DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

PAR

TORSTEN CARLEMAN

à UPSAL.

À Monsieur G. MITTAG-LEFFLER à l'occasion de son soixante quinzième anniversaire et en témoignage de ma reconnaissance et de mon admiration pour son œuvre.

TORSTEN CARLEMAN.

POINCARÉ et d'autres après lui ont étudié les propriétés asymptotiques quand x tend vers l'infini des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n u}{d x^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + P_2(x) \frac{d^{n-2} u}{d x^{n-2}} + \cdots + P_n(x)\, u = 0 \tag{1}$$

en supposant que les $P_k(x)$ admettent des développements asymptotiques

$$P_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k\nu} \frac{1}{x^\nu} \tag{2}$$

les $a_{k\nu}$ étant indépendants de x. On a sur cette question le théorème suivant. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les racines de l'équation

$$\alpha^n + a_{10}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n0} = 0 \tag{3}$$

supposées différentes entre elles.[1] Alors l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots u_n(x)$, qui sont représentées asymptotiquement par des développements de la forme

[1] On suppose ordinairement que les parties réelles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont différentes entre elles.

$$u_k(x) \sim e^{\alpha_k x} x^{-\lambda_k} \left(c_{k0} + \frac{c_{k1}}{x} + \frac{c_{k2}}{x^2} + \cdots\right). \tag{4}$$

Nous nous proposons ici de démontrer qu'un résultat analogue subsiste si l'on suppose que les coefficients $a_{k\nu}$, au lieu d'être constants, sont des fonctions périodiques de x de même période T. Nous avons seulement à remplacer dans (4) les α_ν par les exposants caractéristiques de l'équation

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_{10}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n0}(x)\,u = 0 \tag{5}$$

et les $c_{k\nu}$ par des fonctions périodiques de x de période T. Cependant il faut supposer ces exposants non congrus entre eux $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est représentée asymptotiquement par la série

$$a_0(x) + \frac{a_1(x)}{x} + \frac{a_2(x)}{x^2} + \cdots, \tag{6}$$

où $a_\nu(x)$ sont des fonctions périodiques de période T, si toutes les fonctions $f_\nu(x)$ définies par

$$f(x) = a_0(x) + \frac{a_1(x)}{x} + \frac{a_2(x)}{x^2} + \cdots + \frac{a_\nu(x) + f_\nu(x)}{x^\nu} \tag{7}$$

tendent vers zéro, lorsque x tend vers l'infini. En remarquant qu'une fonction périodique qui tend vers zéro pour $x \to \infty$ est identiquement nulle, il résulte de cette définition qu'à une fonction $f(x)$ donnée ne correspond qu'un seul développement asymptotique.

Nous montrerons d'abord comment on peut déterminer les coefficients $c_0(x)$, $c_1(x), \ldots c_\nu(x), \ldots$ dans la série

$$e^{\alpha x} \sum \frac{c_\nu(x)}{x^{\nu+\lambda}}$$

qui correspond à l'exposant caractéristique α de (5). En posant dans l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(x)\frac{1}{x^\nu}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(x)\frac{1}{x^\nu}\right)\cdot y = 0 \tag{8}$$

$y = e^{\alpha x} u$ nous obtenons une équation de même forme en u

$$\frac{d^n u}{d x^n} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{1\nu}(x) \frac{1}{x^\nu}\right) \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}(x) \frac{1}{x^\nu}\right) u = 0. \tag{9}$$

L'équation à coefficients périodiques

$$L(u) = \frac{d^n u}{d x^n} + b_{10}(x) \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + b_{n0}(x)\, u = 0 \tag{10}$$

admet donc un système fondamental de la forme

$$\begin{aligned} U_1(x) &= u_1(x) \\ U_2(x) &= e^{\beta_2 x} u_2(x) \\ U_3(x) &= e^{\beta_3 x} u_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n(x) &= e^{\beta_n x} u_n(x), \end{aligned}$$

où $u_1(x),\ u_2(x), \ldots u_n(x)$ sont des fonctions périodiques de x et $0,\ \beta_2, \ldots \beta_n$ des quantités non congrues entre elles $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$. En posant dans (9)

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\frac{du}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu' - (\nu - 1 + \lambda) c_{\nu-1}}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu'' - 2(\nu - 1 + \lambda) c_{\nu-1}' + (\nu - 2 + \lambda)(\nu - 1 + \lambda) c_{\nu-2}}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^p u}{d x^p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{s=0}^{p} c_{\nu-s}^{(p-s)} (-1)^s \binom{p}{s} \binom{\nu - 1 + \lambda}{s} \underline{|s}}{x^{\nu+\lambda}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_{p\nu}}{x^{\nu+\lambda}},$$ [1]

$c_\nu^{(q)}$ désignant la dérivée q-ième de la fonction périodique $c_\nu(x)$, nous obtenons, en annulant les coefficients de $\frac{1}{x^{\nu+\lambda}}$ $(\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$ les équations suivantes

$$L(c_0) = 0 \tag{12}$$

[1] Dans ces formules il faut remplacer chaque c_ν à indice négatif par zéro.

(12') $L(c_1) - \lambda(n c_0^{(n-1)} + (n-1) b_{10} c_0^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0} c_0) + b_{11} c_0^{(n-1)} + \cdots + b_{n1} c_0 = 0$

. . . .

(13)
$$\begin{gathered} L(c_\nu) - (\nu + \lambda - 1)(n c_{\nu-1}^{(n-1)} + (n-1) b_{10} c_{\nu-1}^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0} c_{\nu-1}) + \\ + b_{11} c_{\nu-1}^{(n-1)} + b_{21} c_{\nu-1}^{(n-2)} + \cdots + b_{n1} c_{\nu-1} + \\ + \text{termes contenant } c_{\nu-2},\ c_{\nu-3}, \ldots \text{ et leurs dérivées} = 0. \end{gathered}$$

Avant d'aller plus loin étudions l'équation non homogène

(14)
$$L(u) = \frac{d^n u}{dx^n} + b_{10}(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + b_{n0}(x) u = f(x)$$

où $f(x)$ admet la période T.

Pour plus de simplicité nous posons dans la suite $b_{p0}(x) = b_p(x)$. Désignons par W le déterminant wronskien

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_n \\ U_1' & U_2' & \ldots & U_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^{(n-1)} & U_2^{(n-1)} & \ldots & U_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

et par $W_i(x)$ les dérivées partielles de ce déterminant par rapport à $U_i^{(n-1)}$. Alors la solution générale de (14) peut s'écrire

(15)
$$\begin{gathered} u = u_1(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_1(x)}{W} f(x)\,dx + k_1\right) + e^{\beta_2 x} u_2(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_2(x)}{W} f(x)\,dx + k_2\right) + \\ + \cdots + e^{\beta_n x} u_n(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_n(x)}{W} f(x)\,dx + k_n\right) \end{gathered}$$

où $k_1, k_2, \ldots k_n$ sont des constantes arbitraires. On voit aisément que pour $i > 1$ $\frac{W_i(x)}{W(x)}$ est égal à $e^{-\beta_i x}$ multiplié par une fonction périodique de x, tandis que $\frac{W_1(x)}{W(x)}$ est périodique.

En écrivant[1]

---

[1] Ici nous aurons besoin de l'hypothèse qu'aucun des β_p ne peut être un multiple positif ou négatif ou nul de $\frac{2\pi i}{T}$.

$$e^{\beta_p x}\cdot f(x)\frac{W_p(x)}{W(x)}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_{p\nu}e^{\frac{2\pi i\nu x}{T}}$$

on aura

$$e^{\beta_p x}\left[\int_{x_0}^{x}\frac{W_p(x)}{W(x)}f(x)\,dx+k_p\right]=$$

$$=e^{\beta_p x}\left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_{p\nu}\frac{e^{\left(\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p\right)x}}{\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p}-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_{p\nu}\frac{e^{\left(\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p\right)x_0}}{\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p}+k_p\right].$$ [1]

Il s'ensuit que $k_2, k_3, \ldots k_n$ peuvent être choisis de telle manière que la somme des $n-1$ derniers termes de (15) devient une fonction périodique. Cela posé, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que (14) possède une solution périodique $u(x)$ est que

$$\int_0^T\omega(x)f(x)\,dx=\int_x^{x+T}\omega(x)f(x)\,dx=0, \tag{16}$$

où

$$\omega(x)=\frac{W_1(x)}{W(x)}.$$

Cette condition remplie, il existe une infinité de solutions périodiques données par l'expression

$$u(x)+ku_1(x)$$

k étant une constante arbitraire.[2] $\omega(x)$ ne peut pas être identiquement nul dans aucun intervalle. L'hypothèse que $\omega(x)=0$ entraîne, en effet, que tous les mineurs du déterminant wronskien $W(x)$ par rapport à la première colonne s'annulent identiquement ce qui contredit l'inégalité $W\neq 0$.

On peut démontrer comme il suit que l'hypothèse que $0, \beta_2, \ldots \beta_n$ sont non congrus entre eux $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$ entraîne l'inégalité

---

[1] La série $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_{p\nu}e^{\frac{2\pi i\nu x}{T}}$ n'est pas nécessairement convergente. Néanmoins on peut, dans ce cas, d'après la théorie des séries de Fourier, la traiter comme une série convergente.

[2] Par un lemme énoncé p. 331 on trouve que chaque solution périodique est de cette forme.

$$(18)\qquad \int_0^T \omega(x)\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right)dx \neq 0$$

Considérons l'équation linéaire

$$(19)\qquad L(u) + \varrho\,\overline{\omega(x)}\,\overline{u_1(x)}\,u = 0$$

qui dépend d'un paramètre ϱ. Les solutions de (19) $u_p^*(x,\varrho)$ $(p = 1, 2, \ldots n)$ qui remplissent les conditions

$$\frac{d^\nu u_p^*}{dx^\nu} = \begin{matrix} 0 & \nu \neq p-1 \\ 1 & \nu = p-1 \end{matrix} \quad (\nu < n)$$

sont des fonctions entières de ϱ et forment un système fondamental. D'après les propriétés des équations linéaires à coefficients périodiques on a

$$(20)\qquad u_p^*(x+T) = \sum_{r=1}^{n} H_{pr}\,u_r^*(x),$$

où H_{pq} sont des constantes qui dépendent de ϱ. Il en résulte

$$(21)\qquad H_{pq} = \frac{d^{q-1}u_p^*(T)}{dT^{q-1}},$$

d'où l'on conclut que les H_{pq} sont des fonctions entières de ϱ. En désignant par β un exposant caractéristique de (19) et en posant $e^{\beta T} = z$ nous avons

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} H_{11}-z & H_{12} & \ldots H_{1n} \\ H_{21} & H_{22}-z & \ldots H_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{n1} & H_{n2} & \ldots H_{nn}-z \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités $0, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ étant toutes non congrues entre elles $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$, on voit que l'équation (22) pour $\varrho = 0$ a toutes ses racines différentes entre elles. On voit donc qu'il existe une série de puissances

$$\beta = k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots$$

telle que

$$z = e^\beta = e^{k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots}$$

satisfait à (22). De là on déduit aisément qu'il existe une série

$$u_1(x) + \varrho v_1(x) + \varrho^2 v_2(x) + \cdots$$

à coefficients périodiques, telle que

$$e^{(k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots)x}[u_1(x) + \varrho v_1(x) + \varrho^2 v_2(x) + \cdots]$$

soit une solution de (19) pour $|\varrho|$ suffisamment petit. En portant cette expression dans (19) on trouve, en considérant le coefficient de ϱ,

$$L(v_1) + k_1\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right) + \overline{\omega(x)}\,\overline{u_1(x)}\,u_1(x) = 0.$$

D'après (16) il faut avoir

$$k_1\int_0^T\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right)\omega(x)\,dx + {}$$

$$+\int_0^T|\omega(x)|^2\,|u_1(x)|^2\,dx = 0.$$

Donc

$$\int_0^T\left[n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right]\omega(x)\,dx \neq 0$$

c. q. f. d.

En nous reportant aux formules (12) et (13) nous voyons que $c_0(x)$ peut être pris égal à $u_1(x)$, (12') se resout par une fonction périodique $c_1(x)$ si

$$\lambda\int_0^T(n\,u_1^{(n-1)} + (n-1)\,b_{10}\,u_1^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0}\,u_1)\,\omega(x)\,dx - {}$$
$$-\int_0^T(b_{11}\,u_1^{(n-1)} + b_{21}\,u_1^{(n-2)} + \cdots + b_{n1}\,u_1)\,\omega(x)\,dx = 0. \tag{23}$$

En vertu de (18) il est toujours possible de déterminer λ de manière à satisfaire à cette équation. Si $c_1^*(x)$ est une solution périodique particulière de (12') la solution périodique la plus générale devient

$$c_1(x) = c_1^*(x) + \gamma_1\,u_1(x),$$

où γ_1 est une constante arbitraire. En portant les valeurs trouvées pour $c_0(x)$ et $c_1(x)$ dans (13) pour $\nu = 2$ nous obtenons

$$L(c_2) - (\lambda + 1) H(c_1^* + \gamma_1 u_1) + G(c_1^* + \gamma_1 u_1) + P(c_0) = 0, \tag{24}$$

où $P(c_0)$ est une expression indépendant de c_2 et c_1 et

$$H(u) = n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + (n-1)\, b_{10}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1,0}(x)\, u,$$

$$G(u) = b_{11}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + b_{21}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n1}(x)\, u.$$

Pour que cette équation (24) admette une solution périodique $c_2(x)$ il faut choisir γ_1 de telle manière que

$$\int_0^T \gamma_1((\lambda+1) H(u_1) - G(u_1))\, \omega(x)\, dx + \int_0^T [(\lambda+1) H(c_1^*) - G(c_1^*) - P(c_0)]\, \omega(x)\, dx = 0.$$

Cela est toujours possible parce que, en vertu de (23) et (18)

$$\int_0^T [(\lambda+1) H(u_1) - G(u_1)]\, \omega(x)\, dx = \int_0^T H(u_1)\, \omega(x)\, dx +$$
$$+ \int_0^T [\lambda H(u_1) - G(u_1)]\, \omega(x)\, dx = \int_0^T H(u_1)\, \omega(x)\, dx \neq 0.$$

On obtient pour c_2 une expression

$$c_2 = c_2^* + \gamma_2 u_1,$$

dépendant d'une constante arbitraire γ_2. En continuant ainsi on peut déterminer de proche en proche tous les coefficients $c_0(x), c_1(x), \ldots c_\nu(x), \ldots.$ En effet, supposons qu'on ait obtenu pour $c_{\nu-1}(x)$ l'expression

$$c_{\nu-1}(x) = c_{\nu-1}^*(x) + \gamma_{\nu-1} u_1(x)$$

qui contient une constante arbitraire $\gamma_{\nu-1}$. L'équation (13) peut être écrite

$$L(c_\nu) - (\lambda + \nu - 1)[H(c_{\nu-1}^*) + \gamma_{\nu-1} H(u_1)] + G(c_{\nu-1}^*) + \gamma_{\nu-1} G(u_1) +$$
$$+ P(c_0, c_1, \ldots c_{\nu-2}) = 0,$$

où $P(c_0, c_1, \dots c_{\nu-2})$ est indépendant de $c_{\nu-1}$ et de c_ν. Pour que cette équation admette une solution périodique c_ν il faut et il suffit que

$$\gamma_{\nu-1}\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx+\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(c^*_{\nu-1})-$$
$$-G(c^*_{\nu-1})-P(c_0, c_1, \dots c_{\nu-2})]\,\omega\,dx=0.$$

Cette équation détermine uniquement $\gamma_{\nu-1}$ parce que

$$\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx=(\nu-1)\int_0^T H(u_1)\,\omega\,dx+$$
$$+\int_0^T [(\lambda H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx=(\nu-1)\int_0^T H(u_1)\,\omega\,dx\neq 0.$$

Il est donc clair qu'à chaque exposant caractéristique correspond une et une seule série asymptotique de la forme

$$e^{ax}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu(x)}{x^{\nu+\lambda}}.$$

Il nous reste à démontrer qu'il existe effectivement des intégrales de notre équation différentielle qui sont représentées asymptotiquement par ces séries.

Considérons une quelconque des séries asymptotiques

$$e^{ax}\frac{1}{x^\lambda}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\frac{c_2(x)}{x^2}+\cdots+\frac{c_m(x)}{x^m}+\cdots\right].$$

En posant dans l'équation différentielle (8)

$$y=e^{ax}\frac{1}{x^\lambda}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\cdots+\frac{c_m(x)}{x^m}+v(x)\right] \tag{26}$$

on obtient pour $v(x)$ une équation de la forme

$$L(v)=H_1(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\cdots+H_n(x)\,v+h(x). \tag{27}$$

où

$$|H_\nu(x)|<\frac{k}{x},\ |h(x)|<\frac{k'}{x^{m+1}} \tag{28}$$

k et k' étant des constantes, dont la première k est indépendant de m. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ celles des différences $\alpha_p - \alpha$ $(\alpha_p \neq \alpha)$ dont la partie réelle est positive ou nulle, et par $-\gamma'_1, -\gamma'_2, \ldots -\gamma'_{r'}$, les différences restantes. D'après la théorie connue de l'équation différentielle linéaire avec second membre on trouve facilement qu'une solution de $L(u) = f(x)$ peut s'écrire

$$u = \varphi_0(x) \int_x^\infty \Psi_0(t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu x} A_{0\nu}(x) \int_x^\infty B_{0\nu}(t) e^{-\gamma_\nu t} f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu x} D_{0\nu}(x) \int_l^x E_{0\nu}(t) e^{\gamma'_\nu t} f(t)\, dt \tag{29}$$

et plus généralement

$$\frac{d^p u}{d x^p} = \varphi_p(x) \int_x^\infty \Psi_0(t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu x} A_{p,\nu}(x) \int_x^\infty B_{0\nu}(t) e^{-\gamma_\nu t} f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu x} D_{p\nu}(x) \int_l^x E_{0\nu}(t) e^{\gamma'_\nu t} f(t)\, dt \tag{30}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

$\varphi_p(x), \Psi_0(x), A_{p\nu}(x), B_{0\nu}(x), E_{0\nu}(x), D_{p\nu}(x)$ étant des fonctions périodiques de x. En remplaçant ici $f(x)$ par le second membre de (27) et en posant

$$u = v = v_0, \frac{dv}{dx} = v_1, \ldots \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} = v_{n-1}$$

on obtient pour $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ le système d'équations intégrales linéaires suivant

$$v_p = \sum_{q=0}^{n-1} \int_x^\infty M_{pq}(x,t) v_q(t) dt + \sum_{q=0}^{n-1} \int_x^\infty \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu (x-t)} K_{pq\nu}(x,t) v_q(t) dt + \sum_{q=0}^{n-1} \int_l^x \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu (x-t)} G_{pq\nu}(x,t)\, v_q(t)\, dt + g_p(x) = S_p(v_0, v_1, \ldots v_{n-1}) + g_p(x)$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

où $M_{pq}(x,t)\ K_{pq\nu}(x,t)\ G_{pq\nu}(x,t)$ satisfont aux inégalités

$$(32) \qquad \begin{aligned} &|M_{pq}(x,t)| < \frac{C}{t} \\ &|K_{pq\nu}(x,t)| < \frac{C}{t} \qquad \begin{matrix} x \geq x_0 \\ t \geq x_0 \end{matrix} \\ &|G_{pq\nu}(x,t)| < \frac{C}{t} \end{aligned}$$

C étant une constante indépendante de m. $g_p(x)$ est la fonction qu'on obtient en remplaçant $f(t)$ dans le second membre de (30) par $h(x)$. Il est aisé de voir qu'en vertu de (28)

$$(33) \qquad |g_p(x)| < \frac{k_1}{x^m}$$

où k_1 est une constante.

Désignons par $S^*(v_0, v_1, \ldots v_{n-1})$ l'expression qu'on obtient en remplaçant tous les noyaux qui entrent dans $S(v_0, v_1, \ldots v_{n-1})$ par leurs valeurs absolues. Cherchons d'abord une borne supérieure de

$$\left| S_p^*\left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m}\right) \right|.$$

On obtient, en tenant compte de (32),

$$(34) \qquad \left| S_p^*\left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m}\right) \right| < Cn\int_x^\infty \frac{1}{t^{m+1}}\,dt + rnC\int_x^\infty \frac{1}{t^{m+1}}\,dt +$$

$$+ Cr'n\int_l^x e^{-\varkappa(x-t)}\frac{1}{t^{m+1}}\,dt = \frac{C(1+r)n}{m}\frac{1}{x^m} + Cr'n\int_l^x e^{-\varkappa(x-t)}\frac{1}{t^{m+1}}\,dt$$

en désignant par $\varkappa$ la plus petite des valeurs

$$R[\gamma_1'], R[\gamma_2'], \ldots R[\gamma_r'].$$

Considérons l'expression

$$J(x) = x^m \int_l^x e^{-\varkappa(x-t)}\frac{1}{t^{m+1}}\,dt,$$

où l est supposé > 1. Soit β un nombre positif < 1 et supposons $x > \frac{1}{1-\beta}$.

On a

$$J(x) < x^m \int\limits_1^{(1-\beta)x} e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt + x^m \int\limits_{(1-\beta)x}^{x} e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt,$$

d'où il s'ensuit

$$\lim_{x=\infty} J(x) = 0.$$

Ceci ayant lieu uniformément quel que soit $l > 1$, nous pouvons, en vertu de (34), choisir d'abord m et puis l assez grands pour que

$$(35) \qquad \left| S_p^* \left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m} \right) \right| < \frac{\xi}{x^m} \qquad \text{pour } x > l$$

où $0 < \xi < 1$.

Considérons maintenant les équations intégrales

$$(36) \qquad v_p = z\, S_p(v_0, v_1, \ldots v_{n-1}) + g_p(x).$$

En cherchant à satisfaire à ces équations par des séries

$$v_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{p\nu}(x)\, z^\nu$$

on obtient les relations récurrentes

$$w_{p,\nu+1}(x) = S_p(w_{0\nu}, w_{1\nu}, \ldots w_{n-1,\nu}),$$

d'où l'on conclut, au moyen des inégalités (33) et (35)

$$|w_{p\nu}(x)| < \frac{k_1 \xi^\nu}{x^m}.$$

Les équations (36) sont donc résolubles pour $|z| < \frac{1}{\xi}$ par des fonctions v_p qui sont plus petites en valeur absolue que

$$\frac{k_1}{1 - \xi |z|} \cdot \frac{1}{x^m}.$$

En particulier nous obtenons (pour $z = 1$) une solution du système (31) et par conséquent une solution de l'équation différentielle (27), qui tend vers zéro comme $\frac{1}{x^m}$ au moins.

De là on conclut aisément qu'à chaque réduite (d'ordre m) des séries asymptotiques

$$e^{ax}\frac{1}{x^{\lambda}}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\frac{c_2(x)}{x}+\cdots\right] \tag{37}$$

correspond une solution de l'équation différentielle qui se comporte asymptotiquement comme cette réduite. Cependant il n'est pas démontré par là qu'il existe une solution de (8) qui soit représentée asymptotiquement par (37) quel que soit l'ordre m de cette réduite. Pour démontrer qu'il en est ainsi nous avons besoin du lemme suivant.

Soient $c_1(x), c_2(x), \ldots c_n(x)$ des fonctions continues périodiques de période T, et $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ des nombres réels qui soient non congrus entre eux (module 1). Alors la fonction

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(x)\, e^{\frac{2\pi i \varrho_\nu}{T}x} \tag{41}$$

ne peut pas tendre vers zéro pour $x \to \infty$ à moins que toutes les fonctions $c_\nu(x)$ soient nulles. Multiplions la relation (41) par

$$\frac{1}{l}\,\overline{c_p(x)}\, e^{-\frac{2\pi i \varrho_p x}{T}}$$

($\overline{c_p(x)}$ désigne la quantité conjuguée de $c_p(x)$) et intégrons de 0 à l. On obtient ainsi

$$\frac{1}{l}\int_0^l |c_p(x)|^2\,dx=\frac{1}{l}\int_0^l \overline{c_p(x)}\, e^{-\frac{2\pi i \varrho_p x}{T}} F(x)\,dx-\sum_{\nu\neq p}\frac{1}{l}\int_0^l e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p)}\;\overline{c_p(x)}\, c_\nu(x)\,dx.$$

Parce qu'on peut approcher de $\overline{c_p(x)}\,c_\nu(x)$ uniformément par des sommes de la forme

$$\sum_{q=-N}^{N} A_q\, e^{\frac{2\pi i}{T}qx}$$

et parce qu'on a

$$\lim_{l=\infty}\frac{1}{l}\int_0^l e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p)x}\cdot\sum_{q=-N}^{N} A_q\, e^{\frac{2\pi i}{T}qx}\,dx=$$

$$=\lim_{l=\infty}\frac{1}{l}\sum_{q=-N}^{N}\frac{A_q T}{2\pi i(\varrho_\nu-\varrho_p+q)}\left[e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p+q)l}-1\right]=0 \quad (\nu \neq p)$$

on voit que

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2\pi i(\varrho_\nu - \varrho_p)}{T} x} \overline{c_p(x)}\, c_\nu(x)\, dx = 0. \qquad (\nu \neq p)$$

Si

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 0$$

on a aussi

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l F(x)\, \overline{c_p(x)}\, e^{-\frac{2\pi i}{T} \varrho_p x}\, dx = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l |c_p(x)|^2 dx = 0$$

ce qui entraîne, en vertu de la périodicité de $c_p(x)$,

$$c_p(x) = 0.$$

Désignons par

$$\frac{e^{\alpha_\nu x}}{x^{\lambda_\nu}} \left(c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots \right)$$

la série asymptotique qui correspond à l'exposant caractéristique α_ν. Considérons un système de solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ de l'équation différentielle qui se comportent asymptotiquement comme

$$\frac{e^{\alpha_\nu x}}{x^{\lambda_\nu}} c_{\nu 0}(x).$$

On démontre facilement au moyen du lemme que nous venons d'établir que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soit m un nombre entier positif quelconque. D'après ce qui précède on peut trouver une solution $V(x)$ de (1) qui se comporte asymptotiquement comme

$$\frac{1}{x^{\lambda_\nu}} e^{\alpha_\nu x} \left[c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \frac{c_{\nu 2}(x)}{x^2} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} \right].$$

$u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ étant un système fondamental il existe des constantes C_1, C_2, ... C_n telles que

$$V(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \cdots + C_n u_n(x)$$

ce qu'on peut écrire encore

$$V(x) = \sum_{R[a_p - a_\nu] \geq 0} C_p u_p(x) + \sum_{R[a_p - a_\nu] < 0} C_p u_p(x).$$

Au moyen du lemme ci-dessus on trouve facilement que la somme

$$\sum_{R[a_p - a_\nu] \geq 0} C_p u_p(x)$$

se réduit à $u_\nu(x)$. Comme

$$e^{-a_\nu x} \sum_{R[a_p - a_\nu] < 0} C_p u_p$$

tend vers zéro plus vite que toute puissance de $\frac{1}{x}$ on voit que

$$\lim_{x=\infty} x^m \left[x^{\lambda_\nu} u_\nu(x) e^{-a_\nu x} - \left(c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} \right) \right] = 0$$

quel que soit m. Donc $u_\nu(x)$ admet bien le développement asymptotique

$$\frac{1}{x^{\lambda_\nu}} e^{-a_\nu x} \left[c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} + \cdots \right].$$

Nous résumons le résultat obtenu comme il suit. *Soit*

$$\frac{d^n u}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) u = 0 \tag{42}$$

une équation différentielle dont les coefficients admettent des développements asymptotiques

$$P_k(x) \backsim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{k\nu}(x)}{x^\nu},$$

où $a_{k\nu}(x)$ sont des fonctions continues périodiques de période T. Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les exposants caractéristiques de l'équation à coefficients périodiques

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_{10}(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n0}(x) u = 0$$

et supposons que ces quantités soient non congrues entre elles $\left(\textit{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$. *Alors il existe un système fondamental* $u_1(x), u_2(x), \ldots u_n(x)$ *de solutions de* (42) *qui admettent des développements asymptotiques de la forme*

$$u_\nu(x) = e^{a_\nu x} x^{-\lambda_\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c_{\nu p}(x)}{x^p},$$

où $c_{\nu p}(x)$ *sont des fonctions périodiques de* x *de période* T.

Finissons cet article par la démonstration d'un théorème sur les séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, x^n, \tag{43}$$

où $\varphi_n(x)$ est une fonction continue périodique de x de période T. On constate immédiatement que si cette série est convergente pour toutes les valeurs réelles de x, elle est aussi toujours absolument convergente dans le domaine réel. En considérant l'exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$$

on voit qu'une même fonction peut admettre des développements différents de la forme (43). Désignons par M_n la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$. Pour la série

$$x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$$

$\Sigma M_n z^n$ est une fonction entière de z d'ordre apparent 1. Si, par contre, on suppose que $\Sigma M_n z^n$ soit d'ordre $\varrho < 1$ on trouve que le développement d'une fonction en série de la forme (43) est unique comme le montre le théorème suivant.

Supposons $T = 2\pi$ (ce qui ne restreint pas la généralité du résultat). Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, x^n \tag{44}$$

une série toujours convergente pour les valeurs réelles de x, les $\varphi_n(x)$ étant des fonctions périodiques de x de période 2π. Désignons par M_n la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$ et supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n \tag{45}$$

soit une fonction entière de z d'ordre $\varrho < 1$. Alors la fonction $f(x)$ ne peut-être identiquement nulle que si toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont nulles.

Pour la démonstration nous considérons la fonction de λ

$$\Psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)\, dx$$

qui est régulière pour $R[\lambda] > 0$. On a dans ce domaine

$$\Psi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi_n(x) x^n\, dx.$$

En développant $\varphi_n(x)$ en série de Fourier on obtient

$$\varphi_n(x) \backsim \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{np}\, e^{ipx}$$

et il est aisé de voir que [pour $R[\lambda] > 0$]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi_n(x)\, x^n\, dx = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \int_0^\infty e^{-\lambda x + ipx}\, x^n\, dx = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \frac{\underline{|n}}{(\lambda - ip)^{n+1}}.$$

Démontrons maintenant que la série double

$$(45') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \frac{\underline{|n}}{(\lambda - ip)^{n+1}}$$

est absolument et uniformément convergente par rapport à λ dans l'intérieur de chaque domaine fini D qui ne contient pas les points $ip\, (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. On a en effet

$$(46) \qquad |A_{n,p}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\, e^{-ipx}\, dx \right| \leq M_n$$

$$(47) \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty} |A_{0,p}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_0(x)|^2\, dx \leq M_0.$$

Au moyen de l'inégalité (47) on trouve facilement que

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_{0,p}}{\lambda - i p}$$

est absolument et uniformément convergente dans D. Il existe évidemment une constante K indépendante de p et n telle que pour λ dans D

$$\frac{|\lambda - i p|}{|p| + 1} > K.$$

De là on conclut que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_{n,p} \underline{|n}}{(\lambda - i p)^{n+1}}$$

admet la série majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{M_n \underline{|n}}{(|p| + 1)^{n+1} K^{n+1}} < \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|p| + 1)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\underline{|n}}{K} \left(\frac{1}{K}\right)^n$$

qui est convergente en vertu de notre hypothèse sur $\Sigma M_n z^n$. Il s'ensuit que $\Psi(\lambda)$ est une fonction uniforme dans tout le plan, qui ne peut avoir d'autres points singuliers que les points $i p$ ($p =$ un nombre entier positif ou négatif ou nul). On voit aussi facilement que la partie principale de $\Psi(\lambda)$ par rapport au point singulier $p i$ est égale à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{np}}{(\lambda - i p)^{n+1}}.$$

Si l'on a

$$f(z) = 0$$

on a aussi

$$\Psi(\lambda) = 0.$$

Donc

$$A_{n,p} = 0 \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \ldots \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

et par conséquent

$$\varphi_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

c. q. f. d.