que la dérivée  $R^{(\lambda)}$  de (E) peut s'écrire sous la forme:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [-(\lambda + \mu) + (2\lambda + \nu)x] \frac{dy}{dx} - \lambda(\lambda + \nu + 1) y = 0.$$

Donnons d'abord aux paramètres les valeurs:

$$\lambda = \gamma - \alpha - 1, \quad \mu = \alpha - 1, \quad \nu - \mu = -\beta,$$

nous obtenons pour la fonction:

$$y(x) = R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta}]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

<sup>1</sup> En général on a:  $R^{(\lambda)} \left[ \frac{du}{dx} \right] = R^{(\lambda-1)} u - \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} u(0) = \frac{d}{dx} [R^{(\lambda)} u] - \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} u(0)$ ; mais ici, l'interversion des symboles  $R^{(\lambda)}$  et  $\frac{d}{dx}$  est légitime parce que  $u(0) = 0$ . —

l'équation différentielle:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x] \frac{dy}{dx} - (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)y = 0.$$

Faisons ensuite:

$$\lambda = -\alpha, \mu = \alpha - \gamma, \nu - \mu = -(\beta + 1 - \gamma),$$

nous constatons que la fonction:

$$\begin{aligned} y(x) &= R^{(1-\alpha)} [x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{-(\beta+1-\gamma)}] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)} x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \end{aligned}$$

satisfait à l'équation différentielle:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Ces deux résultats sont bien conformes à la théorie classique de l'équation différentielle de GAUSS. —

Voici une application d'un autre genre; nous savons déjà, d'après une propriété de  $R^{(\lambda)}$  rappelée plus haut, que  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  admet même étoile principale<sup>1</sup> que  $(1-x)^{-\beta}$ ; partons d'un développement en série de polynômes, uniformément convergent, de la fonction  $(1-x)^{-\beta}$ , (on sait effectivement former de tels développements, valables dans des domaines très étendus):

$$(1-x)^{-\beta} = \sum_0^{+\infty} P_n(x),$$

où:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k.$$

Nous en déduisons pour la fonction hypergéométrique le développement:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_0^{+\infty} P_n(x),$$

le polynôme  $P_n(x)$  ayant pour expression:

---

<sup>1</sup> Il résulte aussi de ces propriétés, qu'au point singulier  $x=1$  (sommet de l'étoile) l'ordre de  $(1-x)^{-\beta}$  étant  $\beta$ , celui de  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  sera:  $\alpha + \beta - \gamma$ . En effet, l'ordre de  $f(x)$  étant  $\omega = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log n}$  celui de  $R^{(\lambda)} f(x)$  est:  $\omega' = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\lambda+\rho+n)} a_n}{\log n} = \omega - \lambda$ .



Les divers développements de  $f(x)$  que M. NIELS NIELSEN considère rentrent tous dans la forme:

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} A_n x^{\lambda_n} (1-x)^{\mu_n}.$$

Bornons-nous au cas où

$$p = 1;$$

la fonction  $\varphi(x)$  déduite de  $f(x)$  par l'opération  $\delta_1(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \delta_1(\alpha, \beta) f(x) \\ &= x^{1-\beta_1} R^{(\beta_1-\alpha_1)} [x^{\alpha_1-1} f(x)] \end{aligned}$$

admettra le développement suivant:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_0^{+\infty} A_n x^{1-\beta_1} R^{(\beta_1-\alpha_1)} [x^{\alpha_1+\lambda_n-1} (1-x)^{\mu_n}] \\ &= \sum_0^{+\infty} A_n \frac{\Gamma(\alpha_1 + \lambda_n)}{\Gamma(\beta_1 + \lambda_n)} x^{\lambda_n} F(-\mu_n, \alpha_1 + \lambda_n, \beta_1 + \lambda_n, x). \end{aligned}$$

Dans son mémoire M. NIELS NIELSEN a notamment étudié une série déjà rencontrée par PUISEUX, SCHLÖMILCH et PETERSEN:

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} A_n x^n (1-x)^n;$$

la fonction  $\varphi(x)$ , qui s'en déduit, est ici: ( $\lambda_n = \mu_n = n$ )

$$\varphi(x) = \sum_0^{+\infty} A_n \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)} x^n F(-n, \alpha_1 + n, \beta_1 + n, x).$$

C'est bien là le développement en série de fonctions hypergéométriques rencontré par M. NIELS NIELSEN (Chap. III, § IX, formule 7).

J'espère vous avoir montré par ces quelques exemples, pris un peu au hasard, que la représentation de  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  par la dérivée généralisée  $R^{(\lambda)}$ , de RIEMANN-LIOUVILLE, du binôme  $x^\mu (1-x)^\nu$ , (dont j'ai donné plus haut un ou deux types) ne se réduit pas à un symbolisme stérile, mais pourrait devenir un instrument commode pour une exposition synthétique des propriétés des fonctions hypergéométriques.

Dans ce court exposé j'ai passé sous silence, notamment, toutes les questions de convergence, admettant plusieurs fois implicitement des propositions comme celle ci:

$$R^{(\lambda)} \left[ \sum_0^{+\infty} f_n(x) \right] = \sum_0^{+\infty} R^{(\lambda)} f_n(x),$$

de même je n'ai pas examiné les inégalités restrictives auxquelles devraient satisfaire  $\alpha, \beta, \gamma$ , pour la validité de certaines des expressions formelles obtenues.

Paris, le 8 novembre 1917.

