

MÉMOIRE SUR LE CALCUL AUX DIFFÉRENCES FINIES.

PAR

N. E. NÖRLUND

à LUND.

Introduction.

1. Posons pour abréger

$$\begin{aligned}\triangle_{\omega} F(x) &= \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}, \\ \nabla_{\omega} F(x) &= \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.\end{aligned}$$

Je me propose d'étudier les solutions des deux équations suivantes

$$\triangle_{\omega} F(x) = \varphi(x), \quad (1)$$

$$\nabla_{\omega} G(x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Au sujet de ces solutions il y a une observation curieuse à faire. Les développements en séries qui se présentent tout d'abord à l'esprit divergeront en général. On peut, il est vrai, en former d'autres qui convergent, mais néanmoins ce sont les développements divergents qui sont les mieux faits pour mettre en évidence les propriétés des solutions. Je veux dire qu'on peut rattacher à ces séries certaines expressions limites dont on peut avec avantage se servir. Sur ce point je me suis inspiré des belles recherches de M. MITTAG-LEFFLER sur le prolongement analytique d'une fonction donnée par sa série de Taylor.

Dans ces dernières années on a publié de nombreux travaux sur les séries divergentes parmi lesquels nous citerons ceux de MM. BOREL, HARDY, M. RIESZ et H. BOHR. Le calcul aux différences finies vient ajouter un nouveau chapitre à la théorie de ces séries. Dans ce premier Mémoire je n'ai nullement tiré tout

le parti possible des séries divergentes dont je m'occupe, mais les communications ultérieures que je vais donner sur le même sujet montreront que l'accomplissement de la théorie des équations aux différences finies dépend essentiellement des extensions qu'on peut donner aux recherches susdites. Ces extensions reposent sur les recherches de M. VOLTERRA sur les fonctions permutables mais elles demandent des explications assez longues. Pour cette raison je les réserve pour un autre mémoire.

Les équations (1) et (2) admettent une infinité de solutions. Soient $II(x)$ et $p(x)$ deux fonctions périodiques qui satisfont aux équations suivantes

$$\begin{aligned} II(x + \omega) &= II(x), \\ p(x + \omega) &= -p(x) \end{aligned}$$

mais qui sont d'ailleurs arbitraires. On obtient la solution la plus générale de l'équation (1), respectivement de l'équation (2), en ajoutant à une solution particulière la fonction $II(x)$, respectivement la fonction $p(x)$. Parmi les solutions en nombre infini j'en distingue une que j'appelle la solution principale et qui est celle qui présente un réel intérêt. Je ferai successivement diverses hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons d'abord ω positif et x réel, et soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m , telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0$$

pour toute valeur positive de ε . Considérons la série

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega). \quad (3)$$

Cette série satisfait formellement à l'équation (2) mais elle diverge en général. D'autre part, la série

$$G_{\eta}(x|\omega) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)}. \quad (4)$$

converge pour toute valeur positive de η . Je démontre dans le paragraphe 5 que $G_{\eta}(x|\omega)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro. Cette limite sera, par définition, la solution principale de l'équation (2). Je la désigne par $G(x|\omega)$. Cette solution est égale à la somme de la série (3) dans le cas particulier où cette série converge.

De même, la série

$$-\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) \quad (5)$$

satisfait formellement à l'équation (1). Malheureusement cette série diverge en général, mais considérons l'expression suivante

$$F_{\eta}(x|\omega) = \int_a^{\infty} \varphi(x) e^{-\eta x} dx - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)}. \quad (6)$$

L'intégrale et la série convergent pour toute valeur positive de η . Je démontre dans le paragraphe 9 que $F_{\eta}(x|\omega)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro. Cette limite sera, par définition, *la solution principale de l'équation (1)*. Je la désigne par $F(x|\omega)$. Dans le cas particulier où la série (5) converge notre solution ne diffère de la somme de cette série que par une constante. La solution principale de l'équation (2) est ainsi uniquement déterminée et la solution principale de l'équation (1) est déterminée à une constante additive près car elle dépend de la constante arbitraire a . Je désigne quelquefois ces deux solutions par les symboles suivants

$$G(x|\omega) = \int_{\omega}^{\infty} \varphi(x) \nabla x,$$

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) \Delta z.$$

On a donc dans le cas actuel

$$\int_{\omega}^{\infty} \varphi(x) \nabla x = \lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)}, \quad (7)$$

$$\int_a^x \varphi(z) \Delta z = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_a^x \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \right]. \quad (8)$$

Les opérations que définissent ces deux limites sont inverses aux opérations ∇_{ω} et Δ_{ω} car on a

$$\nabla_{\omega} \int_{\omega} \varphi(x) \nabla_{\omega} x = \varphi(x),$$

$$\Delta_{\omega} \int_{\alpha}^x \varphi(z) \Delta_{\omega} z = \varphi(x).$$

Le but de ce Mémoire est d'étudier les propriétés des deux solutions principales et de faire voir comment elles s'expriment explicitement à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. Les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont continues pour toute valeur positive de ω et pour toute valeur de x qui est plus grande que b . Dans le paragraphe 13 je démontre qu'elles admettent des dérivées continues d'ordre m par rapport à x et que ces dérivées tendent vers des limites finies quand x augmente indéfiniment. *Cette propriété est caractéristique pour les solutions principales.* Il n'y a aucune autre solution qui possède la même propriété.

Comment se comportent nos fonctions pour les valeurs positives et très grandes de x ? Soit r le plus petit entier tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Posons

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\nu} \frac{C_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$Q(x) = \int_{\alpha}^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^r \omega^{\nu} \frac{B_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x),$$

les B_{ν} étant les nombres de Bernoulli, les C_{ν} étant certains entiers qui s'y rattachent.¹ Dans le paragraphe 11 on démontre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [G(x|\omega) - P(x)] = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [F(x|\omega) - Q(x)] = 0. \quad (9')$$

Il en résulte que les deux solutions se représentent par les séries suivantes

¹ Dans ce qui suit nous parlerons souvent de ces nombres et des polynômes de Bernoulli et d'Euler. Nous supposerons connues les propriétés essentielles de ces polynômes. Pour ce qui concerne ce sujet je prie le lecteur de vouloir bien se reporter à mon Mémoire sur les polynômes de Bernoulli, Acta math. 43 (1920), p. 121—196.

$$G(x|\omega) = P(x) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \nabla_{\omega} P(x+s\omega)], \quad (10)$$

$$F(x|\omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \Delta_{\omega} Q(x+s\omega)], \quad (10')$$

qui convergent uniformément dans l'intervalle $x \geq b$.

Quand le nombre positif ω tend vers zéro les solutions principales tendent vers des limites finies. On a en effet

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_a^x \varphi(x) \nabla_{\omega} x = \varphi(x),$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x = \int_a^x \varphi(x) dx.$$

On peut aller plus loin et développer les deux solutions suivant les puissances entières et positives de ω de la manière suivante

$$G(x|\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\nu} \frac{C_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x), \quad (11)$$

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega^{\nu} \frac{B_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x). \quad (11')$$

Nous ferons l'étude approfondie de ces deux séries qui, dans la plupart des cas, divergent. Nous démontrerons en particulier qu'elles représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites de ω .

Dans le paragraphe 26 nous supposons que $\varphi(x)$ est une fonction analytique, holomorphe dans un petit angle \mathcal{A} entourant l'axe des nombres positifs, et que l'égalité

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon|x|} = 0$$

ait lieu uniformément dans l'angle \mathcal{A} pour toute valeur positive de ε . Nous démontrerons que les limites (7) et (8) existent et que $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω holomorphes pour toute valeur de ces variables qui est à l'intérieur de l'angle \mathcal{A} .

Il y a intérêt à réaliser le prolongement analytique de ces fonctions. Parmi les cas que nous étudierons le plus simple est le suivant. Soit $\varphi(x)$ une fonction analytique et uniforme admettant à distance finie n points singuliers $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Supposons qu'il existe un nombre non négatif k tel que l'inégalité

$$|\varphi(x)| < e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

ait lieu pour toute valeur positive de ε , si $|x|$ est suffisamment grand. Dans les paragraphes 33—36 nous démontrerons que les deux solutions principales sont des fonctions analytiques des deux variables x et ω qui sont uniformes dans le plan des x et qui y admettent les points singuliers $x = \beta_\nu, \beta_\nu - \omega, \beta_\nu - 2\omega, \dots$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Donnons à x une valeur différente des β_ν . Comme fonction de ω $G(x|\omega)$ est encore *uniforme* à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{\pi}{k}$ et elle y admet une infinité de points singuliers, tous situés sur n rayons vecteurs et admettant le point $\omega = 0$ comme point limite.

La fonction $F(x|\omega)$ existe à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$ mais elle est *non uniforme* au voisinage du point $\omega = 0$. Soit B le résidu de $\varphi(x)$ dans le point $x = \infty$, la fonction F est de la forme

$$F(x|\omega) = -B \log \omega + \text{fonc. uniforme de } \omega.$$

$F(x|\omega)$ admet, à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$, une infinité de points singuliers tous situés sur n rayons vecteurs que j'appelle *les vecteurs singuliers*. Quand x décrit un petit cercle autour d'un des points β_ν un des vecteurs singuliers fait une rotation complète dans le plan des ω .

Nos deux solutions satisfont aux relations remarquables suivantes

$$\begin{aligned} G(x|\omega) - G(x - \omega | -\omega) &= p(x), \\ F(x|\omega) - F(x - \omega | -\omega) &= II(x), \end{aligned}$$

p et II étant des fonctions périodiques telles que

$$\begin{aligned} p(x + \omega) &= -p(x), \\ II(x + \omega) &= II(x). \end{aligned}$$

A la fonction $\varphi(x)$ il appartient ainsi deux fonctions périodiques. Nous indiquons plusieurs expressions fort remarquables de ces fonctions. Elles s'expriment explicitement à l'aide de la fonction $\varphi(x)$ par exemple de la manière suivante

$$p(x) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)^2},$$

$$H(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)^2} \right].$$

Nous étudierons comment se comportent les fonctions G et F au voisinage du point singulier essentiel $\omega = 0$. Si la partie réelle de x est plus grande que les parties réelles des nombres β_v nous démontrerons que la série au second membre de l'équation (II') représente asymptotiquement la fonction $F(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$ et la fonction $F(x|\omega) - H(x) + 2\pi i B$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$. De même la série au second membre de l'équation (II) représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$ et la fonction $G(x|\omega) - p(x)$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$. Au contraire si la partie réelle de x est plus petite que les parties réelles des nombres β_v la dernière série représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ dans l'angle $\frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}$ et la fonction $G(x|\omega) - p(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$. En particulier on a

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(x|\omega) = \varphi(x),$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. De même

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz.$$

Cette égalité asymptotique a lieu à l'intérieur d'un certain angle. Mais quand ω franchit un des vecteurs singuliers la valeur asymptotique de $F(x|\omega)$ fait un saut brusque. Ce saut est égal à une des périodes de l'intégrale

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z) dz.$$

Nous étudierons dans le cours de ce Mémoire les diverses expressions analytiques qui sont les plus propres à représenter nos fonctions. Parmi les développements en séries je signale particulièrement les deux suivants

$$G(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \Delta^s \varphi(x),$$

$$F(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \omega^s \Delta^s f(x),$$

La première de ces séries converge pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de $G(x|\omega)$; la seconde série converge pourvu que la partie réelle de x soit plus grande que les parties réelles des nombres β, ω étant supposé positif et plus petit qu'un certain nombre.

Le problème qui nous occupe dans ce mémoire a été effleuré par EULER et ABEL. L'établissement de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin fut un premier pas vers le but. La remarquable série divergente qu'avait indiquée EULER a été transformée en une intégrale définie par PLANA¹ et ABEL². Le résultat de ces auteurs fut rigoureusement établi pour la première fois par CAUCHY³. En faisant certaines hypothèses relativement à la fonction $f(t)$, CAUCHY démontre qu'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\omega + it) - f(\omega - it) - f(it) + f(-it)}{i \left(e^{\frac{2\pi}{\omega} t} - 1 \right)} dt = \frac{\omega}{2} [f(\omega) + f(0)] - \int_0^{\omega} f(t) dt,$$

ce qui est sensiblement le même résultat qu'avaient trouvé Plana et Abel. Parmi les travaux récents sur la formule sommatoire d'Euler je dois surtout citer un ouvrage important dû à M. LINDELÖF⁴.

M. GUICHARD⁵ a consacré un beau mémoire à l'étude des solutions de l'équation

¹ Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites, Mém. Acad. Turin 25 (1820), p. 403-18.

² Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Magazin for Naturvidenskaberne I,2 (1823); Œuvres complètes 1 (2^e édition), Christiania 1881, p. 21-7.

³ Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques, Mém. Acad. sc. Paris 6 (1827), p. 603-12 [1826]; Œuvres (1) 2, Paris 1908, p. 12-9.

⁴ Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta Soc. scient. Fennicae 31 (1902); Sur une formule sommatoire générale, Acta math. 27 (1903), p. 305-11. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905. Dans le dernier ouvrage on trouve aussi des renseignements bibliographiques détaillés.

⁵ Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$, Ann. Éc. Norm. (3) 4 (1887), p. 361-80.

$$F(x+1) - F(x) = \varphi(x). \quad (12)$$

M. GUICHARD envisage une intégrale de la forme

$$F(x) = \int_A^B \frac{\varphi(z) e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz} - e^{2\pi ix}} dz \quad (13)$$

prise le long d'un segment de l'axe imaginaire. Cette intégrale a des lignes de discontinuité ou coupures du genre de celles qui ont été considérées pour la première fois par HERMITE. L'intégrale représente, dans un certain rectangle, une solution analytique de l'équation (12). Mais, même si $\varphi(x)$ est une fonction entière, cette solution est non uniforme et admet une infinité de points critiques logarithmiques. Pour remédier à cet inconvénient M. GUICHARD fait tendre A et B vers l'infini. Il démontre ainsi que l'équation (12) admet toujours une solution entière, si $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette solution se représente dans la bande $0 < \Re(x) < 1$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z) E(x) dz}{E(z)(1 - e^{2\pi i(x-z)})},$$

$E(x)$ étant une fonction entière convenablement choisie. Si $E(x) = 1$ cette intégrale ne diffère pas au fond de celle qu'avait considérée Cauchy et Abel.

M. APPELL¹ a abordé l'équation (12) d'une autre manière. Si $\varphi(x)$ est un polynôme

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

on sait trouver un polynôme qui satisfait à l'équation (12). On a en effet

$$F(x) = \frac{a_0}{1} B_1(x) + \frac{a_1}{2} B_2(x) + \dots + \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x),$$

les $B_i(x)$ étant les polynômes de Bernoulli. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} B_n(x)$$

¹ Sur les fonctions périodiques de deux variables, J. math. pures appl. (4) 7 (1891), p. 157-76.

n'est pas toujours convergente. M. APPELL retranche du polynome $B_n(x)$ les n premiers termes de son développement en série trigonométrique. En désignant par $\Psi_n(x)$ la fonction entière ainsi obtenue il démontre que la série

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \Psi_n(x)$$

converge uniformément et représente une fonction entière qui satisfait à l'équation (12).

Cette démonstration a été retrouvée par HURWITZ¹. Ce géomètre fait en outre remarquer qu'il y a toujours une solution méromorphe quand $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe.

M. APPELL a encore considéré des fonctions de deux variables et démontré ce qui suit: Étant données deux fonctions entières $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ de deux variables indépendantes, vérifiant l'identité

$$\varphi_1(x, y+1) - \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x+1, y) - \varphi_2(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $F(x, y)$ vérifiant les deux équations

$$F(x+1, y) - F(x, y) = \varphi_1(x, y),$$

$$F(x, y+1) - F(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

Un autre cas remarquable a été envisagé par M. E. PICARD². Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande de largeur très petite comprenant l'axe imaginaire. Soit ω un nombre positif. M. PICARD démontre l'existence d'une solution uniforme de l'équation

$$F(x+\omega) - \mu F(x) = \varphi(x)$$

ayant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans la bande

$$0 \leq \Re(x) \leq \omega.$$

En général il n'y a qu'une seule solution $F(x)$ qui satisfait à ces conditions. Mais si μ est égal à $e^{\nu\omega}$, ν étant un entier positif, nul ou négatif, il y a une infinité de solutions qui sont de la forme

¹ Sur l'intégrale finie d'une fonction entière, Acta math. 20 (1897), p. 285-312.

² Sur une classe de transcendentes nouvelles, Acta math. 18 (1894), p. 135-6.

$$F(x) + ce^{rx},$$

c étant une constante.

M. CARMICHAEL¹ a indiqué une nouvelle démonstration du théorème de M. Guichard. Cette démonstration repose sur la résolution d'un système doublement infini d'équations linéaires.

L'intégrale (13) a aussi été étudiée par H. WEBER² qui a retrouvé une partie des résultats de M. Guichard. Parmi les travaux se rapportant à notre sujet nous citerons encore deux mémoires de MM. BRODÉN³ et BARNES⁴.

Un extrait de ce Mémoire a été publié dans le Bulletin des Sciences mathématiques (août et septembre 1920). On y trouve aussi quelques indications sur les applications qu'on peut faire des résultats susdits à la théorie générale des équations aux différences finies.

Variables réelles.

Propriétés générales des solutions principales.

2. Soit ω un nombre positif et x une variable réelle. Soit $\varphi(x)$ une fonction⁵ réelle ou complexe qui est continue pour toute valeur de $x \geq b$ et supposons que l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) e^{-\eta x} = 0$$

ait lieu pour toute valeur positive de η . Nous commencerons par déduire quelques propriétés des fonctions F et G qui découlent presque immédiatement de la définition. Considérons les fonctions F_η et G_η définies par les expressions (6) et (4). L'intégrale et les séries qui entrent dans ces expressions convergent pour toute valeur positive de η et les séries convergent uniformément par rapport à x . Elles représentent donc des fonctions continues de x , si $x \geq b$. Soit B un nombre positif quelconque qui est plus grand que b . Nous supposerons que les fonctions $F_\eta(x|\omega)$ et $G_\eta(x|\omega)$ tendent vers les limites $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ quand η tend vers

¹ On the theory of linear difference equations, Amer. J. math. 35 (1913), p. 163—71.

² Über Abel's Summation endlicher Differenzenreihen, Acta math. 27 (1903), p. 225—33.

³ Bemerkungen über sogenannte finite Integration, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 7 (1911), n° 6. Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung, Acta Universitatis Lundensis, nova series t. 8 (1912) n° 7.

⁴ The linear difference equation of the first order, Proc. London math. Soc. (2) 2 (1904), p. 43⁸—69.

⁵ On suppose que la fonction $\varphi(x)$ ne dépend pas du paramètre ω .

zéro et cela uniformément dans l'intervalle¹ $b \leq x \leq B$. Il en résulte que $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont des fonctions continues de x pour toute valeur de $x \geq b$. On voit immédiatement que ces fonctions satisfont aux équations (1) et (2). On a en effet

$$F_\eta(x + \omega | \omega) - F_\eta(x | \omega) = \omega \varphi(x) e^{-\eta x},$$

$$G_\eta(x + \omega | \omega) + G_\eta(x | \omega) = 2 \varphi(x) e^{-\eta x}.$$

En faisant tendre η vers zéro il vient

$$\Delta_\omega F(x|\omega) = \varphi(x), \quad (1)$$

$$\nabla_\omega G(x|\omega) = \varphi(x). \quad (2)$$

Soit n un entier positif quelconque. Remplaçons dans l'équation (6) x successivement par $x + \frac{\omega}{n}$, $x + \frac{2\omega}{n}$, ..., $x + \frac{n-1}{n}\omega$; en ajoutant ensemble les n équations ainsi obtenues on trouve

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_\eta\left(x + \frac{s\omega}{n} | \omega\right) = n F_\eta\left(x | \frac{\omega}{n}\right).$$

Si l'on fait tendre η vers zéro on voit que la fonction $F(x|\omega)$ satisfait à la relation

$$\sum_{s=0}^{n-1} F\left(x + \frac{s\omega}{n} | \omega\right) = n F\left(x | \frac{\omega}{n}\right). \quad (14)$$

On démontre de la même manière que

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s F\left(x + \frac{s\omega}{n} | \omega\right) = -\frac{\omega}{2} G\left(x | \frac{\omega}{n}\right), \quad (15)$$

n étant un entier positif pair, et que

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G\left(x + \frac{s\omega}{n} | \omega\right) = G\left(x | \frac{\omega}{n}\right), \quad (16)$$

n étant un entier positif impair. En posant $n = 2$ dans les équations (14) et (15) on trouve en particulier

¹ Nous démontrerons plus loin que cette hypothèse est satisfaite dans tous les cas que nous considérons dans ce mémoire. Seulement dans le paragraphe 29 nous avons modifié un peu la définition des fonctions F_η et G_η .

$$F(x|\omega) = \nabla_{\omega} F(x|2\omega), \quad (17)$$

$$G(x|\omega) = \Delta_{\omega} F(x|2\omega). \quad (18)$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations on trouve

$$G(x|\omega) = \frac{2}{\omega} [F(x|\omega) - F(x|2\omega)]. \quad (19)$$

La fonction G s'exprime donc par la fonction F . J'aurais par conséquent pu me borner à considérer l'équation (1). Mais puisque l'équation (2) est plus simple que l'équation (1) il m'a paru intéressant de traiter séparément les deux cas.¹

Cherchons maintenant d'évaluer l'intégrale suivante

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(x|\omega) dx. \quad (20)$$

Soit ε un nombre positif. On sait trouver un nombre η_0 tel que

$$|F_{\eta}(x|\omega) - F(x|\omega)| < \varepsilon, \quad \text{si } 0 < \eta < \eta_0,$$

quel que soit x dans l'intervalle $B \geq x \geq b$. Par conséquent

$$\left| \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F_{\eta}(z|\omega) dz - \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega) dz \right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre η vers zéro on trouve

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F_{\eta}(z|\omega) dz = \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega) dz.$$

D'autre part, puisque la série qui entre dans l'expression F_{η} converge uniformément par rapport à x , on peut intégrer terme par terme et l'on trouve

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F_{\eta}(z|\omega) dz = \int_a^{\infty} \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \int_x^{x+\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(z+s\omega) e^{-\eta(z+s\omega)} dz$$

¹ On peut aussi remarquer qu'il paraît peu satisfaisant de déduire les propriétés de la fonction uniforme G de celles d'une fonction non uniforme F .

$$= \int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \int_x^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz = \int_a^x \varphi(z) e^{-\eta z} dz.$$

En faisant tendre le nombre positif η vers zéro dans cette égalité il vient

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega) dz = \int_a^x \varphi(z) dz. \quad (21)$$

Cette intégrale s'annule donc en particulier si $x = a$.

En intégrant par rapport à x dans les deux membres de l'équation (19) on trouve

$$\frac{1}{2} \int_x^{x+\omega} G(z|\omega) dz = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|2\omega) dz \quad (22)$$

et l'on démontre aisément que la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|2\omega) dz = \int_a^x \varphi(x) dx \nabla_x.$$

Cette égalité est vraie pourvu que l'expression au second membre tende uniformément vers une limite. On peut encore d'une autre manière évaluer l'intégrale (20). Divisons les deux membres de l'équation (14) par n et faisons tendre n vers l'infini. Le premier membre tend vers l'intégrale (20). Le second membre tend donc aussi vers une limite et l'on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x \left| \frac{\omega}{n} \right. \right) = \int_a^x \varphi(z) dz.$$

De l'équation (16) on déduit de même en faisant tendre l'entier n vers l'infini

$$G(x|\omega) + \frac{1}{2} \int_x^{x+\omega} \frac{dG(z|\omega)}{dz} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x \left| \frac{\omega}{n} \right. \right).$$

Mais le premier membre est égal à $\varphi(x)$ en vertu de l'équation (2). On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x \left| \frac{\omega}{n} \right. \right) = \varphi(x).$$

Je dis que les opérations définies par les limites (7) et (8) sont les inverses aux opérations ∇_{ω} et Δ_{ω} . En effet, on a d'une part

$$\Delta_{\omega} \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x = \varphi(x),$$

$$\nabla_{\omega} \int_a^x \varphi(x) \nabla_{\omega} x = \varphi(x),$$

comme nous venons de le démontrer. Quelle est maintenant la valeur de la somme

$\int_a^x (\Delta_{\omega} \varphi(x)) \Delta_{\omega} x$? On a évidemment

$$\begin{aligned} \int_a^x (\Delta_{\omega} \varphi(x)) \Delta_{\omega} x &= \frac{1}{\omega} \int_a^x \varphi(x + \omega) \Delta_{\omega} x - \frac{1}{\omega} \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{a+\omega}^{x+\omega} \varphi(x) \Delta_{\omega} x - \frac{1}{\omega} \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x \\ &= \Delta_{\omega} \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_a^x (\Delta_{\omega} \varphi(x)) \Delta_{\omega} x = \varphi(x) - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} \varphi(x) dx. \quad (23)$$

On voit de même que

$$\int_a^x (\nabla_{\omega} \varphi(x)) \nabla_{\omega} x = \varphi(x). \quad (24)$$

Les équations (17) et (18) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\int_a^x \varphi(z) \Delta_{\omega} z = \nabla_{\omega} \int_a^x \varphi(z) \Delta_{\frac{\omega}{2}} z, \quad (25)$$

$$\int_a^x \varphi(x) \nabla_\omega x = \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z. \quad (26)$$

On peut en tirer deux autres relations remarquables. On a en effet

$$\begin{aligned} \int_a^x (\nabla_\omega \varphi(z)) \Delta_{2\omega} z &= \frac{1}{2} \int_a^x \varphi(z + \omega) \Delta_{2\omega} z + \frac{1}{2} \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z \\ &= \frac{1}{2} \int_{a+\omega}^{x+\omega} \varphi(z) \Delta_{2\omega} z + \frac{1}{2} \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z \\ &= \nabla_\omega \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z - \frac{1}{2} \int_a^{a+\omega} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_a^x \nabla_\omega \varphi(z) \Delta_{2\omega} z = \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z - \frac{1}{2} \int_a^{a+\omega} \varphi(z) dz.$$

En remplaçant $\varphi(x)$ par $G(x|\omega)$ dans cette équation, on trouve, en tenant compte de l'équation (22)

$$\int_a^x G(z|\omega) \Delta_{2\omega} z = F(x|2\omega) - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} F(z|2\omega) dz,$$

ou encore

$$\int_a^x \left(\int_a^z \varphi(z) \nabla_\omega z \right) \Delta_{2\omega} z = \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} F(z|2\omega) dz.$$

Considérons enfin la somme $\int_a^x \Delta_\omega \varphi(z) \Delta_{2\omega} z$. On a évidemment

$$\int_a^x (\Delta_\omega \varphi(z)) \Delta_{2\omega} z = \frac{1}{\omega} \int_{a+\omega}^{x+\omega} \varphi(z) \Delta_{2\omega} z - \frac{1}{\omega} \int_a^x \varphi(z) \Delta_{2\omega} z$$

$$= \Delta_{\omega} \sum_a^x \varphi(z) \Delta_{\frac{1}{2}\omega} z - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} \varphi(z) dz.$$

Pas conséquent, en vertu de l'équation (26)

$$\sum_a^x \Delta_{\omega} \varphi(z) \Delta_{\frac{1}{2}\omega} z = \sum_{\omega} \varphi(x) \nabla_{\omega} x - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} \varphi(z) dz.$$

Si l'on remplace $\varphi(x)$ par la fonction $F(x|\omega)$, cette équation prend la forme suivante

$$\sum_{\omega} F(x|\omega) \nabla_{\omega} x = F(x|\frac{1}{2}\omega),$$

ou encore

$$\sum_a^x \left(\sum_{\omega} \varphi(z) \Delta_{\omega} z \right) \nabla_{\omega} x = \sum_a^x \varphi(z) \Delta_{\frac{1}{2}\omega} z.$$

Toutes ces propriétés des solutions principales se déduisent presque sans aucun calcul et ce n'est pas là un des moindres avantages de la définition que nous avons adoptée pour ces fonctions. Mais il y a d'autres propriétés qui sont plus cachées. Pour les découvrir nous allons nous servir de certaines formules sommatoires.

La formule sommatoire de Boole.

3. Soit $E_{\nu}(x)$ le polynome d'Euler, c'est à dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$E_{\nu}(x+1) + E_{\nu}(x) = 2x^{\nu}. \quad (1)$$

Soit $\dot{E}_{\nu}(x)$ une fonction périodique qui satisfait à l'équation

$$\dot{E}_{\nu}(x+1) = -\dot{E}_{\nu}(x)$$

et qui est égale au polynome d'Euler $E_{\nu}(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$. La fonction $\dot{E}_{\nu}(x)$ est uniquement déterminée par ces deux conditions. Des propriétés des polynomes d'Euler il résulte que

$$\frac{d \dot{E}_{\nu}(x)}{dx} = \nu \dot{E}_{\nu-1}(x).$$

En posant $x = 0$ dans l'équation (1) on obtiendra

$$E_\nu(1) = -E_\nu(0), \quad \text{si } \nu > 0.$$

$\dot{E}_\nu(x)$ est donc une fonction continue de x qui admet des dérivées continues des ordres $1, 2, \dots, \nu - 1$. Mais la dérivée d'ordre ν est discontinue dans les points $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, car $\dot{E}_0(x)$ est égale à $+1$ dans les intervalles $2n < x < 2n + 1$ et égale à -1 dans les intervalles $2n - 1 < x < 2n$, n étant un entier.

Soit h un nombre quelconque dans l'intervalle $0 \leq h \leq 1$. Soit $\varphi(z)$ une fonction qui admet une dérivée continue d'ordre m dans l'intervalle $x \leq z \leq x + \omega$. Considérons l'intégrale suivante

$$R_m = \omega^m \int_0^1 \frac{\dot{E}_{m-1}(h-z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz. \quad (2)$$

En intégrant par partie on trouve, si $m > 1$,

$$R_m = -\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} E_{m-1}(h) [\varphi^{(m-1)}(x + \omega) + \varphi^{(m-1)}(x)] + R_{m-1}.$$

On a donc

$$R_m = -\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) [\varphi^{(\nu)}(x + \omega) + \varphi^{(\nu)}(x)] + R_1.$$

Il est facile d'évaluer l'intégrale R_1 . On a en effet

$$\begin{aligned} R_1 &= \omega \int_0^1 \dot{E}_0(h-z) \varphi'(x + \omega z) dz = \omega \int_0^h \varphi'(x + \omega z) dz - \omega \int_h^1 \varphi'(x + \omega z) dz \\ &= 2\varphi(x + h\omega) - \varphi(x) - \varphi(x + \omega). \end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente on trouve

$$2\varphi(x + h\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) [\varphi^{(\nu)}(x + \omega) + \varphi^{(\nu)}(x)] + R_m. \quad (3)$$

Cette formule a été indiquée, sans terme reste, par Boole¹ dans le cas particulier $h=0$. Quand m augmente indéfiniment la série convergera seulement dans des cas très particuliers. Le terme reste de la formule de Boole a été trouvé par

¹ A Treatise on Differential Equations (2^e éd.). London 1865, p. 107-9.

DARBOUX¹, SCHENDEL², HÉRMITÉ³ et STIELTJES⁴. On peut remarquer que si l'on remplace h par $\frac{h}{\omega}$ et fait ensuite tendre ω vers zéro, l'équation (3) se réduit à la formule de Taylor avec son terme complémentaire.

Indiquons rapidement quelques applications simples de cette formule. Soit $\varphi(x) = E_{m+n}(x)$ et posons $\omega = 1$, $h = 0$ dans l'équation (3); il vient

$$E_{m+n}(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m+n}{\nu} \frac{C_{\nu}}{2^{\nu}} x^{m+n-\nu} + (-1)^m \frac{1}{2} \frac{(m+n)!}{(m-1)! n!} \int_0^1 E_{m-1}(z) E_n(x+z) dz.$$

Mais en posant $h = \frac{1}{2}$ on trouve

$$E_{m+n}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m+n}{\nu} \frac{E_{\nu}}{2^{\nu}} x^{m+n-\nu} + (-1)^m \frac{1}{2} \frac{(m+n)!}{(m-1)! n!} \int_0^1 E_{m-1}\left(z - \frac{1}{2}\right) E_n(x+z) dz.$$

En faisant tendre x vers zéro dans ces deux équations on trouve en particulier

$$\int_0^1 E_m(z) E_n(z) dz = (-1)^{m+1} \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \frac{C_{m+n+1}}{2^{m+n}},$$

m et n étant des entiers non négatifs quelconques, et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_m\left(z + \frac{1}{2}\right) E_n(z) dz = (-1)^m \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \frac{E_{m+n+1}}{2^{m+n+1}}.$$

Dans la dernière équation on suppose que $m+n$ est impair.

Supposons en second lieu que $\varphi(x) = e^x$. Nous aurons

$$\frac{2 e^{h\omega}}{e^{\omega} + 1} = \sum_{\nu=0}^m \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} E_{\nu}(h) + \frac{\omega^{m+1}}{e^{\omega} + 1} \int_0^1 \frac{E_m(h-z)}{m!} e^{\omega z} dz. \quad (4)$$

¹ Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable, J. math. pures appl. (3) 2 (1876), p. 291-312.

² Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem. Jena 1876.

³ J. reine angew. Math. 116 (1896), p. 144-5; Œuvres 4, Paris 1917, p. 443-4.

⁴ Correspondance d'Hermite et de Stieltjes 2, Paris 1905, p. 311-2.

Cette série a servi à Hermite¹ comme définition des polynomes $E_\nu(h)$. Si nous prenons $\varphi(x) = \sin x$ nous aurons, en posant $x = -\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{\sin\left(h - \frac{1}{2}\right)\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} E_{2\nu+1}(h) + R_m, \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{(-1)^m \omega^{2m+1}}{2 \cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m}(h-z)}{(2m)!} \cos\left(z - \frac{1}{2}\right) \omega dz \\ &= \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{2 \cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m-1}(h-z)}{(2m-1)!} \sin\left(z - \frac{1}{2}\right) \omega dz. \end{aligned}$$

En prenant $\varphi(x) = \cos x$ nous trouverons de même

$$\frac{\cos\left(h - \frac{1}{2}\right)\omega}{\cos\frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=1}^m (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}(h) + R_m, \quad (6)$$

où

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+1}}{2 \cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m}(h-z)}{(2m)!} \sin\left(z - \frac{1}{2}\right) \omega dz \\ &= \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+2}}{2 \cos\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{E}_{2m+1}(h-z)}{(2m+1)!} \cos\left(z - \frac{1}{2}\right) \omega dz. \end{aligned}$$

Si l'on fait tendre m vers l'infini les trois dernières séries convergeront pourvu que $|\omega| < \pi$. En posant en particulier $h=1$ dans l'équation (5) et en remplaçant ω par 2ω , on trouvera

$$tg \omega = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu+1} \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1} + R_m, \quad (7)$$

¹ l. c. p. 144.

où

$$R_m = \frac{(-4)^m \omega^{2m+1}}{\cos \omega} \int_0^1 \frac{E_{2m}(z)}{(2m)!} \cos(2z-1) \omega dz$$

$$= \frac{(-4)^{m-1} 2 \omega^{2m}}{\cos \omega} \int_0^1 \frac{E_{2m-1}(z)}{(2m-1)!} \sin(2z-1) \omega dz.$$

En posant $h = \frac{1}{2}$ dans l'équation (6), on trouvera de même

$$\sec \omega = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu} + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{(-4)^m 2 \omega^{2m+1}}{\cos \omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E_{2m}(z)}{(2m)!} \sin 2\omega z dz = \frac{(-4)^{m+1} \omega^{2m+2}}{\cos \omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E_{2m+1}(z)}{(2m+1)!} \cos 2\omega z dz.$$

De ces expressions du terme reste on déduit aisément les séries trigonométriques qui représentent les polynômes $E_m(x)$ dans l'intervalle $0 < x < 1$. Pour trouver les coefficients de ces séries il suffit de multiplier les deux membres de l'équation (7) par $\cos \omega$ et de poser $\omega = \pi s + \frac{\pi}{2}$, s étant un entier positif.

4. On sait que LEIBNIZ a démontré que la série alternée

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(s)$$

est convergente, si $\varphi(x)$ est une fonction non croissant avec x , ayant pour x infini, la limite zéro. A l'aide de la formule de Boole on peut décider de la convergence de cette série en des cas plus généraux. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ tende vers zéro, quand x augmente indéfiniment, et qu'elle admette, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_b^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

converge. Dans ces conditions la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s) \tag{8}$$

sera uniformément convergente dans l'intervalle $x \geq b$.

En effet posons $h = 0$ et $\omega = 1$ dans l'équation (3) et remplaçons x successivement par $x + 1, x + 2, \dots, x + n - 1$. En combinant les n équations ainsi obtenues on obtiendra, pour $x \geq b$,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu}{2^\nu \nu!} [\varphi^{(\nu)}(x) - (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x+n)] + (-1)^m \int_0^n \frac{\dot{E}_{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+z) dz. \quad (9) \end{aligned}$$

Rappelons le théorème suivant dû à MM. HARDY et LITTLEWOOD¹: Si une fonction tend vers une limite, quand x augmente indéfiniment, et admet une dérivée d'un certain ordre qui est continue et bornée, alors les dérivées d'ordres inférieurs tendent nécessairement vers zéro quand x tend vers l'infini. De nos hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$ il résulte donc que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Cela posé, faisons tendre n vers l'infini dans l'équation (9). Le premier terme au second membre tend uniformément vers une limite et l'intégrale

$$\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(z) \varphi^{(m)}(x+z) dz$$

est absolument convergente parce que la fonction $\dot{E}_{m-1}(z)$ est bornée. La série (8) est donc uniformément convergente et sa somme est égale à l'expression suivante

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu}{2^{\nu+1} \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{(-1)^m}{2} \int_0^\infty \frac{\dot{E}_{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+z) dz.$$

Si $m = 1$ le théorème ne diffère guère du théorème de Leibniz. Mais en choisissant m convenablement on peut décider de la convergence de plusieurs séries intéressantes qui ne rentrent pas dans le cas de Leibniz. On voit par exemple que la série

$$\sum (-1)^s \frac{\sin(s^a)}{\log_p s}$$

¹ Proc. London math. Soc. (2) 9 (1911), p. 437-8; (2) 11 (1913), p. 422-3.

sera convergente, si $0 < \alpha < 1$. Il en est de même de la série

$$\sum (-1)^s \frac{\sin(\log_r s)}{\log_p s},$$

r et p étant des entiers positifs quelconques. Ici on a posé pour abrégé

$$\log_p s = \log(\log_{p-1} s).$$

Démonstration de l'existence de la fonction $G(x|\omega)$.

5. On peut aussi, à l'aide de la transformation de Boole, en des cas assez étendus, décider de la sommabilité d'une série divergente. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + s\omega) \quad (10)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. Soit B un nombre positif quelconque qui est plus grand que b . Je veux démontrer que l'expression

$$G(x|\omega) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \quad (11)$$

tend uniformément vers une limite, x variant dans un intervalle fini quelconque $b \leq x \leq B$. Cette limite est donc la solution principale de l'équation

$$\nabla_{\omega} G(x) = \varphi(x).$$

Notre hypothèse relativement à la série (10) entraîne que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

On en conclut aisément que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(m-\nu)}(x)}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

En particulier on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0.$$

La série au second membre de l'équation (11) convergera donc pour toute valeur positive de η et pour toute valeur de $x \geq b$. Cela posé, reprenons l'équation (3) et remplaçons x successivement par $x + \omega, x + 2\omega, \dots, x + (n-1)\omega$. En combinant les n équations ainsi obtenues on trouve

$$2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x + h\omega + s\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) [\varphi^{(\nu)}(x) - (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x + n\omega)] \\ + \omega^m \int_0^n \frac{\dot{E}_{m-1}(h-z)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz.$$

Dans cette relation substituons $\varphi(x) e^{-\eta x}$ au lieu de $\varphi(x)$, nous aurons

$$2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x + h\omega + s\omega) e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)} \\ = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) D_x^\nu [\varphi(x) e^{-\eta x}] - (-1)^\nu \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) D_x^\nu [\varphi(x + n\omega) e^{-\eta(x+n\omega)}] \\ + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^n E_{m-1}(h-z) D_x^m [\varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}] dz.$$

Laissons η fixe et positif et faisons tendre n vers l'infini. Le second terme au second membre tendra vers zéro en vertu de l'équation (12). On a par conséquent

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + h\omega + s\omega) e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) D_x^\nu [\varphi(x) e^{-\eta x}] \\ + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z) D_x^m [\varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}] dz. \quad (13)$$

Faisons maintenant tendre η vers zéro. Le premier terme au second membre convergera uniformément vers une limite. Le second terme s'exprime par un nombre fini d'intégrales de la forme

$$P_\nu = \eta^\nu \int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m-\nu)}(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Je dis que P_ν tend vers zéro avec η , si $\nu > 0$. Pour le voir considérons l'intégrale

$$\psi(z) = \int_z^{\infty} \dot{E}_{m-1}(h-z) e^{-\eta\omega z} dz.$$

Cette intégrale divergera si $\eta = 0$. Mais elle converge pour toute valeur positive de η et elle tend vers une limite finie quand n tend vers zéro. En effet, on a, si $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= e^{-\eta\omega z} \sum_{s=0}^{\infty} \int_z^{s+1} \dot{E}_{m-1}(h-z-t) e^{-\eta\omega t} dt \\ &= e^{-\eta\omega z} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-\eta\omega s} \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t) e^{-\eta\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-\eta\omega z}}{1 + e^{-\eta\omega}} \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t) e^{-\eta\omega t} dt. \end{aligned}$$

Quel que soit η la dernière intégrale est une fonction périodique de z avec la période z . Quand η tend vers zéro elle tend vers une limite finie

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z-t) dt = \frac{\dot{E}_m(h-z)}{m}.$$

On sait donc trouver un nombre positif C tel que pour toute valeur positive de η

$$|\psi(z)| < C e^{-\eta\omega z}$$

et cela quel que soit z . En particulier, quand z augmente indéfiniment pendant que η reste positif et fixe, la fonction $z^p \psi(z)$ tend vers zéro quel que soit p . Cela posé, soit ν un des nombres $1, 2, \dots, m$ et considérons P_ν . En intégrant par partie on trouve

$$P_\nu = \eta^\nu e^{-\eta x} \psi(0) \varphi^{(m-\nu)}(x) + \omega \eta^\nu e^{-\eta x} \int_0^{\infty} \varphi^{(m-\nu+1)}(x + \omega z) \psi(z) dz.$$

Le premier terme au second membre tend vers zéro avec η parce que $\psi(0)$ tend vers une limite finie. La valeur absolue du second terme est plus petite que

$$\eta^\nu C \int_x^{\infty} |\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| e^{-\eta z} dz. \quad (14)$$

Mais de l'égalité (12) il résulte qu'on sait trouver un nombre positif N tel que

$$|\varphi^{(m-\nu+1)}(z)| < \varepsilon z^{\nu-1}, \quad \text{si } z > N$$

quel que soit le nombre positif ε . En désignant l'intégrale (14) par P_ν^1 on a donc

$$P_\nu^1 < \eta^\nu C \int_x^N |\varphi^{(m-\nu+1)}(x)| dz + \eta^\nu C \varepsilon \int_N^\infty z^{\nu-1} e^{-\eta z} dz$$

et par conséquent

$$P_\nu^1 < \eta^\nu C \int_x^N |\varphi^{(m-\nu+1)}(x)| dz + \varepsilon C \int_0^\infty z^{\nu-1} e^{-z} dz.$$

Le premier terme au second membre de cette inégalité tend vers zéro avec η . Comme ε est aussi petit que l'on veut, nous avons donc démontré que P_ν tend uniformément vers zéro, si $\nu > 0$, quel que soit x dans l'intervalle $b \leq x \leq B$.

Il nous reste d'envisager le cas $\nu = 0$. Posons

$$f(z) = \int_z^\infty \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz. \quad (15)$$

Je dis que cette intégrale converge uniformément. En effet on a

$$\begin{aligned} \int_n^{n+p+1} \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz &= \sum_{s=n}^{n+p} \int_s^{s+1} \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz \\ &= \sum_{s=n}^{n+p} (-1)^s \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z+s\omega) dz \\ &= \int_0^1 \dot{E}_{m-1}(h-z) \sum_{s=n}^{n+p} (-1)^s \varphi^{(m)}(x+\omega z+s\omega) dz. \end{aligned}$$

Mais puisque la série (10) converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq B$ on conclut aisément qu'il en est de même de l'intégrale (15). Cela posé, considérons P_0 et intégrons par partie; on trouve

$$P_0 = e^{-\eta x} f(0) - \eta \omega \int_0^\infty f(z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz.$$

Soit ε un nombre positif. On sait trouver un nombre N , qui ne dépend pas de x , tel que

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad \text{si } z \geq N.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \eta \omega \int_0^\infty f(z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz \right| &< \eta \omega e^{-\eta x} \int_0^N |f(z)| dz + \varepsilon \eta \omega \int_N^\infty e^{-\eta(x+\omega z)} dz \\ &= \eta \omega e^{-\eta x} \int_0^N |f(z)| dz + \varepsilon e^{-\eta(x+\omega N)}. \end{aligned}$$

Quand η tend vers zéro le dernier membre tend vers ε . Comme ε est aussi petit que l'on veut on en conclut que P_0 tend uniformément vers $f(0)$ quand η tend vers zéro. Nous avons ainsi démontré que le second membre de l'équation (11) tend uniformément vers une limite et qu'on a

$$G(x+h\omega|\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^\infty E_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz \quad (16)$$

pourvu que $0 \leq h \leq 1$. On en conclut en particulier que $G(x|\omega)$ est une fonction continue de x pour toute valeur de $x \geq b$.

Soit par exemple $\varphi(x) = \log x$. On trouve¹ en prenant $m = 1$ et $h = 0$

$$\int \log x \nabla x = \log x - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \log \left(1 + \frac{1}{x+s} \right).$$

Il résulte du théorème du paragraphe 4 que la série au second membre converge pour toute valeur de x qui n'est pas un entier négatif ou nul.

Soit en second lieu $\varphi(x) = x^\nu$, ν étant un entier non négatif. En prenant $m = \nu + 1$ l'équation (16) se réduit à la relation suivante

$$\int x^\nu \nabla x = E_\nu(x).$$

Le polynome d'Euler $E_\nu(x)$ est donc la somme de la série divergente

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (x+s)^\nu.$$

¹ Quand $\omega = 1$ j'écris ∇ et Δ au lieu de ∇_ω et Δ_ω .

On peut vérifier ce fait un peu plus directement de la manière suivante. Si $\eta > 0$ on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-\eta(x+s)} = \frac{e^{-\eta x}}{1 + e^{-\eta}}.$$

En dérivant ν fois par rapport à η on trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (x+s)^\nu e^{-\eta(x+s)} = (-1)^\nu D_\eta^\nu \frac{e^{-\eta x}}{1 + e^{-\eta}}. \quad (17)$$

D'autre part en développant suivant les puissances de η on aura

$$\frac{2 e^{-\eta x}}{1 + e^{-\eta}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} E_\nu(x).$$

En faisant tendre η vers zéro dans l'équation (17) on trouve donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (x+s)^\nu e^{-\eta(x+s)} = E_\nu(x).^1$$

En posant en particulier $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ on voit que les entiers C_ν et E_ν se représentent par les limites suivantes

$$C_\nu = \lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (2s)^\nu e^{-\eta s},$$

$$E_\nu = \lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1)^\nu e^{-\eta s}.$$

La formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin.

6. La formule de Boole est voisine d'une autre formule sommatoire que nous allons maintenant étudier. Soit $B_\nu(x)$ le polynôme de Bernoulli, c'est à dire le polynôme qui satisfait à l'équation

$$B_\nu(x+1) - B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1},$$

¹ Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$E_\nu(x) = \lim_{\rho \rightarrow 1} 2 (\rho D_\rho)^\nu \frac{\rho^x}{\rho+1}.$$

et qui est égal au nombre de Bernoulli B_ν dans le point $x=0$. Soit $\dot{B}_\nu(x)$ une fonction périodique avec la période 1 qui est déterminée par la condition suivante:

$$\dot{B}_\nu(x) = B_\nu(x), \quad \text{si } 0 \leq x < 1.$$

On a évidemment

$$B_\nu(1) = B_\nu(0), \quad \text{si } \nu \geq 1.$$

La fonction $\dot{B}_\nu(x)$ est donc continue dans le point $x=1$ et par conséquent pour toutes les valeurs de x , si $\nu \leq 1$. Des propriétés des polynomes de Bernoulli il résulte que

$$\frac{d\dot{B}_\nu(x)}{dx} = \nu \dot{B}_{\nu-1}(x), \quad \nu > 1.$$

$\dot{B}_\nu(x)$ admet par conséquent des dérivées continues des ordres 1, 2, ... $\nu-2$. Mais la dérivée d'ordre $\nu-1$ est discontinue dans les points $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ car $\dot{B}_1(x)$ est égal à $x - \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$. Cette fonction périodique fait donc un saut brusque égal à 1 quand x passe par un entier.

Soit comme plus haut $0 \leq h \leq 1$, et supposons que la fonction $\varphi(z)$ admette une dérivée continue d'ordre m dans l'intervalle $x \leq z \leq x+\omega$. Envisageons l'intégrale suivante

$$R_m = -\omega^m \int_0^1 \frac{\dot{B}_m(h-z)}{m!} \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz. \quad (1)$$

En intégrant par partie on trouve, si $m > 1$,

$$R_m = -\omega^{m-1} \frac{B_m(h)}{m!} [\varphi^{(m-1)}(x+\omega) - \varphi^{(m-1)}(x)] + R_{m-1}.$$

En répétant cette opération $m-2$ fois on obtient

$$R_m = -\sum_{\nu=2}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \triangle_\omega \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_1. \quad (2)$$

Intégrons encore une fois par partie, nous aurons, en tenant compte de ce que $\dot{B}_1(h-z)$ est discontinue dans le point $z=h$,

$$R_1 = \varphi(x+h\omega) - \omega B_1(h) \triangle_\omega \varphi(x) - \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} \varphi(z) dz.$$

En substituant cette expression dans l'équation (2) on obtient

$$\varphi(x+h\omega) = \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \frac{\Delta}{\omega} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_m. \quad (3)$$

C'est la célèbre formule sommatoire d'Euler. Le terme complémentaire a été étudié par un grand nombre d'auteurs et notamment par POISSON¹, JACOBI², MALMSTÉN³, DARBOUX⁴, SCHENDEL⁵, SONIN⁴ et LINDELÖF⁶.

Nous allons nous servir de cette formule pour démontrer l'existence de la limite

$$\sum \varphi(x) \frac{\Delta}{\omega} x.$$

Mais indiquons d'abord quelques applications élémentaires de la formule d'Euler. Prenons $\varphi(x) = B_{m+n}(x)$, et posons $\omega = 1$, $h = 0$ dans l'équation (3), nous aurons

$$B_{m+n}(x) = \sum_{\nu=0}^m \binom{m+n}{\nu} B_\nu x^{m+n-\nu} - (-1)^m \frac{(m+n)!}{m!n!} \int_0^1 B_m(z) B_n(x+z) dz.$$

Mais en posant $h = \frac{1}{2}$, on obtient

$$B_{m+n}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^m \binom{m+n}{\nu} \frac{D_\nu}{2^\nu} x^{m+n-\nu} - (-1)^m \frac{(m+n)!}{m!n!} \int_0^1 B_m\left(z - \frac{1}{2}\right) B_n(x+z) dz.$$

Faisons tendre x vers zéro. La première équation se réduit à

$$\int_0^1 B_m(z) B_n(z) dz = (-1)^{m+1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{m+n},$$

m et n étant des entiers positifs quelconques. De la seconde équation on déduit de même que:

¹ Mém. Acad. Sc. Paris 6 (1823), p. 571.

² J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 263-72; Werke 6, Berlin 1891, p. 64-75.

³ J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 55-82; réimprimé Acta math. 5 (1884), p. 1-46.

⁴ Ann. Éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 257-62; C. R. Acad. Sc. Paris 108 (1889), p. 725-7.

⁵ l. c.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_m \left(z + \frac{1}{2} \right) B_n(z) dz = (-1)^{m+n} \frac{m! n!}{(m+n)!} \frac{D_{m+n}}{2^{m+n+1}},$$

pourvu que $m+n$ soit pair.

Posons en second lieu $\varphi(x) = e^x$, nous aurons

$$\frac{\omega e^{h\omega}}{e^\omega - 1} = \sum_{\nu=0}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) - \frac{\omega^{m+1}}{e^\omega - 1} \int_0^1 \frac{\dot{B}_m(h-z)}{m!} e^{\omega z} dz. \quad (4)$$

La fonction au premier membre est donc la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli. Cette fonction génératrice a servi de base à plusieurs auteurs dans l'étude des polynomes de Bernoulli. L'expression du terme complémentaire de la série n'a pas, je crois, été donnée auparavant.

Si nous prenons $\varphi(x) = \sin x$ nous aurons, en posant $x = -\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{\omega \sin \left(h - \frac{1}{2} \right) \omega}{2 \sin \frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} B_{2\nu+1}(h) + R_m,$$

où

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+1}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m}(h-z)}{(2m)!} \sin \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz \\ &= \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{\dot{B}_{2m-1}(h-z)}{(2m-1)!} \cos \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz. \end{aligned}$$

En posant $\varphi(x) = \cos x$ on obtient de même

$$\frac{\omega \cos \left(h - \frac{1}{2} \right) \omega}{2 \sin \frac{\omega}{2}} = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}(h) + R_m, \quad (5)$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+1}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{B_{2m}(h-z)}{(2m)!} \cos \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz$$

$$= \frac{(-1)^m \omega^{2m+2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(h-z)}{(2m+1)!} \sin \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz.$$

Quand m augmente indéfiniment ces trois séries convergeront pourvu que $|\omega| < 2\pi$. Posons en particulier $h = 1$ dans la dernière série, nous aurons le développement bien connu

$$\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} + R_m, \quad (6)$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+1}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{B_{2m}(z)}{(2m)!} \cos \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} \omega^{2m+2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(z)}{(2m+1)!} \sin \left(z - \frac{1}{2} \right) \omega dz.$$

Mais en prenant $h = \frac{1}{2}$ dans l'équation (5) on obtient

$$\omega \operatorname{cosec} \omega = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu} + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1} (2\omega)^{2m+1}}{\sin \omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2m}(z)}{(2m)!} \cos 2z \omega dz$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} (2\omega)^{2m+2}}{\sin \omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2m+1}(z)}{(2m+1)!} \sin 2z \omega dz.$$

7. A l'aide de la formule d'Euler on peut décider de la convergence de certaines séries qu'il paraît difficile d'aborder par d'autres voies. On connaît le

théorème suivant, dû à MACLAURIN¹ et à CAUCHY²: Soit $\varphi(x)$ une fonction, positive à partir d'une certaine valeur de x , continuellement décroissante et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. Alors la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s) \quad (7)$$

sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) dx \quad (8)$$

aura ou non un sens. MM. BROMWICH³ et HARDY⁴ ont démontré que ce théorème reste vrai dans certains cas où la fonction n'est pas décroissante. Soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment et admettant, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale⁵

$$\int_1^{\infty} B_m(-x) \varphi^{(m)}(x) dx$$

sera convergente. Supposons en outre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m-1)}(x) = 0.$$

Dans ces conditions la série (7) sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale (8) aura ou non un sens.⁶

En effet posons $\omega = 1$ et $h = 0$ dans l'équation (3) et remplaçons x successivement par $1, 2, \dots, n-1$. En ajoutant ensemble les équations ainsi obtenues on trouve

¹ A treatise of fluxions 1, Edinburgh 1742, p. 289-90.

² Sur la convergence des séries, Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 267-79.

³ Proc. London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 327-38.

⁴ id. (2) 9 (1911), p. 126-44.

⁵ Cette intégrale sera convergente par exemple si $\varphi^{(m)}(x)$ tend vers zéro en variant toujours dans le même sens quand x augmente indéfiniment, ou encore si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

a un sens.

⁶ Ce théorème est essentiellement le même que celui de M. Hardy (l. c.). Je l'ai énoncé sous une forme un peu plus générale mais la différence des deux énoncés n'a guère d'importance.

$$\int_1^n \varphi(x) dx - \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) = \sum_{\nu=1}^m \frac{B_\nu}{\nu!} (\varphi^{(\nu-1)}(1) - \varphi^{(\nu-1)}(n)) + \int_1^n \frac{B_m(-x)}{m!} \varphi^{(m)}(x) dx, \quad (9)$$

n étant un entier positif quelconque. Faisons tendre n vers l'infini. Nos hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$ entraînent que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1;$$

c'est ce qu'on voit en tenant compte du théorème de MM. LITTLEWOOD et HARDY mentionné dans le paragraphe 4. Le second membre de l'équation (9) tend par conséquent vers une limite quand n augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre et l'on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_1^n \varphi(x) dx - \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) \right] = \sum_{\nu=1}^m \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(1) + \int_1^\infty \frac{B_m(-x)}{m!} \varphi^{(m)}(x) dx.$$

Soit par exemple

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette fonction satisfait aux conditions du théorème, si $\beta > 0$. Considérons l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^\alpha) dx}{x^\beta}, \quad (10)$$

changeons la variable et posons $x^\alpha = z$, nous aurons

$$\int_1^n \frac{\sin(x^\alpha) dx}{x^\beta} = \frac{1}{\alpha} \int_1^{n^\alpha} \frac{\sin z dz}{z^{\alpha+\beta-1}}.$$

L'intégrale (10) sera donc convergente, si $\beta > 1 - \alpha$, et divergente, si $\beta \leq 1 - \alpha$. Il en est par conséquent de même de la série

$$\sum_{s=0}^\infty \frac{\sin(s^\alpha)}{s^\beta}.$$

8. Remarquons en passant que le lemme précédent permet d'étendre un autre théorème de CAUCHY¹ que M. BOREL² a étendu un peu en lui donnant la forme suivante: Les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s), \quad \sum_{s=1}^{\infty} a^s \varphi(a^s) \quad (a > 1)$$

sont en même temps convergentes ou divergentes si $\varphi(x)$ est une fonction positive, continuellement décroissante et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment.

Soit $\psi(x)$ une fonction qui tend vers l'infini avec x et qui, pour $x \geq p$, admet une dérivée continue et positive qui satisfait à l'inégalité

$$\psi'(x + \theta) < K \psi'(x),$$

K étant une constante et $0 < \theta < 1$.

Je dis que les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s), \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(\psi(s)) \psi'(s)$$

sont en même temps convergentes, si $\varphi(x)$ est une fonction positive non croissant avec x .

En effet la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(x)$$

et l'intégrale

$$\int_1^x \varphi(x) dx$$

sont en même temps convergentes ou divergentes. D'autre part on a

$$\int_p^{p+1} \varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx \leq \varphi(\psi(p)) \psi'(p + \theta) < K \varphi(\psi(p)) \psi'(p),$$

$$\int_p^{p+1} \varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx > \varphi(\psi(p+1)) \psi'(p + \theta) > \frac{1}{K} \varphi(\psi(p+1)) \psi'(p+1)$$

par conséquent

¹ Cours d'Analyse, Paris 1821; Œuvres (2) 3, Paris 1897, p. 123—5.

² Leçons sur les séries à termes positifs, Paris 1902, p. 2—3.

$$K \sum_{s=p}^{m-1} \varphi(\psi(s)) \psi'(s) > \int_p^m \varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx > \frac{1}{K} \sum_{s=p+1}^m \varphi(\psi(s)) \psi'(s).$$

De ces inégalités il résulte que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(\psi(s)) \psi'(s)$$

et l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

convergent ou divergent toutes les deux. C. q. f. d.

On voit ainsi par exemple que les séries suivantes

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(e^s) e^s, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s^\alpha) s^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s), \quad \sum \frac{\varphi(\log s)}{s}, \quad \sum \frac{\varphi(\log_2 s)}{s \log s},$$

$$\sum \frac{\varphi(\log_r s)}{s \log s \log_2 s \dots \log_{r-1} s}$$

sont en même temps convergentes ou divergentes si $\varphi(x)$ est une fonction positive non croissant avec x .

Voici un autre théorème qui est d'une plus grande portée. *Les séries*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(x), \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(\psi(s)) \psi'(s)$$

sont en même temps convergentes ou divergentes dans les conditions suivantes:

La fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment et elle admet, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

a un sens. La fonction $\psi(x)$ tend vers l'infini avec x et elle admet, pour $x \geq 1$, une dérivée continue d'ordre $m+1$ qui, à partir d'une certaine valeur de x , ne

change pas de signe quand x augmente. On suppose en outre que la dérivée $\psi'(x)$ tende vers une limite quand x augmente indéfiniment.

En effet la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s)$$

sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$$

aura ou non un sens. Posons

$$f(x) = \varphi(\psi(x)) \psi'(x).$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx$$

a un sens le théorème résulte du lemme du paragraphe précédent. Mais on s'assure aisément qu'il en est ainsi car des hypothèses que nous venons de faire il résulte que, quand x augmente indéfiniment, les dérivées

$$\psi^{(v)}(x) \quad v = 2, 3, \dots, m$$

tendent vers zéro en variant toujours dans le même sens à partir d'une certaine valeur de x . La dérivée $f^{(m)}(x)$ est de la forme

$$f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(\psi(x)) [\psi'(x)]^{m+1} + \sum c \varphi^{(s)}(\psi(x)) [\psi'(x)]^{s_1} \dots [\psi^{(p+1)}(x)]^{s_{p+1}}.$$

L'intégrale

$$\int_1^{\infty} |\varphi^{(m)}(\psi(x)) \psi'(x)| dx$$

est par hypothèse convergente; il en est donc de même de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |\varphi^{(m)}(\psi(x)) [\psi'(x)]^{m+1}| dx.$$

D'autre part on sait trouver une constante C telle que

$$\int_0^{\infty} |\varphi^{(s)}(\psi(x)) [\psi'(x)]^{s_1} [\psi''(x)]^{s_2} \dots [\psi^{(p+1)}(x)]^{s_{p+1}}| dx < C \int_0^{\infty} |\psi^{(v)}(x)| dx, \quad v > 1.$$

Mais l'intégrale au second membre converge parce que $\psi^{(v)}(x)$ ne change pas de signe à partir d'une certaine valeur de x et $\psi^{(v-1)}(x)$ tend vers une limite quand x augmente indéfiniment. Le théorème est ainsi démontré.

Nous venons de voir que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(s^\alpha)}{s^\beta}, \quad 0 < \alpha < 1$$

converge ou diverge suivant que $\alpha + \beta - 1$ sera positif ou non. En posant $\psi(x) = \log x$ ou $\psi(x) = \log_r x$ on en conclut que les deux séries suivantes

$$\sum \frac{\sin((\log s)^\alpha)}{s (\log s)^\beta},$$

$$\sum \frac{\sin((\log_r s)^\alpha)}{s \log s \log_2 s \dots \log_{r-1} s (\log_r s)^\beta}$$

convergent, si $\beta > 1 - \alpha$, et divergent, si $\beta \leq 1 - \alpha$. Mais ceci est une parenthèse que je me hâte de fermer pour revenir au problème qui forme l'objet principal de ce Mémoire.

Démonstration de l'existence de la fonction $F(x|\omega)$.

9. Considérons la solution principale de l'équation

$$\Delta_{\omega} F(x) = \varphi(x),$$

définie par la limite

$$F(x|\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_a^{\infty} \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \right]. \quad (11)$$

Soit ω un nombre positif. Supposons que

1° la fonction $\varphi(x)$ admette, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro, quand x augmente indéfiniment,

2° l'intégrale

$$\int_0^{\infty} B_m(-z) \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz \quad (12)$$

converge¹ et cela uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$.

Soit B un nombre positif quelconque plus grand que b . Je veux démontrer que l'expression (12) tend uniformément vers une limite dans l'intervalle $b \leq x \leq B$. Nous avons supposé que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{x} = 0,$$

et en général

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(m-\nu)}(x)}{x^\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

En particulier on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0.$$

La série et l'intégrale² qui entrent dans l'expression (12) convergeront donc pour toute valeur positive de η , et pour toute valeur de $x > b$. Cela posé, remplaçons la fonction $\varphi(x)$ par $\varphi(x)e^{-\eta x}$ dans la formule d'Euler (3) et puis remplaçons x successivement par $x + \omega, x + 2\omega, \dots, x + (n-1)\omega$. En ajoutant ensemble les n équations ainsi obtenues on trouve l'identité suivante

¹ La condition 2° est en particulier satisfaite si la série $\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + s\omega)$ converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x < b + \omega$. Elle est satisfaite encore si l'intégrale

$$\int_b^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

a un sens. Enfin la condition 2° est remplie si la fonction $\varphi^{(m)}(x)$ est monotone à partir d'une certaine valeur de x ; c'est ce qui résulte d'un théorème classique de Dirichlet parce que l'intégrale

$$\int_p^{p+1} B_m(-z) dz$$

est nulle quel que soit p .

² On suppose, pour fixer les idées, que $a \geq b$.

$$\begin{aligned}
& \int_a^{x+n\omega} \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+h\omega+s\omega) e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)} \\
&= \int_a^x \varphi(z) e^{-\eta z} dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) D_x^{\nu-1} [\varphi(x) e^{-\eta x}] \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) D_x^{\nu-1} [\varphi(x+n\omega) e^{-\eta(x+n\omega)}] \\
&\quad + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^n \dot{B}_m(h-z) D_x^m [\varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}] dz,
\end{aligned}$$

qui est valable quel que soit $x \geq b$. Faisons tendre n vers l'infini, pendant que η reste positif et fixe. De l'égalité (13) il résulte que le troisième terme au second membre tend vers zéro. On aura donc

$$\begin{aligned}
& \int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{s=0}^\infty \varphi(x+h\omega+s\omega) e^{-\eta(x+h\omega+s\omega)} \\
&= \int_a^x \varphi(z) e^{-\eta z} dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) D_x^{\nu-1} [\varphi(x) e^{-\eta x}] \\
&\quad + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z) D_x^m [\varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}] dz \quad (14)
\end{aligned}$$

Je fais maintenant tendre η vers zéro. Le premier et le second terme au second membre tendent uniformément vers des limites finies. Le dernier terme au second membre s'exprime par $m+1$ intégrales de la forme

$$P_\nu = \eta^\nu \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z) \varphi^{(m-\nu)}(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Soit d'abord $\nu = 0$. En intégrant par partie on trouve

$$P_0 = f(0) e^{-\eta x} - \eta \omega \int_0^\infty f(z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz,$$

où l'on a posé pour abrégier

$$f(z) = \int_z^{\infty} \dot{B}_m(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz.$$

Soit ε un nombre positif. De l'hypothèse 2° il résulte qu'on sait trouver un nombre N , indépendant de x , tel que

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad \text{si } z \geq N,$$

quel que soit x dans l'intervalle $b \leq x \leq B$. On aura donc

$$\begin{aligned} \left| \eta \omega \int_0^{\infty} f(z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz \right| &< \left| \eta \omega \int_0^N f(z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz \right| + \varepsilon \eta \omega \int_N^{\infty} e^{-\eta(x+\omega z)} dz \\ &< \eta \omega \int_0^N |f(z)| dz + \varepsilon e^{-\eta(x+\omega N)}. \end{aligned}$$

Quand η tend vers zéro le dernier membre de cette inégalité tend vers ε . Comme ε est aussi petit que l'on veut, on a donc uniformément

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P_0 = f(0).$$

Soit maintenant $\nu > 0$. Je veux démontrer que P_ν tend vers zéro avec η . Dans ce but considérons l'intégrale

$$\psi(z) = - \int_z^{\infty} \dot{B}_m(h-z) e^{-\eta \omega z} dz.$$

Quand η tend vers zéro cette intégrale tend vers une limite. En effet, on a évidemment

$$\psi(z) = - \frac{e^{-\eta \omega z}}{1 - e^{-\eta \omega}} \int_0^1 \dot{B}_m(h-z-t) e^{-\eta \omega t} dt.$$

Mais puisque

$$\int_x^{x+1} \dot{B}_m(t) dt = 0$$

on peut écrire cette expression comme il suit

$$\psi(z) = e^{-\eta \omega z} \int_0^1 \dot{B}_m(h-z-t) \frac{1 - e^{-\eta \omega t}}{1 - e^{-\eta \omega}} dt.$$

La dernière intégrale est une fonction périodique de z avec la période 1. Quand η tend vers zéro on voit aisément que cette intégrale tend vers une limite finie qui est d'ailleurs égale à

$$\int_0^1 \dot{B}_m(h-z-t) t dt = \frac{\dot{B}_{m+1}(h-z)}{m+1}.$$

On sait donc trouver une constante C telle que, pour toute valeur positive de η

$$|\psi(z)| < C e^{-\eta \omega z}$$

et cela quel que soit z . En particulier, quand z augmente indéfiniment pendant que η reste positif et fixe, la fonction $z^p \psi(z)$ tend vers zéro quel que soit p . Cela posé, considérons P_ν , où l'on suppose que $1 \leq \nu \leq m$. En intégrant par partie on trouve

$$P_\nu = -\eta^\nu \psi(0) q^{(m-\nu)}(x) e^{-\eta x} - \eta^\nu \omega e^{-\eta x} \int_0^\infty q^{(m-\nu+1)}(x+\omega z) \psi(z) dz.$$

Le premier terme au second membre tend vers zéro avec η . La valeur absolue du second terme est plus petite que

$$\eta^\nu C \int_x^\infty |q^{(m-\nu+1)}(z)| e^{-\eta z} dz. \quad (15)$$

Mais de l'égalité (13) il résulte qu'on sait trouver un nombre positif N tel que

$$|q^{(m-\nu+1)}(z)| < \varepsilon z^{\nu-1}, \quad \text{si } z > N,$$

quel que soit le nombre positif ε . L'expression (15) est donc plus petite que

$$\eta^\nu C \int_x^N |q^{(m-\nu+1)}(z)| e^{-\eta z} dz + C \varepsilon \eta^\nu \int_N^\infty z^{\nu-1} e^{-\eta z} dz.$$

Le premier terme tend vers zéro avec η . Le second terme est égal à

$$\varepsilon C \int_{\eta N}^{\infty} z^{\nu-1} e^{-z} dz,$$

et cette intégrale tend vers $\varepsilon C(\nu-1)!$ quand η tend vers zéro. Comme ε est aussi petit que l'on veut on en conclut qu'on a uniformément

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m.$$

Par conséquent, le second membre de l'équation (14) tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro, et nous aurons

$$F(x+h\omega|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz. \quad (16)$$

quel que soit le nombre h dans l'intervalle $0 \leq h \leq 1$. Il en résulte en particulier que $F(x|\omega)$ est une fonction continue de x dans l'intervalle $x \geq b$.

10. Le théorème que nous venons de démontrer est vrai encore si l'on suppose que la dérivée $\varphi^{(m)}(x)$ soit continue, pour $x \geq b$, et que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

ait un sens. Pourtant notre démonstration doit être modifiée un petit peu parce que dans le cas actuel il peut arriver que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(x) = \infty.$$

Mais la dérivée d'ordre $m-1$ tend nécessairement vers une limite finie c quand x augmente indéfiniment. En considérant P_1 on n'a pas besoin d'intégrer par partie, mais on peut écrire cette intégrale comme il suit

$$P_1 = \eta c \int_0^\infty \dot{B}_m(h-z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz + \int_0^\infty \eta \dot{B}_m(h-z) (\varphi^{(m-1)}(x+\omega z) - c) e^{-\eta(x+\omega z)} dz.$$

La première intégrale tend vers une limite finie, comme nous l'avons vu, et l'on démontre comme plus haut que la seconde intégrale tend vers zéro avec η . On a donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P_1 = 0.$$

La démonstration précédente s'applique d'ailleurs sans modifications. On peut faire la même remarque relativement à la démonstration de l'existence de la limite

$$G(x|\omega) = \int_{\omega}^x \varphi(x) \nabla_{\omega} x$$

que nous avons donnée dans le paragraphe 5.

En faisant varier ω sur un segment quelconque de l'axe des nombres *positifs* on voit en outre que les limites

$$\int_{\omega}^x \varphi(x) \nabla_{\omega} x, \quad \int_{a^+}^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x$$

convergent uniformément par rapport à ω . *Les deux solutions principales* $G(x|\omega)$ *et* $F(x|\omega)$ *sont donc, pour* $\omega > 0$, *des fonctions continues de* ω .

Considérons un cas particulier. Posons $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$, ν étant un entier positif. Cette fonction satisfait à nos conditions. En prenant $h = 0$ et $m = \nu$, l'équation (16) se réduit à la relation suivante

$$\nu \int_0^x x^{\nu-1} \Delta x = B_{\nu}(x).$$

C'est à dire que les polynomes de Bernoulli se représentent par la limite:

$$B_{\nu}(x) = \nu \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\eta x} dx - \sum_{s=0}^{\infty} (x+s)^{\nu-1} e^{-\eta(x+s)} \right]. \quad (17)$$

On peut vérifier cette égalité de la manière suivante. Si η est positif on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\eta(x+s)} = \frac{e^{-\eta x}}{1 - e^{-\eta}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta x} dx = \frac{1}{\eta}.$$

En dérivant $\nu - 1$ fois par rapport à η , on trouvera

$$\sum_{s=0}^{\infty} (x+s)^{\nu-1} e^{-\eta(x+s)} = (-1)^{\nu-1} D_{\eta}^{\nu-1} \frac{e^{-\eta x}}{1-e^{-\eta}},$$

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\eta x} dx = \frac{(\nu-1)!}{\eta^{\nu}}.$$

Quand η tend vers zéro la série et l'intégrale tendent vers l'infini. Mais soustrayons membre à membre les deux dernières équations et rappelons qu'on a, au voisinage du point $\eta = 0$ (cf. (4) paragraphe 6.)¹

$$\frac{e^{-\eta x}}{1-e^{-\eta}} = \frac{1}{\eta} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^{s-1}}{s!} B_s(x). \tag{18}$$

Substituons ce développement, nous aurons

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\eta x} dx - \sum_{s=0}^{\infty} (x+s)^{\nu-1} e^{-\eta(x+s)} = \sum_{s=\nu}^{\infty} \frac{(-\eta)^{s-\nu} B_s(x)}{(s-\nu)! s}.$$

En faisant tendre η vers zéro on retrouve l'équation (17).

Valéurs asymptotiques des solutions principales.

11. En démontrant l'existence des fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ nous avons obtenu en même temps les deux développements suivants

$$G(x+h\omega|\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} E_{\nu}(h) \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \dot{E}_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz, \tag{19}$$

$$F(x+h\omega|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} B_{\nu}(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \dot{B}_m(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz. \tag{20}$$

¹ Des équations (18) et (17) on peut tirer ces deux autres relations

$$B_{\nu}(x) = \lim_{\rho \rightarrow 1} (\rho D_{\rho})^{\nu} \frac{\rho^x \log \rho}{\rho-1},$$

et

$$B_{\nu}(x) = \nu \lim_{\rho \rightarrow 1} (\rho D_{\rho})^{\nu-1} \left[\frac{\rho^x}{\rho-1} - \frac{1}{\log \rho} \right].$$

Quand m augmente indéfiniment nos développements seront rarement convergents, comme nous le verrons dans la suite. Néanmoins ces deux séries jouent un rôle capital dans l'étude des propriétés des solutions principales; on peut opérer en toute sûreté avec elles en tenant compte du reste. D'abord elles mettent immédiatement en évidence comment se comportent nos solutions pour les valeurs positives et très grandes de x . En effet, soit $h=0$ et posons pour abrégé

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu C_\nu}{\nu! 2^\nu} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$Q(x) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

On aura

$$G(x|\omega) = P(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz, \quad (21)$$

$$F(x|\omega) = Q(x) + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \dot{E}_m(-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz. \quad (22)$$

Par hypothèse les intégrales aux seconds membres convergent uniformément par rapport à x . Ces deux intégrales tendent donc vers zéro quand x augmente indéfiniment. On a par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [G(x|\omega) - P(x)] = 0, \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [F(x|\omega) - Q(x)] = 0. \quad (24)$$

Les deux limites que nous avons prises comme définition des solutions principales ont l'avantage de pouvoir servir dans ces cas assez étendus. Mais, dans le cas actuel, on peut en trouver d'autres qui sont quelquefois d'une application plus facile. En effet, des équations aux différences finies

$$\nabla_\omega G(x) = \varphi(x),$$

$$\triangle_\omega F(x) = \varphi(x)$$

il résulte qu'on a, pour toute valeur entière et positive de n ,

$$G(x|\omega) = 2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s\omega) + (-1)^n G(x+n\omega|\omega), \quad (25)$$

$$F(x|\omega) = -\omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+s\omega) + F(x+n\omega|\omega).$$

On peut écrire la dernière équation comme il suit

$$F(x|\omega) = Q(x+n\omega) - \omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+s\omega) + [F(x+n\omega|\omega) - Q(x+n\omega)].$$

Faisons tendre l'entier n vers l'infini. Le dernier terme au second membre tendra vers zéro, en vertu de l'équation (24), et l'on aura

$$F(x|\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} [Q(x+n\omega) - \omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+s\omega)]. \quad (26)$$

De l'équation (25) on déduit de même

$$G(x|\omega) = 2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s\omega) + (-1)^n P(x+n\omega) + (-1)^n [G(x+n\omega|\omega) - P(x+n\omega)].$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouvera

$$G(x|\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} [2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s\omega) + (-1)^n P(x+n\omega)]. \quad (27)$$

Ces deux égalités ont lieu uniformément dans l'intervalle $x \geq b$. Si nous posons par exemple $\varphi(x) = x^2$, nous obtenons

$$E_2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (x+s)^2 + (-1)^n (x+n)(x+n-1)],$$

$$B_3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-3 \sum_{s=0}^{n-1} (x+s)^2 + (x+n)(x+n-1)(x+n-\frac{1}{2}) \right].$$

On peut aisément transformer les expressions (26) et (27) de manière à en former des séries convergentes. On a en effet

$$Q(x+n\omega) - \omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+s\omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{n-1} [\varphi(x+s\omega) - \triangle_{\omega} Q(x+s\omega)],$$

$$2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s\omega) + (-1)^n P(x+n\omega) = P(x) + 2 \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \nabla_{\omega} P(x+s\omega)].$$

Quand n augmente indéfiniment les premiers membres tendent uniformément vers les fonctions F et G , on a par conséquent

$$F(x|\omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \triangle_{\omega} Q(x+s\omega)], \quad (28)$$

$$G(x|\omega) = P(x) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \nabla_{\omega} P(x+s\omega)]. \quad (29)$$

Ces deux séries convergent donc uniformément dans l'intervalle $x \geq b$. En faisant $h = \frac{\omega}{2}$ dans les équations (19) et (20), et en posant pour abrégé

$$P_1(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^{\nu} E_{\nu}}{\nu! 2^{\nu}} \varphi^{(\nu)}\left(x - \frac{\omega}{2}\right),$$

$$Q_1(x) = \int_a^{x - \frac{\omega}{2}} \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{\nu} D_{\nu}}{\nu! 2^{\nu}} \varphi^{(\nu-1)}\left(x - \frac{\omega}{2}\right),$$

on trouve de même

$$F(x|\omega) = Q_1(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \triangle_{\omega} Q_1(x+s\omega)], \quad (30)$$

$$G(x|\omega) = P_1(x) + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \nabla_{\omega} P_1(x+s\omega)], \quad (31)$$

où l'on suppose que $x \geq b + \frac{\omega}{2}$. Mais ces séries ne diffèrent pas essentiellement des séries (28) et (29).

Dans toutes ces formules on peut évidemment choisir m comme le plus petit entier tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

En déterminant m ainsi on donne aux séries la forme la plus simple. Mais il convient de remarquer que rien ne permet d'affirmer la convergence absolue des séries dont nous venons de démontrer la convergence uniforme. En augmentant la valeur de m on augmente souvent la rapidité de la convergence et il arrive que les séries convergent absolument pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre. Il est d'ailleurs facile d'en préciser les conditions mais je ne m'y arrête pas.

Soit par exemple $\varphi(x) = \sqrt{x}$. En prenant $m=1$, on trouvera $P(x) = \sqrt{x}$ et par conséquent

$$\int \sqrt{x} \nabla x = \sqrt{x} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\sqrt{x+s} - \sqrt{x+s+1}].$$

Il résulte de notre analyse que cette série converge uniformément dans tout domaine fini. Mais la convergence n'est absolue pour aucune valeur de x . D'autre part, en prenant $m=2$, on trouvera

$$P(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}},$$

et la série correspondante convergera absolument pour toute valeur positive de x .

12. Resserrons un peu les hypothèses et supposons que $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions du paragraphe 10. Nous avons vu que $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont, pour $\omega > 0$, des fonctions continues de ω . Qu'est-ce qui se passe quand ω tend vers zéro, pendant que x reste fixe? Pour le voir reprenons l'équation (20) qui est valable pour toute valeur positive de ω . Posons pour abrégé

$$R_{m+1} = \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} B_m(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz.$$

On sait trouver une constante C telle que

$$|R_{m+1}| < C \omega^{m+1} \int_0^{\infty} |\varphi^{(m)}(x+\omega z)| dz = C \omega^m \int_x^{\infty} |\varphi^{(m)}(z)| dz < C \omega^m \int_b^{\infty} |\varphi^{(m)}(z)| dz.$$

La fonction $|\omega^{-m} R_{m+1}|$ reste donc plus petite qu'une constante, quand ω tend vers zéro. Mais comme on a

$$R_m = \frac{\omega^m}{m!} B_m(h) \varphi^{(m-1)}(x) + R_{m+1},$$

on en conclut que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{R_m}{\omega^{m-1}} = 0.$$

De même, en considérant la série (19) et en posant

$$R'_m = \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^\infty E_{m-1}(h-z) \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz$$

on démontre que la fonction

$$\left| \frac{R'_m}{\omega^{m-1}} \right|$$

reste au-dessous d'une limite finie quand ω tend vers zéro. On a donc en particulier

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(x|\omega) = \varphi(x),$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(x) dx,$$

ω tendant vers zéro par des valeurs positives. Ces deux égalités s'accordent avec un résultat que nous avons obtenu dans le paragraphe 2. Mais on peut affirmer quelque chose de plus. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit indéfiniment dérivable, pour $x \geq b$, et que l'intégrale

$$\int_b^\infty |\varphi^{(v)}(x)| dx$$

converge si $v \geq m$. Dans ces conditions il résulte de ce que nous venons de dire que les séries de puissances

$$G(x+h\omega|\omega) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$F(x+h\omega|\omega) \sim \int_a^x \varphi(x) dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

représentent les fonctions aux premiers membres asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites de ω . Ces égalités asymptotiques sont surtout remarquables dans le cas $h=0$.

Les dérivées des solutions principales.

13. Des deux dernières séries on peut encore tirer un autre résultat important. Supposons que la dérivée $\varphi^{(m)}(x)$ soit continue, pour $x \geq b$, et que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x+s\omega)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. On aura

$$F(x + h\omega | \omega) = \int_a^x \varphi(x) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^1 B_m(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s) dz. \quad (32)$$

Soit $m > 1$. En dérivant par rapport à h on trouvera

$$\frac{dF(x + h\omega)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^1 B_{m-1}(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s) dz.$$

En faisant $h = 0$ cette équation peut s'écrire comme il suit

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(x) \triangle_\omega x = \int_a^x \varphi'(x) \triangle_\omega x + \varphi(a). \quad (33)$$

Dérivons $m - 1$ fois par rapport à h , nous trouverons

$$\frac{d^{m-1} F(x + h\omega)}{dx^{m-1}} = \varphi^{(m-2)}(x) + \omega B_1(h) \varphi^{(m-1)}(x) + \omega^2 \int_0^1 B_1(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s) dz.$$

Dans la dernière intégrale la fonction sous le signe est discontinue dans le point $z = h$. Décomposons l'intégrale en deux

$$\int_0^1 = \int_0^h + \int_h^1$$

et dérivons encore une fois par rapport à h , nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{d^m F(x + h\omega)}{dx^m} &= \varphi^{(m-1)}(x) + \omega \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s) dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + h\omega + s\omega) \\ &= \varphi^{(m-1)}(x) + \int_x^\infty \varphi^{(m)}(z) dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + h\omega + s\omega). \end{aligned}$$

En faisant $h = 0$, on aura

$$\frac{d^m F(x|\omega)}{dx^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(m-1)}(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x + s\omega) \quad (34)$$

De notre hypothèse relativement à $\varphi(x)$ résulte qu'on peut rendre la valeur de la dernière série aussi petite que l'on veut en choisissant x suffisamment grand et que $\varphi^{(m-1)}(x)$ tend vers une limite. Par conséquent, la fonction $F(x|\omega)$ admet, pour $x \geq b$, une dérivée continue d'ordre m par rapport à x , qui tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment. Cette propriété est caractéristique pour la solution principale. Car toute autre solution est égale à la solution principale augmentée d'une fonction périodique de x . Et une fonction périodique qui possède la propriété que nous venons d'énoncer est égale à une constante. La solution principale de l'équation

$$\triangle_{\omega} F(x) = \varphi(x)$$

est donc la solution ayant une dérivée continue d'un certain ordre (≥ 0) qui tend vers une limite quand x augmente indéfiniment.

14. De même considérons l'équation

$$\nabla_{\omega} G(x) = \varphi(x),$$

et supposons $\varphi^{(m)}(x)$ continue, pour $x \geq b$, et la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + s\omega)$$

uniformément convergente dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. On aura

$$G(x + h\omega|\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} E_{\nu}(h) \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^1 E_{m-1}(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x + \omega z + \omega s) dz. \quad (35)$$

En dérivant par rapport à h on trouve

$$\frac{dG(x+h\omega)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m-2} \frac{\omega^\nu}{\nu!} E_\nu(h) \varphi^{(\nu+1)}(x) + \frac{\omega^{m-1}}{(m-2)!} \int_0^1 E_{m-2}(h-z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x+\omega z+\omega s) dz.$$

En faisant $h=0$ cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dx} \mathcal{S} \varphi(x) \nabla_\omega x = \mathcal{S} \varphi'(x) \nabla_\omega x. \tag{36}$$

En dérivant $m-1$ fois par rapport à h et en posant ensuite $h=0$ on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1} G(x|\omega)}{dx^{m-1}} &= \varphi^{(m-1)}(x) + \omega \int_0^1 E_0(-z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x+\omega z+\omega s) dz \\ &= \varphi^{(m-1)}(x) - \int_x^{x+\omega} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(z+s\omega) dz. \end{aligned}$$

Dérivons de nouveau relativement à x , nous trouverons

$$\frac{d^m G(x|\omega)}{dx^m} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(m)}(x+s\omega). \tag{37}$$

Par conséquent, la fonction $G(x|\omega)$ admet, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. On peut ici faire la même remarque que dans le cas précédent. Cette propriété distingue la solution principale de toute autre solution.

Si l'on suppose qu'on ait

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \varphi^{(m)}(x) = 0,$$

où $p > 1$, il résulte immédiatement des équations (37) et (34) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{p-1} G^{(m)}(x|\omega) = 0$$

et que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{p-1} (F^{(m)}(x|\omega) - c) = 0,$$

c étant une constante. En particulier, si $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable, et si l'on suppose que, quel que soit p , on sache trouver un entier m tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \varphi^{(v)}(x) = 0,$$

si $v \geq m$, il résulte de notre analyse que les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont indéfiniment dérivables par rapport à x et qu'on a, quel que soit p ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p G^{(v)}(x|\omega) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p F^{(v)}(x|\omega) = 0,$$

pourvu que v ait été choisi suffisamment grand. En appliquant, un nombre quelconque de fois, aux fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ nos deux opérations de sommation on arrive donc toujours à des expressions convergentes. Ces opérations donnent ainsi naissance à deux suites infinies de transcendentes nouvelles. Je vais consacrer un second mémoire à l'étude de ces sommes itérées. En particulier les limites

$$\int G(x|\omega) \nabla_{\omega} x,$$

$$\int_a^x F(x|\omega) \triangle_{\omega} x$$

existent. Cette propriété caractérise, elle aussi, les solutions principales, car ces deux limites cessent d'exister, si l'on remplace G ou F par une solution différente de la solution principale. En effet, si $p(x + \omega) = -p(x)$, on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s p(x + s\omega) e^{-\eta s} = p(x) \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\eta s},$$

et cette expression augmente indéfiniment quand η tend vers zéro. De même, si $\pi(x + \omega) = \pi(x)$, la limite

$$\int \pi(x) \triangle_{\omega} x$$

existe seulement dans le cas où $\pi(x)$ est une constante.

La fonction gamma et quelques autres fonctions qui s'y rattachent.

15. Examinons quelques cas particuliers. Soit $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, et posons pour abrégé

$$g(x) = \int \frac{\nabla x}{x}, \quad (38)$$

$$\Psi(x) = \int_1^x \frac{\Delta x}{x}. \quad (39)$$

Les fonctions $g(x)$ et $\Psi(x)$ sont donc, par définition, les solutions principales des équations suivantes

$$\nabla g(x) = \frac{1}{x},$$

$$\Delta \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

Dans ce qui suit nous considérons souvent, à titre d'exemple, ces deux transcendentes. STIRLING a envisagé pour la première fois, je crois, la fonction $g(x)$, et la fonction $\Psi(x)$ a été étudiée par LEGENDRE, POISSON et GAUSS.¹ De l'équation (18) paragraphe 2 il résulte que les deux fonctions sont liées entre elles par la relation

$$g(2x) = \Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Psi(x).$$

De l'équation (38) on conclut immédiatement que

$$g(x) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{x+s}, \quad (40)$$

car cette série converge (cf. paragraphe 4.). La convergence est uniforme dans tout domaine fini qui ne renferme aucun des points $x = 0, -1, -2, \dots$, mais la

¹ Au sujet de ces fonctions et de la fonction gamma voir: N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, où l'on trouve une bibliographie détaillée.

série n'est pas absolument convergente. En prenant $m=1$ dans l'équation (29) on aura $P(x)=\frac{1}{x}$. Par conséquent

$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(x+s)(x+s+1)},$$

et cette série converge absolument pour toute valeur de x qui n'est pas un entier négatif ou nul. En prenant $m=2$, on aura $P(x)=\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ et par conséquent

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2(x+s)^2(x+s+1)^2}.$$

Cette série est plus rapidement convergente que celle qui précède. En prenant $m=4$ on trouvera la série suivante

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(x+s+\frac{1}{2}\right)^2}{(x+s)^4(x+s+1)^4}$$

dont la convergence est plus rapide encore. On peut ainsi à volonté augmenter la rapidité de la convergence, mais en revanche le terme général de la série devient de plus en plus compliqué.

De l'équation (26) on déduit, en posant $m=0$,

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log n - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{x+s} \right]. \quad (41)$$

En définissant la constante d'Euler C par la limite

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} - \log n \right]$$

on trouvera donc en particulier

$$\Psi(1) = -C.$$

En faisant $m=0$, l'équation (28) se réduira à la suivante

$$\Psi(x) = \log x - \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x+s} - \log \left(1 + \frac{1}{x+s} \right) \right].$$

Posons $x = 1$, il vient

$$C = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \log \left(1 + \frac{1}{s} \right) \right].$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières équations, on obtient

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right]. \quad (42)$$

Les valeurs asymptotiques des fonctions g et Ψ se déduisent des équations (23) et (24) qui se réduisent aux suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\Psi(x) - \log x] = 0.$$

Mais on peut obtenir une approximation plus grande. En effet les séries (19) et (20) prennent dans le cas actuel la forme suivante

$$g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu} \frac{E_{\nu}(h)}{x^{\nu+1}} + m \int_0^{\infty} \dot{E}_{m-1}(z-h) \frac{dz}{(x+z)^{m+1}}, \quad (43)$$

$$\Psi(x+h) = \log x - \sum_{\nu=1}^m \frac{(-1)^{\nu} B_{\nu}(h)}{\nu x^{\nu}} + \int_0^{\infty} \dot{E}_m(z-h) \frac{dz}{(x+z)^{m+1}}, \quad (44)$$

où l'on suppose que $x > 0$. Quand m augmente indéfiniment ces deux séries de puissances divergeront mais elles représentent asymptotiquement les fonctions aux premiers membres pour les valeurs positives et très grandes de x .

De l'équation (39) on peut aisément déduire une intégrale définie qui a été trouvée par GAUSS.¹ En effet, si $t > 0$, on aura

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{-t(x+s)} = \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}}.$$

En supposant x positif on peut intégrer terme par terme par rapport à t entre η et ∞ . On trouvera

¹ Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{a\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$, Werke 3, Göttingen 1876, p. 158-9.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta(x+s)}}{x+s} = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} dt.$$

On a en outre, si $\eta > 0$,

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\eta z}}{z} dz = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En substituant ces deux expressions dans l'équation (39) on trouvera

$$\Psi(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} \right) dt,$$

c'est-à-dire que $\Psi(x)$ se représente, si $x > 0$, par l'intégrale de Gauss:

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} \right) dt. \quad (45)$$

En remarquant que

$$\log x = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt, \quad x > 0$$

on en déduit encore l'intégrale de BINET

$$\Psi(x) = \log x + \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \frac{1}{t} - 1 \right) dt. \quad (46)$$

On démontre de la même manière que

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-tx}}{1+e^{-t}} dt,$$

où l'on suppose encore que x est positif.¹ En dérivant par rapport à x dans l'équation (42), on trouvera

¹ Notre démonstration est valable pour les valeurs complexes de x dont la partie réelle est positive.

$$\Psi'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(x+s)^2}.$$

Appliquons à cette fonction la formule (28). En faisant successivement $m = 0, 1$ ou 2 on obtiendra les trois séries convergentes suivantes

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(x+s)^2(x+s+1)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2(x+s)^2(x+s+1)^2} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{6(x+s)^3(x+s+1)^3}, \end{aligned}$$

parmi lesquelles la seconde a été trouvée par HERMITE.¹

Comme vérification des formules générales considérons enfin la fonction gamma. Cette fonction satisfait à l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Par conséquent

$$\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log x.$$

Je définis² la fonction $\log \Gamma(x)$ comme la solution principale de cette équation qui s'annule dans le point $x = 1$. On a donc

$$\log \Gamma(x) = \int_0^x \log x \Delta x + c,$$

c étant une constante qu'il reste à déterminer. En posant $m = 1$, on trouvera

$$Q(x) = \int_0^x \log x dx - \frac{1}{2} \log x = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (26), on obtient

¹ Correspondance d'Hermite et de Stieltjes 2, Paris 1905, p. 399.

² Cette définition peut aussi s'énoncer comme il suit: $\log \Gamma(x)$ est la solution qui s'annule dans le point $x = 1$, et qui admet, pour $x > 0$, une dérivée continue du second ordre qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment.

$$\log \Gamma(x) = c + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(x + n - \frac{1}{2} \right) \log n - n - \sum_{s=0}^{n-1} \log(x+s) \right].$$

Faisons $x = 1$ dans cette équation, il vient

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{s=1}^n \log s - \left(n + \frac{1}{2} \right) \log n + n \right].$$

Ajoutons membre à membre ces deux relations, nous aurons

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x \log n - \log x + \sum_{s=1}^{n-1} (\log s - \log(x+s)) \right]. \quad (47)$$

On en tire le produit de GAUSS

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)}.$$

En remplaçant x par $1-x$, on obtiendra

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(1+x) \cdots (n-1+x)} \frac{n! n^{-x}}{(1-x)(2-x) \cdots (n-x)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{x(1-x^2)(2^2-x^2) \cdots (n^2-x^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x \left(1 - \frac{x^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction gamma satisfait à la relation

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

qu'on doit à EULER. Dans le but de déterminer la constante¹ c rappelons que nous avons démontré dans le paragraphe 2 qu'on a

$$\sum_0^x \Delta \varphi(x) \Delta x = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

¹ On peut aussi déterminer cette constante de la manière suivante. Par définition la fonction $\log \Gamma(x)$ s'annule dans le point $x = 1$ on a donc

$$c = - \int_0^1 \log x \Delta x.$$

En posant $\varphi(x) = \log \Gamma(x)$, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \sum_0^x \log x \Delta x + \int_0^1 \log \Gamma(x) dx.$$

Il est facile d'évaluer la dernière intégrale. On a en effet

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log (\Gamma(x) \Gamma(1-x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{\pi}{\sin \pi x} dx.$$

Mais puisque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi x dx = -\frac{1}{2} \log 2$$

on trouve la formule de Raabe

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

En substituant cette valeur dans la formule précédente, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \sum_0^x \log x \Delta x + \log \sqrt{2\pi}. \quad (48)$$

De l'égalité (24) on déduit maintenant la valeur asymptotique suivante de la fonction gamma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\log \Gamma(x) - (x - \frac{1}{2}) \log x + x] = \log \sqrt{2\pi}. \quad (49)$$

Par conséquent

$$\log \Gamma(x) = \sum_0^x \log x \Delta x - \sum_0^1 \log x \Delta x,$$

c'est-à-dire que

$$\log \Gamma(x+1) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \log \nu e^{-\eta \nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \log(x+\nu) e^{-\eta(x+\nu)} \right].$$

Si l'on veut aller plus loin, on peut appliquer la relation (20) qui nous donnera le développement suivant

$$\log \Gamma(x+h) = \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + B_1(h) \log x - \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{B_{\nu+1}(h) (-1)^\nu}{\nu(\nu+1)} \frac{1}{x^\nu} - \frac{1}{m} \int_0^\infty B_m(z-h) \frac{dz}{(x+z)^{m+1}} \quad (50)$$

qui se réduit à la série de Stirling pour $h=0$. Cette équation est donc valable pour toute valeur positive de x .¹

On peut aussi, si l'on aime mieux, déduire les propriétés de la fonction gamma de celles de la fonction $\Psi(x)$ qui est d'une nature plus simple. En effet, on a par définition

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \log x \Delta x + c_1.$$

En dérivant par rapport à x on trouvera

$$D_x \log \Gamma(x) = \int_1^x \frac{\Delta x}{x} = \Psi(x). \quad (51)$$

Intégrons entre 1 et x , nous obtenons

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \Psi(x) dx \quad \text{c. q. f. d.}$$

En intégrant terme par terme dans la série (42) on trouve

$$\log \Gamma(x+1) = -Cx + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{x}{s} - \log \left(1 + \frac{x}{s} \right) \right]. \quad (52)$$

On en tire le produit

$$\Gamma(x+1) = e^{-Cx} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{s}}}{1 + \frac{x}{s}}$$

¹ Pour ne pas sortir du cadre que nous nous sommes imposé, nous avons parlé seulement des valeurs réelles de x . Mais cette restriction n'est nullement nécessaire dans le cas actuel. Il résulte de l'analyse de la deuxième section de ce mémoire que l'équation (50) est valable, pourvu que $\pi > \arg x > -\pi$, et que la série divergente, qu'on obtient en faisant $m = \infty$, représente la fonction asymptotiquement dans le même angle.

dû à SCHLÖMILCH et dont WEIERSTRASS s'est servi dans son mémoire sur les facultés analytiques. En intégrant sous le signe dans l'intégrale (45) on trouve enfin la formule de PLANA

$$\log \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \left[x - \frac{1 - e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right] \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > -1.$$

Les termes complémentaires des séries asymptotiques.

16. Dans le paragraphe 6 nous avons mentionné plusieurs travaux importants sur la valeur approchée du reste de la formule sommatoire d'Euler. Quoique nous n'ayons pas de remarques essentiellement nouvelles à présenter sur ce sujet nous allons pourtant indiquer diverses expressions du reste de nos deux séries asymptotiques en y appliquant un raisonnement voisin de celui des auteurs cités. Supposons que la dérivée $\varphi^{(2m)}(x)$ soit continue pour $x \geq b$, et que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + s\omega)$$

converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$, et enfin que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(2m-1)}(x) = 0.$$

Considérons l'équation (20). Je parlerai seulement du cas où l'on fait $h = 0$ ou $h = \frac{1}{2}$. Ces deux cas sont ceux qui sont les plus remarquables et ils nous conduisent aux équations suivantes

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x) + R_{2m+1}, \quad (53)$$

où

$$R_{2m+1} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} B_{2m}(z) \varphi^{(2m)}(x + \omega z) dz, \quad (54)$$

et

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu} D_{2\nu}}{2^{2\nu} (2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x) + \bar{R}_{2m+1}, \quad (55)$$

où

$$\bar{R}_{2m+1} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \bar{B}_{2m}\left(z + \frac{1}{2}\right) \varphi^{(2m)}(x + \omega z) dz. \quad (56)$$

Pour juger de la grandeur du reste on peut avec avantage le rapprocher au dernier terme de la série. On aura

$$R_{2m} = R_{2m+1} + \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \quad (57)$$

$$\bar{R}_{2m} = \bar{R}_{2m+1} + \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} R_{2m} &= \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} (\bar{B}_{2m}(z) - B_{2m}) \varphi^{(2m)}(x + \omega z) dz \\ &= \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^1 (B_{2m}(z) - B_{2m}) \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) dz. \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{2m} &= \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \left(\bar{B}_{2m}\left(z + \frac{1}{2}\right) - B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \varphi^{2m}(x + \omega z) dz \\ &= \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(B_{2m}\left(z + \frac{1}{2}\right) - B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{2m}(x + \omega z + \omega s) + \varphi^{(2m)}(x - \omega z + \omega(s+1))]. \end{aligned} \quad (59)$$

Remarquons que la fonction $B_{2m}(z) - B_{2m}$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0 < z < 1$. En appliquant le théorème de la moyenne de DARBOUX¹ à l'expression (58) on trouvera

$$R_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + \theta\omega + s\omega) \int_0^1 (B_{2m}(z) - B_{2m}) dz, \quad 0 < \theta < 1,$$

¹ l. c. p. 293-5.

λ étant une quantité imaginaire dont le module est au plus égal à l'unité. Mais on sait que

$$\int_0^1 B_{2m}(z) dz = 0.$$

L'expression précédente se réduit donc à la suivante

$$R_{2m} = -\lambda \frac{\omega^{2m+1} B_{2m}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + \theta\omega + s\omega).$$

En tenant compte de la relation (34) on peut encore écrire cette équation comme il suit

$$R_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} F^{(2m)}(x + \theta\omega | \omega), \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction réelle de la variable réelle x on peut ici, et dans ce qui suit, supprimer le facteur λ .

En remarquant que la fonction $B_{2m}\left(z + \frac{1}{2}\right) - B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0 < z < \frac{1}{2}$, on peut encore appliquer le théorème de la moyenne à l'expression (59) et, en tenant compte de l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2m}\left(z + \frac{1}{2}\right) dz = 0,$$

on trouvera

$$\bar{R}_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m} (2m)!} F^{(2m)}(x + \theta\omega | \omega), \quad 0 < \theta < 1.$$

17. Passons à la fonction G et supposons la dérivée $\varphi^{(n)}(x)$ continue pour $x \geq b$, et la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(n)}(x + s\omega)$$

uniformément convergente dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$. Faisons $h = 0$ dans l'équation (19), on aura, pour $x \geq b$, si n est de la forme $n = 2m + 1$,

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{2\nu-1} C_{2\nu-1}}{2^{2\nu-1} (2\nu-1)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x) + \mathfrak{R}_{2m+1}, \quad (60)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{2m+1} &= -\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \dot{E}_{2m}(z) \varphi^{(2m+1)}(x+\omega z) dz \\ &= -\frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^1 E_{2m}(z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(2m+1)}(x+\omega z+\omega s) dz. \end{aligned} \quad (61)$$

Mais en faisant $h = \frac{1}{2}$ on aura, si n est de la forme $n = 2m$,

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} \mid \omega\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^{2\nu} E_{2\nu}}{2^{2\nu} (2\nu)!} \varphi^{(2\nu)}(x) + \bar{\mathfrak{R}}_{2m}, \quad (62)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{R}}_{2m} &= \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \dot{E}_{2m-1}\left(z - \frac{1}{2}\right) \varphi^{(2m)}(x+\omega z) dz \\ &= \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} \int_0^1 \dot{E}_{2m-1}\left(z - \frac{1}{2}\right) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(2m)}(x+\omega z+\omega s) dz. \end{aligned} \quad (63)$$

Le polynome $E_{2m}(z)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0 < z < 1$. En appliquant le théorème de la moyenne à l'expression (61) on trouvera donc

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = -\lambda \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(2m+1)}(x+\theta\omega+s\omega) \int_0^1 E_{2m}(z) dz.$$

Mais on a

$$\int_0^1 E_{2m}(z) dz = -\frac{C_{2m+1}}{2^{2m} (2m+1)!}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \lambda \frac{\omega^{2m+1} C_{2m+1}}{2^{2m} (2m+1)!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(2m+1)}(x+\theta\omega+s\omega).$$

Cette expression du reste peut encore s'écrire comme il suit

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \lambda \frac{\omega^{2m+1} C_{2m+1}}{2^{2m+1} (2m+1)!} G^{(2m+1)}(x+\theta\omega \mid \omega), \quad 0 < \theta < 1.$$

De même, puisque la fonction $\dot{E}_{2m-1}\left(z - \frac{1}{2}\right)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $0 < z < 1$, on peut appliquer le théorème de la moyenne à l'expression (63). En tenant compte de l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1}(z) dz = \frac{E_{2m}}{2^{2m}(2m)},$$

on trouvera

$$\bar{\mathfrak{R}}_{2m} = \lambda \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m}(2m)!} G^{2m}(x + \theta \omega | \omega), \quad 0 < \theta < 1.$$

18. En resserrant les hypothèses relativement à $\varphi(x)$ on peut trouver d'autres expressions du terme complémentaire qui sont plus commodes pour les applications. Supposons que la dérivée $\varphi^{(n)}(x)$ soit continue et positive, si $x > b$, et que $\varphi^{(n-1)}(x)$ tende vers zéro quand x augmente indéfiniment. Soit d'abord $n = 2m$. En appliquant le théorème de la moyenne à l'expression (54), on trouvera

$$R_{2m+1} = \frac{\omega^{2m} B_{2m}(\theta)}{(2m)!} \int_0^\infty \varphi^{(2m)}(x+z) dz, \quad 0 < \theta < 1.$$

Mais on a

$$|B_{2m}(z)| < |B_{2m}|, \quad \text{si } 0 < z < 1.$$

Par conséquent, en désignant par θ un nombre compris entre -1 et $+1$ on aura

$$R_{2m+1} = \theta \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x). \quad (64)$$

Le reste de la série (60) peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} \int_0^\infty \dot{E}_{2m-1}(z) \varphi^{(2m)}(x+\omega z) dz.$$

En y appliquant le théorème de la moyenne et en remarquant que

$$|E_{2m-1}(z)| < |E_{2m-1}(0)|, \quad \text{si } 0 < z < 1,$$

on trouvera

$$\mathfrak{R}_{2m+1} = \theta \frac{\omega^{2m-1} C_{2m-1}}{2^{2m-1}(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \quad -1 < \theta < 1. \quad (65)$$

De même, si n est de la forme $2m + 1$, on a

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m+1} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\infty} \dot{E}_{2m} \left(z + \frac{1}{2} \right) \varphi^{(2m+1)}(x + \omega z) dz$$

mais puisque

$$|E_{2m}(z)| \leq \left| E_{2m} \left(\frac{1}{2} \right) \right|, \quad \text{si } 0 \leq z \leq 1$$

on en conclut que

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m+1} = \theta \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m)}(x), \quad -1 < \theta < 1. \quad (66)$$

Par conséquent, le reste est en valeur absolue plus petit que le dernier terme de la série. En substituant l'expression (64) dans l'équation (57) on trouvera

$$R_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \quad 0 < \theta < 2. \quad (67)$$

Des équations (65) et (66) on déduira de la même manière

$$\mathfrak{R}_{2m-1} = \theta \frac{\omega^{2m-1} C_{2m-1}}{2^{2m-1} (2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(x), \quad (68)$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m)}(x), \quad (69)$$

et l'on démontre encore que

$$\overline{R}_{2m} = \theta \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x). \quad (70)$$

Dans les trois dernières équations θ désigne un nombre compris entre 0 et 2. Le terme reste admet donc le même signe que le terme suivant de la série.

19. En supposant quelque chose de plus on peut préciser les dernières inégalités. Admettons que, pour $x > b$, les dérivées $\varphi^{(n-1)}(x)$ et $\varphi^{(n+1)}(x)$ soient continues, négatives, croissantes et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. Alors si $n = 2m$, il résulte de l'expression (67) que R_{2m} et R_{2m+2} sont de signes contraires parce qu'il en est ainsi des nombres B_{2m} et B_{2m+2} . Mais on a $R_{2m+2} = R_{2m+1}$. En rapprochant l'équation (64) de l'équation (67) on voit que dans l'équation (64) θ satisfait à l'inégalité $-1 < \theta < 0$. Mais cette inégalité entraîne que dans l'équation (67) on a $0 < \theta < 1$. De la même manière on démontre que $-1 < \theta < 0$ dans

les équations (65) et (66), et que $0 < \theta < 1$ dans les équations (68), (69) et (70). Par conséquent, *le reste est plus petit que le premier des termes qu'on a supprimés* et il admet le même signe que ce terme. De plus le reste et le dernier terme calculé sont de signes contraires. Mais avec les hypothèses que nous venons de faire on peut trouver une expression beaucoup plus précise du terme complémentaire. En effet, si $n = 2m$, la dérivée $\varphi^{(2m)}(x)$ est positive et décroissante, et l'intégrale

$$\int_x^\infty \varphi^{(2m)}(z) dz$$

converge. Mais il en résulte (cf. paragraphe 7) que la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + s\omega)$$

converge absolument et uniformément. Reprenons l'équation (58) que nous écrivons de la manière suivante

$$R_{2m} = \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2m}(z) - B_{2m}) P(z) dz, \quad (71)$$

où

$$P(z) = \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) + \varphi^{(2m)}(x - \omega z + \omega + \omega s)].$$

Je dis que la fonction $P(z)$ est positive et décroissante dans l'intervalle $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$. Pour le voir, dérivons par rapport à z , on aura

$$P'(z) = \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m+1)}(x + \omega z + \omega s) - \varphi^{(2m+1)}(x - \omega z + \omega + \omega(s+1))]. \quad (72)$$

En effet, la dernière série converge uniformément par rapport à z , car en faisant $z = 0$, on obtiendra

$$\begin{aligned} P'(0) &= \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi^{(2m+1)}(x + \omega s) - \varphi^{(2m+1)}(x + \omega(s+1))] \\ &= \omega \varphi^{(2m+1)}(x) - \omega \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^{(2m+1)}(x + \omega s) = \omega \varphi^{(2m+1)}(x). \end{aligned}$$

La série (72) converge donc absolument pour $z = 0$ et les valeurs absolues des termes décroissent quand z augmente de 0 à $\frac{1}{2}$. L'équation (72) est ainsi établie, et de cette équation on conclut que $P'(z)$ est négative dans l'intervalle $0 \leq z < \frac{1}{2}$, car tous les termes de la série sont négatifs. Par conséquent la fonction $P(z)$ est positive et décroissante dans cet intervalle. Cela posé, rappelons un lemme dû à TCHEBYCHEF et dont SONIN s'est servi dans le mémoire que nous avons cité dans le paragraphe 6. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions dont l'une est croissante avec la variable et l'autre décroissante dans l'intervalle $a < x < b$. On aura¹ l'inégalité suivante

$$(b-a) \int_a^b \varphi(z) \psi(z) dz < \int_a^b \varphi(z) dz \int_a^b \psi(z) dz.$$

La fonction

$$(-1)^m (B_{2m}(z) - B_{2m})$$

est positive et croissante dans l'intervalle $0 < z < \frac{1}{2}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Tchebychef à l'intégrale (71) et l'on trouvera

$$(-1)^m R_{2m} < (-1)^m \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P(z) dz \int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2m}(z) - B_{2m}) dz.$$

Mais on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2m}(z) dz = 0,$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} P(z) dz = \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) dz = \frac{1}{\omega} \int_x^{\infty} \varphi^{(2m)}(z) dz.$$

Par conséquent

$$(-1)^m R_{2m} < (-1)^m \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x). \quad (73)$$

¹ On trouve une démonstration de ce lemme, due à M. PICARD, dans le Cours autographié d'Hermite (2^e éd. 1881-2). Une autre démonstration a été donnée par M. FRANKLIN (Amer. J. math. 7 (1885), p. 377-9).

C'est la même inégalité que nous avons trouvée plus haut par une autre voie. Mais de l'équation (71) on peut encore tirer une autre inégalité. Puisque $P(x)$ est décroissante dans l'intervalle d'intégration on aura

$$\begin{aligned} (-1)^m R_{2m} &> \frac{\omega^{2m+1}}{(2m)!} P\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^m (B_{2m}(z) - B_{2m}) dz \\ &= (-1)^{m+1} \frac{\omega^{2m+1} B_{2m}}{(2m)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right). \end{aligned}$$

Mais, comme $\varphi^{(2m)}(x)$ est positive et décroissante, on trouvera

$$\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right) > \int_{x+\frac{\omega}{2}}^{\infty} \varphi^{(2m)}(z) dz = -\varphi^{(2m-1)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

Par conséquent

$$(-1)^m R_{2m} > (-1)^m \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (73) on voit qu'on a

$$R_{2m} = \frac{\omega^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x + \theta\omega), \quad \text{où } 0 < \theta < \frac{1}{2}. \quad (74)$$

On démontre de même que

$$\overline{R}_{2m} = \frac{\omega^{2m} D_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m-1)}(x + \theta\omega), \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}. \quad (75)$$

Soit maintenant $n = 2m + 1$ et envisageons l'équation (63) qui peut s'écrire comme il suit

$$\overline{\mathfrak{R}}_{2m} = -\frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1}\left(z + \frac{1}{2}\right) P(z) dz,$$

où

$$P(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi^{(2m)}(x + \omega z + \omega s) + \varphi^{(2m)}(x + \omega - \omega z + \omega s)]. \quad (76)$$

Le polynome d'Euler ne change pas de signe dans l'intervalle d'intégration. En appliquant le théorème de la moyenne on trouvera donc

$$\bar{\mathfrak{R}}_{2m} = -\frac{\omega^{2m}}{(2m-1)!} P(\theta) \int_0^{\frac{1}{2}} E_{2m-1} \left(z + \frac{1}{2} \right) dz = \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m} (2m)!} P(\theta),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. En dérivant la série (76) par rapport à x et en raisonnant comme plus haut, on démontre que la fonction $P(z)$ est négative et croissante dans l'intervalle $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$. Mais on a d'une part

$$P(0) = \varphi^{(2m)}(x)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right) \\ &= \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right) + \omega \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \Delta_{\omega} \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2} + s\omega\right). \end{aligned}$$

La somme de la dernière série est évidemment un nombre négatif. Par conséquent

$$P\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

On aura donc

$$\varphi^{(2m)}(x) < P(\theta) < \varphi^{(2m)}\left(x + \frac{\omega}{2}\right).$$

Mais il en résulte que le reste est de la forme

$$\bar{\mathfrak{R}}_{2m} = \frac{\omega^{2m} E_{2m}}{2^{2m} (2m)!} \varphi^{(2m)}(x + \theta\omega). \quad (77)$$

En supposant $n = 2m$ on démontre enfin que

$$\mathfrak{R}_{2m-1} = \frac{\omega^{2m-1} C_{2m-1}}{2^{2m-1} (2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(x + \theta\omega), \quad (78)$$

θ étant, dans les deux cas, compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Séries trigonométriques.

20. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admette, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'intégrale

$$\int_b^{\infty} |\varphi^{(m)}(x)| dx$$

ait un sens. La solution $F(x|\omega)$ peut se développer en une série de Fourier dont les coefficients s'expriment d'une manière très simple à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. En effet, soit x_0 un nombre quelconque $\geq b$, et considérons l'intégrale suivante

$$\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} F(x|\omega) dx,$$

n étant un entier positif. Puisque F_η tend uniformément vers F cette intégrale est égale à

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} F_\eta(x|\omega) dx.$$

Mais en intégrant terme par terme, on trouve, pour toute valeur positive de η

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} F_\eta(x|\omega) dx &= - \int_{x_0}^{x_0+\omega} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} dx \\ &= - \sum_{s=0}^{\infty} \int_{x_0+s\omega}^{x_0+(s+1)\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} \varphi(x) e^{-\eta x} dx \\ &= - \int_{x_0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} \varphi(x) e^{-\eta x} dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} F(x|\omega) dx = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\omega} x} \varphi(x) e^{-\eta x} dx.$$

Notre hypothèse relativement à la fonction $\varphi(x)$ entraîne donc l'existence de la limite au second membre. Cela posé rappelons que nous avons démontré que la

fonction $F(x)$ admet une dérivée continue. Cette fonction se représente donc, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \omega$, par la série de Fourier

$$F(x|\omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \right) \quad (1)$$

dont les coefficients a_n et b_n se déterminent par les expressions suivantes

$$a_0 = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x|\omega) dx = \int_a^{x_0} \varphi(x) dx,$$

$$a_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx, \quad (2)$$

$$b_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx. \quad (2')$$

Soit en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 1$. Les coefficients a_n et b_n s'expriment par le sinus-intégral

$$\text{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

et le cosinus-intégral

$$\text{ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

On a en effet

$$a_n = - \int_{x_0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{x} dx,$$

$$b_n = - \int_{x_0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{x} dx,$$

parce que ces intégrales convergent. Si x_0 est positif la fonction $\Psi(x)$ se représente donc, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + 1$, par la série

$$F(x) = \log x_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\text{ci}(2\pi n x_0) \cos(2\pi n x) + \text{si}(2\pi n x_0) \sin(2\pi n x)]. \quad (3)$$

La fonction $G(x|\omega)$ peut aussi, dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \omega$, se représenter par une série trigonométrique. De la série (1) on déduit en effet, en tenant compte de l'équation

$$G(x|\omega) = \Delta_{\omega} F(x|2\omega),$$

cette autre série

$$G(x|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{\omega} + \beta_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\omega} \right), \quad x_0 < x < x_0 + \omega, \quad (4)$$

où les coefficients α_n et β_n sont égaux à

$$\alpha_n = \frac{4}{\omega} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx, \quad (5)$$

$$\beta_n = \frac{4}{\omega} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx. \quad (5')$$

Il convient de remarquer que cette série représente la fonction $G(x|\omega)$ seulement dans la moitié de l'intervalle de périodicité. Dans l'intervalle $x_0 - \omega < x < x_0$ elle représente la fonction $-G(x+\omega|\omega)$. Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ on voit que la fonction $g(x)$, dont il a été question plus haut, se développe de la manière suivante

$$g(x) = -4 \sum_{n=0}^{\infty} [\text{ci}(2n+1)\pi x_0 \cdot \cos(2n+1)\pi x + \text{si}(2n+1)\pi x_0 \cdot \sin(2n+1)\pi x], \quad (6)$$

où l'on suppose que $0 < x_0 < x < x_0 + 1$.

21. En général les intégrales (2) et (5) ne sont pas convergentes pour $\eta = 0$, mais on peut en déduire d'autres qui convergent et représentent les coefficients a_n, b_n etc. En effet, considérons l'intégrale suivante

$$\psi_1(x) = - \int_x^{\infty} \cos \frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt.$$

Elle convergera, si $\eta > 0$, et l'on a évidemment

$$\psi_1(x) = - \sum_{s=0}^{\infty} \int_{x + \frac{s\omega}{n}}^{x + \frac{(s+1)\omega}{n}} \cos \frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt = - \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\eta s\omega}{n}} \int_x^{x + \frac{\omega}{n}} \cos \frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt,$$

donc

$$\psi_1(x) = \frac{e^{-\eta x}}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x+t) e^{-\eta t} dt.$$

La fonction $\psi_1(x)$ satisfait par conséquent à la relation

$$\psi_1\left(x + \frac{\omega}{n}\right) = e^{-\frac{\eta\omega}{n}} \psi_1(x).$$

Posons ensuite

$$\psi_2(x) = - \int_x^{\infty} \psi_1(t) dt.$$

Cette intégrale convergera si $\eta > 0$, et l'on trouve

$$\psi_2(x) = - \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\eta s\omega}{n}} \int_x^{x + \frac{\omega}{n}} \psi_1(t) dt = \frac{1}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_x^{x + \frac{\omega}{n}} \psi_1(x+t) dt.$$

Par conséquent

$$\psi_2(x) = \frac{e^{-\eta x}}{\left(e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1\right)^2} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_2} dt_2 \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_1} \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x+t_1+t_2) dt_1.$$

Posons en général

$$\psi_\nu(x) = - \int_x^{\infty} \psi_{\nu-1}(t) dt.$$

On voit aisément que

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{e^{-\frac{\eta\omega}{n}} - 1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \psi_{\nu-1}(x+t) dt.$$

Par conséquent

$$\psi_v(x) = \frac{e^{-\eta x}}{\left(e^{-\frac{\eta \omega}{n}} - 1\right)^v} \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_v} dt_v \cdots \int_0^{\frac{\omega}{n}} e^{-\eta t_1} \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x + t_1 + t_2 \cdots + t_v) dt_1.$$

On peut écrire la dernière équation comme il suit

$$\psi_v(x) = e^{-\eta x} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \frac{1 - e^{-\eta t_v}}{1 - e^{-\frac{\eta \omega}{n}}} dt_v \cdots \int_0^{\frac{\omega}{n}} \frac{1 - e^{-\eta t_1}}{1 - e^{-\frac{\eta \omega}{n}}} \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x + t_1 + t_2 \cdots + t_v) dt_1. \quad (7)$$

La fonction $\frac{1 - e^{-\eta t}}{1 - e^{-\frac{\eta \omega}{n}}}$ est positive et croissante dans l'intervalle d'intégration. Du second théorème de la moyenne on conclut donc que

$$\psi_v(x) = e^{-\eta x} \int_{\theta_v}^{\frac{\omega}{n}} dt_v \cdots \int_{\theta_1}^{\frac{\omega}{n}} \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x + t_1 + t_2 \cdots + t_v) dt_1,$$

les θ_v étant des nombres positifs et plus petits que $\frac{\omega}{n}$. On sait donc trouver un nombre positif C tel que

$$|\psi_v(x)| < C e^{-\eta x} \quad (8)$$

pour toute valeur positive de η . Faisons maintenant tendre η vers zéro dans l'équation (7), il vient

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_v(x) = \left(\frac{n}{\omega}\right)^v \int_0^{\frac{\omega}{n}} t_v dt_v \cdots \int_0^{\frac{\omega}{n}} t_1 \cos \frac{2\pi n}{\omega} (x + t_1 + t_2 \cdots + t_v) dt_1,$$

Par un calcul facile on en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_{2v}(x) &= (-1)^v \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2v} \cos \frac{2\pi n x}{\omega}, \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_{2v+1}(x) &= (-1)^v \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^{2v+1} \sin \frac{2\pi n x}{\omega}. \end{aligned}$$

En posant

$$\chi_1(x) = - \int_x^\infty \sin \frac{2\pi n t}{\omega} e^{-\eta t} dt$$

$$\chi_\nu(x) = - \int_x^\infty \chi_{\nu-1}(t) dt$$

on démontre de même que $\chi_\nu(x)$ satisfait à une inégalité de la forme (8) et qu'on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \chi_{2\nu}(x) = (-1)^\nu \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^{2\nu} \sin \frac{2\pi n x}{\omega},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \chi_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^{2\nu+1} \cos \frac{2\pi n x}{\omega}.$$

Cela posé, considérons les intégrales aux seconds membres des équations (2). En intégrant m fois par partie on trouve, en tenant compte de l'inégalité (8),

$$- \int_{x_0}^\infty \cos \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x_0) \psi_{\nu+1}(x_0) + (-1)^{m+1} \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x) \psi_m(x) dx,$$

$$- \int_{x_0}^\infty \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x} dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x_0) \chi_{\nu+1}(x_0) + (-1)^{m+1} \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x) \chi_m(x) dx.$$

En faisant tendre η vers zéro on trouve, si m est pair,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{2\pi n} \varphi(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} + \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^2 \varphi^{(1)}(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} \\ &\quad - \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^3 \varphi^{(2)}(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} - \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^4 \varphi^{(3)}(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} + \dots \\ &\quad - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^m \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x) \cos \frac{2\pi n x}{\omega} dx, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= - \frac{\omega}{2\pi n} \varphi(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} + \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^2 \varphi^{(1)}(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} \\ &\quad + \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^3 \varphi^{(2)}(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} - \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^4 \varphi^{(3)}(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} - \dots \\ &\quad - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} - (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n} \right)^m \int_{x_0}^\infty \varphi^{(m)}(x) \sin \frac{2\pi n x}{\omega} dx. \quad (10) \end{aligned}$$

Mais si m est impair les deux derniers termes dans l'expression de a_n sont

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0) \sin \frac{2\pi n x_0}{\omega} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \int_{x_0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x) \sin \frac{2\pi n x}{\omega} dx,$$

et les deux derniers termes dans l'expression de b_n sont

$$+ (-1)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \varphi^{(m-1)}(x_0) \cos \frac{2\pi n x_0}{\omega} + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi n}\right)^m \int_{x_0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x) \cos \frac{2\pi n x}{\omega} dx.$$

Il suffit de remplacer ω par 2ω dans ces expressions pour trouver les valeurs des coefficients a_n et β_n de la série (4).

Ces développements mettent en évidence comment les a_n , b_n etc. se comportent pour les valeurs très grandes de n . Le premier terme est du même ordre de grandeur que $\frac{1}{n}$. La convergence des séries (1) et (4) est donc en général due aux variations de signe que présentent leurs termes. Pour que ces séries convergent absolument il faut et il suffit que $\varphi(x_0) = 0$.

22. Appliquons ces formules à la fonction $\log \Gamma(x)$ et posons $\varphi(x) = \log x$ et $\omega = 1$. Soit x_0 un nombre positif quelconque, on trouve, en prenant $m = 1$

$$a_n = \log x_0 \frac{\sin 2\pi n x_0}{2\pi n} - \frac{\text{si}(2\pi n x_0)}{2\pi n}, \tag{11}$$

$$b_n = -\log x_0 \frac{\cos 2\pi n x_0}{2\pi n} + \frac{\text{ci}(2\pi n x_0)}{2\pi n}. \tag{11'}$$

On a en outre

$$a_0 = \int_0^{x_0} \varphi(x) dx = x_0 \log x_0 - x_0.$$

En se rappelant que

$$\log \Gamma(x) = \log \sqrt{2\pi} + \int_0^x \log x \Delta x,$$

on trouvera, après une réduction facile

$$\log \Gamma(x) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x_0 - x_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{si}(2\pi n x_0) \cos(2\pi n x) - \text{ci}(2\pi n x_0) \sin(2\pi n x)}{n n}. \tag{12}$$

Cette série converge absolument, si x_0 est positif, et l'équation est vraie dans l'intervalle $0 < x_0 \leq x \leq x_0 + 1$. Elle a été trouvée par M. NIELSEN¹ dans le cas particulier $x_0 = 1$ et par KUMMER² dans le cas $x_0 = 0$. Pour voir que notre série s'accorde avec celle de Kummer remarquons qu'on a

$$\text{si } (x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)(2s+1)!}, \quad (13)$$

$$\text{ci } (x) = C + \log x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2s(2s)!}. \quad (14)$$

Nous avons établi les équations (11) en supposant x_0 positif. En faisant tendre x_0 vers zéro on trouve

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \cos 2\pi n x dx = a_n = \frac{1}{4n},$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2\pi n x dx = b_n = \frac{C + \log 2\pi n}{2\pi n},$$

C étant la constante d'Euler. La fonction $\log \Gamma(x)$ satisfait dans l'intervalle $0 < x < 1$ aux conditions de Dirichlet. On a donc à l'intérieur de cet intervalle

$$\log \Gamma(x) = \log \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos 2\pi n x}{2n} + (C + \log 2\pi n) \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} \right]. \quad (15)$$

En réduisant le second membre à l'aide des équations (17') et (20) du paragraphe suivant on trouve

$$\log \Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) (C + \log 2) + (1-x) \log \pi - \frac{1}{2} \log \sin \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\pi n} \sin 2\pi n x. \quad (16)$$

C'est la série de Kummer.

Mentionnons deux cas particuliers de l'équation (12). En faisant x égal à un entier positif, et en remplaçant x_0 par z , on voit qu'on a, pour toute valeur positive de z ,

¹ Theorie des Integrallogarithmus. Leipzig 1906, p. 79.

² J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 1-4.

$$\left([z] + \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} - \log [z]! = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{si}(2\pi n z)}{\pi n},$$

où $[z]$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z . En posant $x = p + \frac{1}{2}$, p étant un entier non négatif on trouve

$$p \log z + \frac{\log 2 - z}{2} - \log 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{si}(\pi n z)}{\pi n}$$

et cette équation est vraie dans l'intervalle $2p-1 \leq z \leq 2p+1$. En particulier la série converge dans l'intervalle $-1 \leq z \leq 1$, et sa somme est égale à

$$\frac{\log 2 - z}{2}.$$

En posant $x = p+1$ dans l'équation (3) on trouve de même

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{p} - C - \log z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{ci}(2\pi n z), \quad p < z < p+1.$$

Mais si z est égal à l'entier positif p , on trouve

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p} - C - \log p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{ci}(2\pi n p),$$

et en particulier

$$C = \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{ci}(2\pi n).$$

En posant $x = p + \frac{1}{2}$, on trouvera

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{C}{2} - \log z - \frac{1}{2} \log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ci}(2\pi n z),$$

pourvu que z soit situé dans l'intervalle $0 < p - \frac{1}{2} < z < p + \frac{1}{2}$. De l'équation (6) on déduit de même les valeurs des séries suivantes:

$$\log 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^p}{p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \text{ci}(2n+1)\pi z, \quad p < z < p+1,$$

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdots + \frac{(-1)^p}{2p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{si}(2n+1)\pi z, \quad p - \frac{1}{2} < z < p + \frac{1}{2},$$

et en particulier

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{si}(2n+1)\pi z, \quad 0 < z < \frac{1}{2}.$$

23. Il ne sera pas inutile de vérifier les équations (9) et (10) en les appliquant aux polynomes de Bernoulli et d'Euler. Nous avons démontré qu'on a

$$\int_0^x x^\nu \Delta x = \frac{B_{\nu+1}(x)}{\nu+1} \quad \text{et} \quad \int_0^x x^\nu \nabla x = E_\nu(x).$$

En prenant $x_0 = 0$ et $m = \nu + 1$ tous les termes dans les seconds membres des équations (9) et (10) s'annulent sauf un seul au plus. On trouvera ainsi les séries bien connues:

$$B_{2\nu}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\nu}}, \quad (17)$$

$$B_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{2(2\nu+1)!}{(2\pi)^{2\nu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{2\nu+1}}, \quad (17')$$

$$E_{2\nu}(x) = (-1)^\nu \frac{4(2\nu)!}{\pi^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}}, \quad (18)$$

$$(E_{2\nu-1}x) = (-1)^\nu \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \quad (18')$$

Si $\nu > 0$, ces séries convergent absolument et uniformément, et elles représentent, dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, la fonction au premier membre. Les séries représentent donc, pour toutes les valeurs réelles de x , les fonctions que nous avons désignées plus haut par $B(x)$ et $E(x)$. Si $\nu = 0$, la deuxième et la troisième équation sont encore vraies, pourvu que $0 < x < 1$, mais la convergence des séries est non uniforme au voisinage des points $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que les dernières séries se déduisent presque sans aucun calcul des formules sommatoires d'Euler et de Boole. En effet, reprenons la série (6) du paragraphe 6 avec son terme complémentaire:

$$\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} = \sum_{s=0}^{\nu} (-1)^s \frac{\omega^{2s}}{(2s)!} B_{2s} + R_{\nu}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\sin \frac{\omega}{2}$ et en posant ensuite $\omega = 2\pi n$, on trouve

$$\int_0^1 B_{2\nu}(z) \cos 2\pi n z dz = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu)!}{(2\pi n)^{2\nu}}, \quad \nu > 0,$$

$$\int_0^1 B_{2\nu+1}(z) \sin 2\pi n z dz = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu+1)!}{(2\pi n)^{2\nu+1}}.$$

Mais puisque $B_{\nu}(1-x) = (-1)^{\nu} B_{\nu}(x)$, on aura les développements (17). De la même manière on déduira les développements (18) de la série (7) paragraphe 3. Voici encore deux autres séries remarquables les valeurs desquelles on peut aisément tirer des équations (17):

$$\int_0^1 (B_{2\nu}(z) - B_{2\nu}(x)) \cot \pi(z-x) dz = (-1)^{\nu} \frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{2\nu}}, \quad (19)$$

$$\int_0^1 (B_{2\nu+1}(z) - B_{2\nu+1}(x)) \cot \pi(z-x) dz = (-1)^{\nu+1} \frac{2(2\nu+1)!}{(2\pi)^{2\nu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\nu+1}}. \quad (19')$$

En effet, supposons $\nu > 0$ et $0 \leq x \leq 1$; substituons les séries (17) dans les intégrales au premier membre et intégrons terme par terme ce qui est permis, parce que ces séries convergent uniformément. En remarquant qu'on a, n étant un entier positif

$$\int_0^1 (\cos 2\pi n z - \cos 2\pi n x) \cot \pi(z-x) dz = -\sin 2\pi n x,$$

$$\int_0^1 (\sin 2\pi n z - \sin 2\pi n x) \cot \pi(z-x) dz = \cos 2\pi n x,$$

on trouvera les équations (19). Ces deux équations sont donc vraies dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Si $\nu = 0$ on voit aisément que la seconde équation est encore vraie à l'intérieur de cet intervalle. Elle peut s'écrire comme il suit

$$-\log(2 \sin \pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n}, \quad 0 < x < 1. \quad (20)$$

Remarquons enfin qu'en intégrant par partie au premier membre des équations (19) on trouvera

$$\int_0^1 B_{2\nu-1}(z) \log \sin \pi |z-x| dz = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{2\nu}}, \quad (21)$$

$$\int_0^1 B_{2\nu}(z) \log \sin \pi |z-x| dz = (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\nu+1}}. \quad (21')$$

Des relations (18) on déduit de même ces deux autres relations

$$\int_0^1 (E_{2\nu}(z) - E_{2\nu}(x) \cos \pi(z-x)) \frac{dz}{\sin \pi(z-x)} = (-1)^{\nu} \frac{4(2\nu)!}{\pi^{2\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (E_{2\nu-1}(z) - E_{2\nu-1}(x) \cos \pi(z-x)) \frac{dz}{\sin \pi(z-x)} \\ = (-1)^{\nu+1} \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \end{aligned} \quad (22')$$

Si $\nu > 0$, ces relations sont vraies dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. En effet, substituons dans les deux intégrales au premier membre les séries (18). Ces séries étant uniformément convergentes on peut intégrer terme par terme et on trouve le résultat indiqué.

Si $\nu = 0$ la série (22) converge encore à l'intérieur de l'intervalle et l'on trouve

$$\frac{1}{2} \log \cot \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{2n+1} \quad 0 < x < 1 \quad (23)$$

En intégrant par partie au premier membre des équations (22) on aura, pourvu que $\nu > 0$,

$$\int_0^1 E_{2\nu-1}(z) \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} |z-x| dz = (-1)^{\nu-1} \frac{4(2\nu-1)!}{\pi^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu+1}} \quad (24)$$

$$\int_0^1 E_{2\nu-2}(z) \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} |z-x| dz = (-1)^\nu \frac{4(2\nu-2)!}{\pi^{2\nu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2\nu}}. \quad (24')$$

24. On sait exprimer les sommes des puissances négatives de nombres entiers par les nombres et les polynomes de Bernoulli. En effet, en posant $x=0$ dans les équations (17), (19') et (21'), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!} B_{2\nu}, \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!} \int_0^1 B_{2\nu+1}(z) \cot \pi z dz,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu+1}} = (-1)^\nu \frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_0^1 B_{2\nu}(z) \log \sin \pi z dz.$$

En posant $x = \frac{1}{2}$ dans les mêmes équations il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\nu}} = (-1)^{\nu+1} \frac{\pi^{2\nu}}{2(2\nu)!} D_{2\nu}, \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\nu+1}} = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!} \int_0^1 B_{2\nu+1}(z) \operatorname{tg} \pi z dz,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\nu+1}} = (-1)^\nu \frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_0^1 B_{2\nu}(z) \log |\cos \pi z| dz.$$

En faisant $x=0$ dans les équations (18'), (22) et (24) on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2\nu}} = (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu}}{(2\nu-1)!} \frac{C_{2\nu-1}}{2^{2\nu+1}}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2\nu+1}} &= (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu+1}}{4(2\nu)!} \int_0^1 E_{2\nu}(z) \frac{dz}{\sin \pi z} \\ &= (-1)^{\nu-1} \frac{\pi^{2\nu}}{4(2\nu-1)!} \int_0^1 E_{2\nu-1}(z) \log \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} dz. \end{aligned}$$

Enfin en posant $x = \frac{1}{2}$ dans les équations (18) et (22'), on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu+1}} = (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu+1} E_{2\nu}}{(2\nu)! 2^{2\nu+2}}, \quad (28)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu}} = (-1)^\nu \frac{\pi^{2\nu}}{4(2\nu-1)!} \int_0^1 E_{2\nu-1}(z) \frac{dz}{\cos \pi z}.$$

25. De la série de Fourier (1) on peut déduire un autre développement remarquable de la fonction $F(x|\omega)$. En substituant dans cette série les expressions (2) et (2') des coefficients on trouve

$$F(x|\omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z) dz - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos \left[\frac{2n\pi}{\omega} (z-x) \right] \varphi(z) e^{-\eta z} dz.$$

De même, en substituant les expressions (5) et (5') des α_n et β_n dans l'équation (4) on trouve

$$G(x|\omega) = \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi}{\omega} (z-x) \right] \varphi(z) e^{-\eta z} dz.$$

Dans ces équations on suppose que $x_0 < x < x_0 + \omega$. Posons en particulier $x = x_0 + \frac{\omega}{2}$ et remplaçons ensuite x_0 par x , il vient

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \int_a^x \varphi(z) dz - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{2n\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz, \quad (29)$$

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz. \quad (30)$$

Mais en posant $x = x_0$ on trouve

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{2n\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz, \quad (31)$$

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{\omega} \varphi(x+z) e^{-\eta z} dz. \quad (32)$$

Ces quatre équations sont donc vraies pour toute valeur de x qui est plus grande que b .

Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ces relations se réduisent aux suivantes

$$\Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \cos 2\pi n z \frac{dz}{x+z},$$

$$g\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \sin [(2n+1)\pi z] \frac{dz}{x+z},$$

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos 2\pi n z \frac{dz}{x+z},$$

$$g(x) = \frac{1}{x} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos [(2n+1)\pi z] \frac{dz}{x+z}.$$

En introduisant le cosinus-intégral et le sinus-intégral on peut encore écrire, par exemple les deux dernières équations, comme il suit

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\text{ci}(2\pi n x) \cos(2\pi n x) + \text{si}(2\pi n x) \sin(2\pi n x)], \quad (33)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} [\text{ci}(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi x + \text{si}(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi x]. \quad (34)$$

On déduit de même de l'équation (12), ou bien des équations (29) et (31) en posant $\varphi(x) = \log x$:

$$\begin{aligned} \log \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \log V_{2\pi} + x \log x - x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{ci}(2\pi n x) \sin(2\pi n x) - \text{si}(2\pi n x) \cos(2\pi n x)}{\pi n}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x) &= \log V_{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ci}(2\pi n x) \sin(2\pi n x) - \text{si}(2\pi n x) \cos(2\pi n x)}{\pi n}. \end{aligned} \quad (36)$$

On a ici $b = 0$. Ces huit équations sont donc établies pour toute valeur positive de x . Nous démontrerons plus loin qu'elles subsistent encore pour les valeurs complexes de x dont la partie réelle est positive.

Variables Complexes.

Application de l'intégrale de Cauchy.

26. Jusqu'ici x et ω ont été des nombres réels. Nous voulons maintenant donner à ces variables des valeurs complexes et nous étudierons les prolongements analytiques des fonctions que nous venons de considérer. Soit \mathcal{J} un angle entourant l'axe des nombres positifs et limité par deux rayons vecteurs formant avec l'axe positif des angles plus petits que $\frac{\pi}{2}$; l'ouverture de cet angle peut d'ailleurs être aussi petit que l'on veut. Soit $\varphi(x)$ une fonction analytique, holomorphe dans l'angle \mathcal{J} et admettons qu'on ait uniformément dans cet angle

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m \varphi(x) = 0,$$

si m est suffisamment grand. Dans ces conditions il résulte de l'analyse des paragraphes 5 et 9 que les limites

$$G(x|\omega) = \int_{\omega}^x \varphi(x) \nabla x, \quad (1)$$

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(x) \triangle x \quad (2)$$

existent pour toute valeur de x et de ω à l'intérieur de l'angle \mathcal{J} et qu'elles représentent deux fonctions analytiques, holomorphes dans cet angle. Les expressions analytiques que nous avons déduites des formules sommatoires d'Euler et de Boole restent donc valables pour ces valeurs des variables. Mais il y en a d'autres qui s'appliquent dans des cas plus généraux et que nous allons mettre en évidence.

Supposons d'abord que la fonction analytique $\varphi(x)$ soit holomorphe dans l'angle \mathcal{J} et que l'égalité

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon|x|} = 0 \quad (3)$$

ait lieu uniformément dans cet angle, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En ce cas les séries

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)}, \tag{4}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} \tag{5}$$

convergeront pour toute valeur positive de η , pourvu que x et ω restent dans l'angle \mathcal{D} . A l'aide du calcul des résidus¹ nous allons étudier comment se comportent ces deux séries quand η tend vers zéro. En observant que la fonction $\pi \cot \pi z$ admet tout nombre entier ν comme pôle simple de résidu $1/\nu$, et que le résidu de la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, relatif au pôle $z = \nu$, est égal à $(-1)^\nu$, on trouve les deux équations suivantes

$$\sum_{s=0}^{s=p} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} \pi \cot \pi z dz,$$

$$\sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2i} \int_C \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} \frac{dz}{\sin \pi z},$$

C étant un contour formé de deux demi-cercles entourant respectivement les points 0 et p , réunis par deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs.

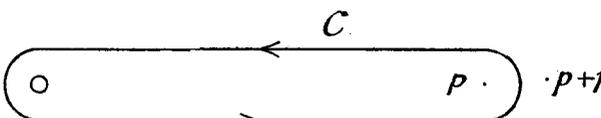


Fig. 1.

Nous supposons que les points x et ω sont à l'intérieur de l'angle \mathcal{D} et qu'on a choisi les rayons des deux cercles assez petits pour que le point $x + \omega z$ reste à l'intérieur de \mathcal{D} quand z parcourt le contour C . Faisons tendre p vers l'infini, le nombre positif η restant fixe. On trouvera

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} \pi \cot \pi z dz, \tag{6}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \frac{1}{2i} \int_{C_1} \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{7}$$

¹ Voir sur ce sujet un excellent petit livre de M. E. LINDELÖF: Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905. L'analyse de ce paragraphe est voisine de celui de M. LINDELÖF mais le problème que nous nous sommes posé est bien différent de celui que M. LINDELÖF a traité (l. c. p. 52-86).

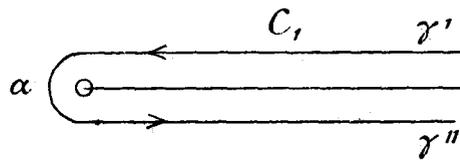


Fig. 2.

C_1 étant un lacet formé d'un petit demi-cercle entourant le point $z = 0$ et de deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs. Considérons d'abord l'intégrale (7).

La ligne d'intégration coupe l'axe

réel dans un point α situé entre 0 et -1 . Déformons le contour C_1 en un autre contour C_2 qui sera formé de deux droites issues du point α et situées l'une au-dessus l'autre au-dessous de l'axe réel. Nous choisissons les angles que ces deux

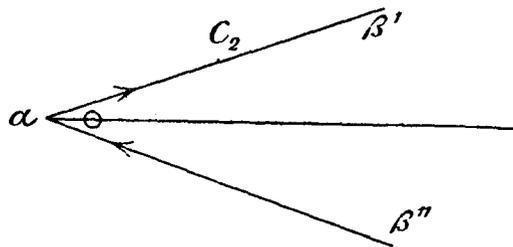


Fig. 3.

droites forment avec l'axe des nombres positifs assez petits pour que le point $x + \omega z$ reste à l'intérieur de \mathcal{D} quand z parcourt le contour C_2 . Faisons ensuite tendre η vers zéro. L'intégrale au second membre tendra uniformément vers une limite parce qu'on sait trouver un constante K telle que

$$\left| \frac{\varphi(x + \omega z)}{\sin \pi z} \right| < \frac{K}{|z|^2}$$

sur le contour C_2 . On arrive ainsi à l'équation suivante

$$\oint_{C_2} \varphi(x) \nabla_{\omega} x = i \int_{C_2} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{8}$$

Considérons maintenant l'intégrale (6) et remarquons qu'on a

$$\frac{1}{2i} \cot \pi z = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{-2\pi iz} - 1},$$

$$\frac{1}{2i} \cot \pi z = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1}.$$

Je remplace $\cot \pi z$ par la première de ces expressions sur la partie supérieure du contour C_1 , formé de l'arc $\alpha \gamma' \infty$. Je remplace $\cot \pi z$ par la seconde expression sur l'arc $\alpha \gamma'' \infty$. On aura donc

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)} = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz$$

$$+ \int_{\alpha \gamma' \infty} \frac{\varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{-2\pi iz} - 1} dz + \int_{\alpha \gamma'' \infty} \frac{\varphi(x + \omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{2\pi iz} - 1} dz.$$

La première intégrale est étendue le long de l'axe réel. Dans les deux autres intégrales je déforme comme plus haut la ligne d'intégration en remplaçant l'arc $\alpha\gamma'\infty$ par la droite $\alpha\beta'\infty$ et l'arc $\alpha\gamma''\infty$ par la droite $\alpha\beta''\infty$. Je fais ensuite tendre η vers zéro. On a évidemment

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \alpha\beta'\infty}} \int \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)}}{e^{-2\pi iz} - 1} dz = \int_{\alpha\beta'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{e^{-2\pi iz} - 1}$$

parce que l'intégrale au second membre converge. En remarquant que

$$\int_a^\infty \varphi(x+\omega z) e^{-\eta(x+\omega z)} dz = \frac{1}{\omega} \int_{x+a\omega}^\infty \varphi(z) e^{-\eta z} dz$$

on arrive à l'équation suivante

$$\sum_a^x \varphi(z) \Delta_\omega z = \int_a^{x+a\omega} \varphi(z) dz + \omega \int_{\alpha\beta'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1 - e^{-2\pi iz}} + \omega \int_{\alpha\beta''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1 - e^{2\pi iz}}. \quad (9)$$

Cette relation peut s'écrire sous une forme plus simple. Posons

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z) dz,$$

et intégrons par partie dans les deux derniers termes au second membre. On trouve

$$\omega \int_{\alpha\beta'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1 - e^{-2\pi iz}} = -\frac{f(x+a\omega)}{1 - e^{-2\pi ia}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta'\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz,$$

$$\omega \int_{\alpha\beta''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1 - e^{2\pi iz}} = -\frac{f(x+a\omega)}{1 - e^{2\pi ia}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta''\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz.$$

En substituant ces expressions dans l'équation (9) on trouvera

$$\sum_a^x \varphi(z) \Delta_\omega z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz. \quad (10)$$

On voit ainsi que les seconds membres des équations (1) et (2) tendent uniformément vers des limites pour toutes les valeurs de x et de ω qui sont à l'intérieur de l'angle \mathcal{D} et qu'elles représentent deux fonctions analytiques de x et de ω ,

holomorphes dans l'angle \mathcal{D} . On peut dire un peu de plus sur ces fonctions si l'on suppose que $\varphi(x)$ soit holomorphe à l'intérieur d'un angle Θ comprenant l'angle \mathcal{D} et qu'il existe une constante positive k telle qu'on a uniformément

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) e^{-k|x|} = 0$$

dans l'angle Θ . Les équations (8) et (10) subsistent pour toute valeur de x à l'intérieur de Θ . Faisons varier ω . Quand ω sort de l'angle \mathcal{D} on voit que les intégrales (8) et (10) restent convergentes tant que ω reste à l'intérieur de l'angle Θ pourvu que le module de ω soit suffisamment petit. Les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ admettent en général des points singuliers pour des valeurs de ω situées à l'intérieur de Θ . Mais quand x reste dans Θ elles sont holomorphes dans un certain voisinage de $\omega = 0$, situé tout entier à l'intérieur de Θ .

27. Étudions un autre cas. Admettons que:

- 1° la fonction $\varphi(x)$ soit holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) \geq b$ et qu'on sache trouver deux nombres positifs C et k tels que, pour toute valeur de x dans le demi-plan, on ait

$$|\varphi(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|}, \quad (11)$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε ;

- 2° dans une bande quelconque, située dans le demi-plan et limitée par deux droites parallèles à l'axe des nombres positifs on ait

$$|\varphi(x)| < C e^{\varepsilon|x|}.$$

Soit ω un nombre positif et x un point à l'intérieur du demi-plan. Les séries (4) et (5) convergent et les équations (6) et (7) sont encore vraies. Posons $z = r e^{i\nu}$. On sait trouver une constante M telle que

$$\left| \frac{\varphi(x + \omega z)}{\sin \pi z} \right| < M e^{(\varepsilon + (k\omega - \pi) \sin |\nu|)r},$$

si $\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}$. Considérons d'abord l'intégrale (7). Si $\omega < \frac{\pi}{k}$ on peut raisonner comme plus haut, déformer le chemin d'intégration et remplacer la ligne C_1 par une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels et coupant celui-ci dans le point a . On trouve ainsi

$$\int_{\omega} \varphi(x) \nabla_{\omega} x = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \quad (12)$$

De l'équation (6) on déduit¹ de même, si $\omega < \frac{2\pi}{k}$

$$\int_a^x \varphi(z) \Delta_{\omega} z = \int_a^{x+\alpha\omega} \varphi(z) dz + \omega \int_a^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1-e^{-2\pi iz}} + \omega \int_a^{\alpha-i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) dz}{1-e^{2\pi iz}}, \quad (13)$$

$$\int_a^x \varphi(z) \Delta_{\omega} z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz. \quad (14)$$

Dans ces trois équations α est un nombre quelconque entre 0 et -1 et l'on suppose que la partie réelle de x est plus grande que $b - \alpha\omega$. Posons en particulier $\alpha = -\frac{1}{2}$ et remplaçons en même temps x par $x + \frac{\omega}{2}$. On trouve

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\cos \pi z} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) + \varphi(x-i\omega t)}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} dt, \quad (12')$$

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \int_a^x \varphi(z) dz + i\omega \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-i\omega t)}{1 + e^{2\pi t}} dt, \quad (13')$$

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 dz = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{f(x+i\omega t) + f(x-i\omega t)}{(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^2} dt. \quad (14')$$

D'autre part en faisant tendre α vers zéro et en ayant soin d'éviter le point $z = 0$ en déformant la ligne d'intégration, au voisinage de ce point, en un petit demi-cercle, dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro, on trouvera

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + 2i \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-i\omega t)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} dt, \quad (12'')$$

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) + i\omega \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega t) - \varphi(x-i\omega t)}{1 - e^{2\pi t}} dt, \quad (13'')$$

$$F(x|\omega) = f(x) - \frac{\omega}{2} f'(x) - 2\pi \int_0^{\infty} \frac{f(x+i\omega t) + f(x-i\omega t) - 2f(x)}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})^2} dt. \quad (14'')$$

¹ Je suppose, pour fixer les idées, que $a > b$.

Les six dernières équations sont valables si la partie réelle de x est plus grande que b , et elles mettent en évidence que $G(x|\omega)$, respectivement $F(x|\omega)$, sont des fonctions analytiques de x , holomorphes pour toutes les valeurs de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$, tant que ω reste à l'intérieur de l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur de l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Mais il n'en est plus ainsi quand ω sort de ces intervalles. En effet, soit par exemple

$$\varphi(x) = e^{ix}.$$

On a ici $k = 1$, et l'on trouve immédiatement pour toute valeur positive de η

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{(i-\eta)(x+s\omega)} = \frac{e^{(i-\eta)x}}{1 + e^{(i-\eta)\omega}},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{(i-\eta)(x+s\omega)} = \frac{e^{(i-\eta)x}}{1 - e^{(i-\eta)\omega}}.$$

En faisant tendre η vers zéro on aura donc

$$\int e^{ix} \nabla_{\omega} x = \frac{2 e^{ix}}{1 + e^{i\omega}},$$

$$\int_0^x e^{ix} \Delta_{\omega} x = i - \frac{\omega e^{ix}}{1 - e^{i\omega}},$$

pourvu que les expressions aux seconds membres aient un sens. En séparant le réel de l'imaginaire on trouve

$$\int \cos x \nabla_{\omega} x = \frac{\cos\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos \frac{\omega}{2}},$$

$$\int \sin x \nabla_{\omega} x = \frac{\sin\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos \frac{\omega}{2}},$$

$$\int_0^x \cos x \Delta_{\omega} x = \frac{\omega}{2} \frac{\sin\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$\sum_0^x \sin x \Delta_{\omega} x = \frac{\omega}{2} \frac{\cos \left(x - \frac{\omega}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

On voit ainsi que $G(x|\omega)$, respectivement $F(x|\omega)$, dans les deux cas sont des fonctions méromorphes de ω admettant pour pôles simples les points $\omega = \pm (2s - 1)\pi$, respectivement les points $\omega = \pm 2s\pi$, s étant un entier positif.

28. Considérons quelques autres cas particuliers. Supposons que $\varphi(x)$ soit une puissance entière et positive de x . Nous avons vu qu'on a

$$\sum x^v \nabla x = E_v(x),$$

$$\sum_0^x \nu x^{\nu-1} \Delta x = B_\nu(x).$$

Remplaçons dans les équations (12) et (13) $\varphi(x)$, respectivement $f(x)$, par x^ν et posons $\omega = \pi$. On trouvera

$$E_\nu(x) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (x+z)^\nu \frac{dz}{\sin \pi z} \tag{15}$$

$$B_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (x+z)^\nu \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz. \tag{16}$$

α est un nombre quelconque entre 0 et $-\pi$ et les équations sont valables pour toutes les valeurs de x . En posant $x=0$ on trouve

$$2^{-\nu} C_\nu = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{z^\nu dz}{\sin \pi z}, \quad -\pi < \alpha < 0, \tag{17}$$

$$B_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^\nu \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz, \quad -\pi < \alpha < 0. \tag{18}$$

En posant $x = \frac{1}{2}$ on aura

$$E_\nu = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{z^\nu dz}{\cos \frac{\pi}{2} z}, \quad -\pi < \alpha < \pi, \tag{19}$$

$$D_\nu = \frac{1}{4\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} z^\nu \left(\frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} z} \right)^2 dz, \quad -1 < \alpha < 1. \quad (20)$$

En faisant tendre α vers zéro dans ces équations, ou bien en se reportant aux relations (12''), (14''), (12') et (14'), on trouve

$$C_{2\nu+1} = (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{x^{2\nu+1} dx}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x},$$

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \pi \int_0^\infty \frac{x^{2\nu} dx}{(\operatorname{sh} \pi x)^2},$$

$$E_{2\nu} = (-1)^\nu \int_0^\infty \frac{x^{2\nu} dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x},$$

$$D_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{x^{2\nu} dx}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \right)^2},$$

$\operatorname{sh} x$ étant le sinus hyperbolique et $\operatorname{ch} x$ étant le cosinus hyperbolique de x .

Soit en second lieu $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Les équations (12'') et (12') se réduisent aux suivantes

$$g(x) = \frac{1}{x} + \int_0^\infty \frac{2}{\operatorname{sh} \pi t} \frac{t dt}{x^2 + t^2},$$

$$g\left(x + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{2}{\operatorname{ch} \pi t} \frac{x dt}{x^2 + t^2}.$$

La dernière de ces formules a été démontrée par LEGENDRE. Des trois équations (14) on déduit de même

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \log(x+z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz,$$

$$\Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{\log(x^2 + t^2)}{(\operatorname{ch} \pi t)^2} dt,$$

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right) \frac{dt}{(\operatorname{sh} \pi t)^2}.$$

En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ dans l'équation (13'') on trouve la relation suivante qui a été établie par POISSON

$$\Psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} + 2 \int_0^{\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \frac{dt}{1 - e^{2\pi t}}.$$

Dans toutes ces relations on suppose que la partie réelle de x soit positive.

Supposons en dernier lieu que $\varphi(x)$ soit une fonction entière telle que

$$|\varphi(x)| < C e^{\varepsilon |x|} \quad (21)$$

pour toute valeur de x , C étant une constante, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En démontrant les équations

$$G(x|\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \quad -1 < a < 0, \quad (22)$$

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \quad -1 < a < 0 \quad (23)$$

nous avons supposé ω positif, pendant que x est un nombre quelconque. Mais les intégrales au second membre conservent un sens pour toutes les valeurs réelles ou complexes de x et de ω . Les deux solutions principales $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ admettent donc un prolongement analytique dans tout le plan des ω et l'on voit à ces intégrales qu'elles sont des fonctions entières des deux variables x et ω . Remplaçons ω par $-\omega$ et en même temps z par $-1-z$; on aura

$$G(x|-\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \quad -1 < a < 0,$$

$$F(x|-\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \quad -1 < a < 0.$$

En comparant ces deux intégrales aux intégrales (22) et (23) on voit que les fonctions G et F satisfont aux équations suivantes

$$G(x-\omega|-\omega) = G(x|\omega), \quad (24)$$

$$F(x-\omega|-\omega) = F(x|\omega). \quad (25)$$

$G(x + \frac{\omega}{2} | \omega)$ et $F(x + \frac{\omega}{2} | \omega)$ sont par conséquent des fonctions paires de ω . Dans le cas des polynomes d'Euler et de Bernoulli ces deux équations prennent la forme suivante

$$E_\nu(1-x) = (-1)^\nu E_\nu(x),$$

$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x).$$

Nous allons vérifier ces résultats en considérant les séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de ω . Dans le cas actuel on peut déduire ces séries de la manière suivante. Développons la fonction f par la formule de Taylor

$$f(x + \omega z) = \int_a^x \varphi(x) dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

Substituons ce développement dans l'équation (23) et intégrons terme par terme. On trouve en tenant compte de l'équation (18)

$$F(x | \omega) = \int_a^x \varphi(x) dx - \frac{\omega}{2} \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x). \quad (26)$$

En remplaçant x par $x + \frac{\omega}{2}$ dans l'équation (23) et en tenant compte de l'équation (20) on obtiendra

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \int_a^x \varphi(x) dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} D_{2\nu}}{2^{2\nu} (2\nu)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x). \quad (26')$$

De l'équation (22) on déduit de même, en tenant compte des formules (17) et (19),

$$G(x | \omega) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu-1} C_{2\nu-1}}{2^{2\nu-1} (2\nu-1)!} \varphi^{(2\nu-1)}(x), \quad (26'')$$

$$G\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} E_{2\nu}}{2^{2\nu} (2\nu)!} \varphi^{(2\nu)}(x). \quad (26''')$$

Est-ce que ces quatre séries convergent? Pour en décider il faut d'abord savoir comment les nombres B_ν, \dots, E_ν se comportent pour les valeurs très grandes de ν . Mais des séries (25), (26), (27) et (28) paragraphe 24 il résulte que ces nombres sont de la forme

$$\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^{\nu+1} \frac{2}{(2\pi)^{2\nu}} (1 + \varepsilon_\nu), \quad (27)$$

$$\frac{D_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^\nu \frac{2}{\pi^{2\nu}} (1 + \varepsilon_\nu), \quad (27')$$

$$\frac{C_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} = (-1)^\nu 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\nu} (1 + \varepsilon_\nu), \quad (27'')$$

$$\frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} = (-1)^\nu 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\nu+1} (1 + \varepsilon_\nu), \quad (27''')$$

ε_ν étant dans les quatre cas une quantité qui tend vers zéro quand ν augmente indéfiniment. D'autre part de l'inégalité (21) il résulte qu'on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\varphi^{(\nu)}(x)|^{\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Les quatre séries (26) convergent donc pour toute valeur finie de ω , quel que soit x , et la convergence est uniforme dans tout domaine fini. Elles représentent par conséquent des fonctions entières et l'on vérifie immédiatement à l'aide de ces séries que les équations (24) et (25) sont satisfaites.

Prolongement analytique des solutions.

29. Les résultats précédents restent vrais pour certaines fonctions qui ne rentrent pas dans les conditions que nous avons imposées à la fonction $\varphi(x)$. Remarquons d'abord qu'on peut, sans inconvénient, remplacer les deux expressions qui déterminent les solutions principales par les expressions suivantes

$$\int_{\omega} \varphi(x) \nabla x = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega) e^{-\eta \lambda(x+s\omega)}, \quad (27)$$

$$\int_a^x \varphi(z) \Delta z = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_a^x \varphi(z) e^{-\eta \lambda(z)} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta \lambda(x+s\omega)} \right], \quad (28)$$

$\lambda(x)$ étant une fonction de la forme

$$\lambda(x) = x^p (\log x)^q, \quad p \geq 1, \quad q > 0.$$

En prenant ces limites pour point de départ il n'y a presque rien à changer dans ce qui précède. Dans les cas que nous venons d'étudier on arrive parfaite-

ment aux mêmes solutions que nous avons trouvées à l'aide de la définition un peu plus simple dont nous avons fait usage jusqu'ici. Mais avec cette définition plus large on peut faire un petit pas en avant.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse à la condition 1° du paragraphe 27 mais supprimons la condition 2°. Il arrive que les séries (4) et (5) n'ont pas de sens pour aucune valeur de ω , mais les séries et l'intégrale qui entrent dans les expressions (27) et (28) convergeront pour toute valeur positive de η , si $p > 1$, ou si $p = 1$ et $q > 0$. Posons $\omega = \rho e^{i\psi}$ et supposons que $\frac{\pi}{2p} > \psi > -\frac{\pi}{2p}$. Considérons l'équation (28). Supposons que la partie réelle de x soit plus grande que b et reprenons le raisonnement du paragraphe 26. On trouve d'abord

$$\int_a^\infty \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz - \omega \sum_{s=0}^\infty \varphi(x+s\omega) e^{-\eta\lambda(x+s\omega)} = \int_a^{x+a\omega} \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz + \omega \int_{a\gamma' \infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}}{1 - e^{-2\pi iz}} dz + \omega \int_{a\gamma'' \infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-\eta\lambda(x+\omega z)}}{1 - e^{2\pi iz}} dz. \quad (29)$$

Déformons comme plus haut le chemin d'intégration et remplaçons les arcs $a\gamma' \infty$ et $a\gamma'' \infty$ par deux droites $\alpha\beta' \infty$ et $\alpha\beta'' \infty$ (fig. 3, pag. 160). Supposons que les angles que ces deux droites forment avec l'axe des nombres positifs soient, en valeur absolue, plus petits que $\frac{\pi}{2p} - |\psi|$. Faisons ensuite tendre η vers zéro.

Le second membre tendra uniformément vers une limite pourvu que ρ est suffisamment petit. Cette limite ne dépend pas de λ . On retrouve ainsi l'équation (10). On peut enfin de nouveau déformer le chemin d'intégration en faisant tourner les deux droites $\alpha\beta' \infty$ et $\alpha\beta'' \infty$ jusqu'à ce qu'elles forment avec l'axe positif les angles $\pm \left(\frac{\pi}{2} - |\psi|\right)$. Notre intégrale restera convergente pourvu que ω satisfasse à la condition

$$\rho < \frac{2\pi}{k} \cos \psi. \quad (30)$$

En appliquant le même raisonnement à l'expression (27) on retrouve l'équation (8) pourvu que ω satisfasse à la condition $\rho < \frac{\pi}{k} \cos \psi$. On peut donc affirmer que les limites (27) et (28) ne dépendent pas de la fonction $\lambda(x)$; seulement il faut avoir soin de choisir p et q suffisamment grands pour assurer l'existence des limites. Si l'on fait $q = 0$, il faut dans le cas actuel prendre $p > 1$. Si l'on fait $p = 1$ il

faut prendre $q > 0$. Il résulte de notre analyse que, dans le dernier cas, la limite (28) existe pour toutes les valeurs de ω qui satisfont à la condition (30). On voit donc que les deux solutions principales $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω , holomorphes tant que x reste à l'intérieur du demi-plan $\Re(x) > b$ et tant que ω satisfasse à l'une ou l'autre des deux conditions que nous venons d'indiquer. Par exemple dans le cas de la fonction $F(x|\omega)$ il faut que ω reste à l'intérieur du cercle ayant

le point $\frac{\pi}{k}$ pour centre et avec le rayon

$\frac{\pi}{k}$, c'est à dire le cercle que je couvre de hachures sur la figure 4. Quand ω sort de ce cercle il arrive que la fonction $F(x|\omega)$ cesse d'exister et il en est de même pour la fonction $G(x|\omega)$.

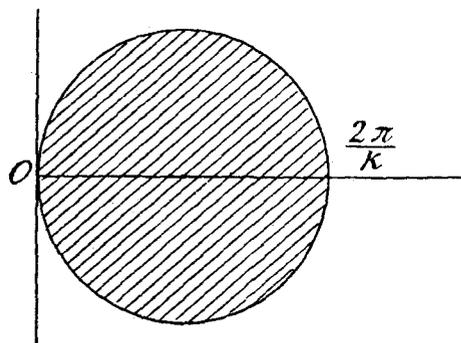


Fig. 4.

En particulier, si ω est positif, on retrouve les équations

$$G(x|\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{31}$$

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \tag{32}$$

pourvu que dans le premier cas $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ et dans le second cas $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$.

De l'équation (31) on peut tirer une inégalité importante. En effet on a par hypothèse

$$|\varphi(x)| < C e^{(k+\epsilon)|x|}, \quad \text{si } \Re(x) > b.$$

Par conséquent

$$|G(x|\omega)| < C e^{(k+\epsilon)|x|} \int e^{(k+\epsilon)\omega|z|} \frac{dz}{|\sin \pi z|}.$$

Puisque ω est positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$, l'intégrale au second membre converge; on peut donc trouver une constante C_1 telle que

$$|G(x|\omega)| < C_1 e^{(k+\epsilon)|x|} \tag{33}$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$. De même on conclut de l'équation (32) qu'on sait trouver une constante C_2 telle que

$$|F(x|\omega)| < C_2 e^{(k+\varepsilon)|x|} \quad (34)$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Les fonctions F et G satisfont donc aux mêmes conditions que nous avons imposées à la fonction $\varphi(x)$ pour démontrer l'existence des limites (27) et (28). Par conséquent, en appliquant à la fonction $\varphi(x)$ nos deux opérations de sommation un nombre quelconque de fois on arrive toujours à des expressions convergentes et à des fonctions qui satisfont à l'inégalité susdite et qui sont holomorphes dans le demi-plan $\Re(x) > b$.

Les inégalités (33) et (34) caractérisent les solutions principales. En effet, une fonction périodique $\pi(x)$ avec la période ω qui est holomorphe dans le demi-plan et par conséquent pour toute valeur de x ne peut pas satisfaire à l'inégalité

$$|\pi(x)| < C_2 e^{(k+\varepsilon)|x|}, \quad 0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$$

sans se réduire à une constante. De même une fonction périodique $p(x)$ telle que

$$p(x+\omega) = -p(x), \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{k},$$

qui est holomorphe pour toute valeur finie de x , et qui satisfait à l'inégalité

$$|p(x)| < C_1 e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

est égale à zéro. On peut donc caractériser la solution principale $F(x|\omega)$ de l'équation

$$\Delta_{\omega} F(x) = \varphi(x)$$

de la manière suivante. Cette solution est holomorphe dans la bande $b \leq \Re(x) \leq b + \omega$ et elle y satisfait à l'inégalité (34) pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε . Toute autre solution qui possède les mêmes propriétés en diffère par une constante.

De même la solution principale de l'équation

$$\nabla_{\omega} G(x) = \varphi(x)$$

est holomorphe dans la bande $b < \Re(x) < b + \omega$ et elle y satisfait à l'inégalité (33),

ω étant un nombre fixe dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Il n'y a aucune autre solution qui admet les mêmes propriétés. Parmi toutes les solutions holomorphes les solutions principales sont donc celles qui sont de la plus petite croissance.

30. Dans le paragraphe 20 nous avons étudié la série de Fourier qui représente la fonction F . Nous allons maintenant, par une nouvelle méthode, déduire cette série avec son terme complémentaire. Reprenons l'équation (29) et remarquons qu'on a

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi iz}} = - \sum_{n=1}^m e^{2\pi inz} + \frac{e^{2\pi imz}}{1 - e^{-2\pi iz}},$$

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi iz}} = - \sum_{n=1}^m e^{-2\pi inz} + \frac{e^{-2\pi imz}}{1 - e^{2\pi iz}}.$$

En substituant ces expressions le second membre s'écrit comme il suit

$$\int_a^{x+\alpha\omega} \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz - 2\omega \sum_{n=1}^m \int_a^\infty \cos(2\pi nz) \varphi(x+\omega z) e^{-\eta\lambda(x+\omega z)} dz$$

$$+ \omega \int_{a\gamma'\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{2\pi imz}}{1 - e^{-2\pi iz}} e^{-\eta\lambda(x+\omega z)} dz + \omega \int_{a\gamma''\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-2\pi imz}}{1 - e^{2\pi iz}} e^{-\eta\lambda(x+\omega z)} dz.$$

Soit x un point dans le demi-plan $\Re(x) > b - \alpha\omega$ et soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Dans les deux derniers termes je déforme la ligne d'intégration, puis je fais tendre η vers zéro, puis je déforme de nouveau la ligne d'intégration de la manière qui a été expliquée plus haut. J'arrive ainsi à l'équation suivante

$$F(x|\omega) = \int_a^{x+\alpha\omega} \varphi(z) dz - 2 \sum_{n=1}^m \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x+\alpha\omega}^\infty \cos \frac{2\pi n(z-x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta\lambda(z)} dz + R_m, \quad (35)$$

où

$$R_m = \omega \int_a^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{2\pi imz}}{1 - e^{-2\pi iz}} dz + \omega \int_a^{\alpha-i\infty} \frac{\varphi(x+\omega z) e^{-2\pi imz}}{1 - e^{2\pi iz}} dz. \quad (36)$$

Ici α est un nombre quelconque entre 0 et -1 . Posons $x_0 = x + \alpha\omega$ et prenons par exemple $\lambda(z) = z^2$. L'équation (35) peut s'écrire comme il suit

$$F(x|\omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \right) + R_m \quad (37)$$

où

$$a_0 = \int_a^{x_0} \varphi(z) dz,$$

$$a_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz, \quad (38)$$

$$b_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\infty} \sin \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz, \quad (38')$$

$$R_m = \int_{x_0}^{x_0+i\infty} \frac{\varphi(z) e^{\frac{2\pi i m}{\omega}(z-x)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(z-x)}} dz + \int_{x_0}^{x_0-i\infty} \frac{\varphi(z) e^{-\frac{2\pi i m}{\omega}(z-x)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-x)}} dz.$$

x_0 représente un point quelconque dans le demi-plan $\Re(x_0) > b$ et l'équation est valable si $0 < \frac{x-x_0}{\omega} < 1$. Quand m augmente indéfiniment la série (37) convergera.

En effet considérons l'expression (36) du reste; on sait trouver une constante C telle que

$$\begin{aligned} |R_m| &< C \int_a^{a+i\infty} |e^{2\pi i m z} dz| + C \int_a^{a-i\infty} |e^{-2\pi i m z} dz| \\ &= C \int_0^{\infty} e^{-2\pi m z} dz + C \int_{-\infty}^0 e^{2\pi m z} dz = \frac{2C}{2\pi m}. \end{aligned}$$

Le reste R_m tend donc vers zéro quand m tend vers l'infini c. q. f. d.

Les expressions (38) des coefficients a_n et b_n ont toujours un sens. Mais en général ces deux intégrales divergent si $\eta = 0$. Il sera quelquefois avantageux de les transformer de manière à obtenir des intégrales convergentes. L'équation (37) peut évidemment s'écrire comme il suit

$$F(x|\omega) = \int_a^{x_0} \varphi(z) dz + \sum_{n=1}^m \left(a'_n \cos \frac{2\pi n}{\omega}(x-x_0) + b'_n \sin \frac{2\pi n}{\omega}(x-x_0) \right) + R_m,$$

où

$$a'_n = -2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(x_0 + z) e^{-\eta(x_0 + z)^2} dz,$$

$$b'_n = -2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \sin \frac{2\pi n z}{\omega} \varphi(x_0 + z) e^{-\eta(x_0 + z)^2} dz.$$

En faisant tourner deux fois le chemin d'intégration de la manière que nous avons expliquée plus haut, on voit que les coefficients a'_n et b'_n se représentent par les intégrales convergentes suivantes

$$a'_n = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}} [\varphi(x_0 + iz) - \varphi(x_0 - iz)] dz,$$

$$b'_n = - \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}} [\varphi(x_0 + iz) + \varphi(x_0 - iz)] dz.$$

31. Revenons à l'équation (35) et faisons $\alpha = -\frac{1}{2}$. En remplaçant x par $x + \frac{\omega}{2}$, on aura

$$F\left(x + \frac{\omega}{2} | \omega\right) = \int_a^x \varphi(z) dz - 2 \sum_{n=1}^m (-1)^n \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_x^{\infty} \cos \frac{2\pi n(z-x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz + R_m,$$

où

$$R_m = (-1)^m i \omega \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + i\omega z) - \varphi(x - i\omega z)}{1 + e^{2\pi z}} e^{-2m\pi z} dz.$$

Mais en faisant tendre α vers zéro dans l'équation (35) on obtiendra

$$F(x | \omega) = \int_a^x \varphi(z) dz - \frac{\omega}{2} \varphi(x) - 2 \sum_{n=1}^m \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_x^{\infty} \cos \frac{2\pi n(z-x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz + R_m,$$

où

$$R_m = i \omega \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + i\omega z) - \varphi(x - i\omega z)}{1 - e^{2\pi z}} e^{-2m\pi z} dz.$$

En soustrayant membre à membre ces deux relations on trouve enfin

$$G(x|\omega) = \varphi(x) + \frac{4}{\omega} \sum_{n=0}^m \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_x^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi(z-x)}{\omega} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz + R_m,$$

où

$$R_m = \frac{2}{i} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+i\omega z) - \varphi(x-i\omega z)}{1 - e^{2\pi z}} e^{-(2m+1)\pi z} dz.$$

Ces trois équations sont donc vraies pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$. Quand on fait tendre m vers l'infini on obtiendra trois séries qui convergent dans le même demi-plan parce que R_m tend vers zéro. On en conclut en particulier que les séries (33), (34), (35) et (36) du paragraphe 25 convergent, si $\Re(x) > 0$.

32. Si l'on veut pouvoir prolonger les fonctions F et G en dehors des domaines que nous avons indiqués dans le paragraphe 29 il faut ajouter des hypothèses nouvelles relativement à la fonction $\varphi(x)$. Nous considérons deux cas différents qui sont assez intéressants. Supposons d'abord que $\varphi(x)$ soit une fonction entière de x qui satisfait à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|},$$

C étant une constante, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, pendant que cette inégalité n'est pas satisfaite pour aucune valeur négative de ε . En regardant les intégrales (31) et (32) on voit que les fonctions $G(x|\omega)$, respectivement $F(x|\omega)$ sont holomorphes pour toute valeur finie de x et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$. On vérifie comme plus haut que ces deux fonctions satisfont aux équations (24) et (25) quand ω est à l'intérieur du cercle dont nous venons de parler. Je dis qu'il y a toujours un point singulier sur la circonférence de ce cercle. En effet, reprenons les quatre séries de puissances (26). La condition que nous venons d'imposer à la fonction $\varphi(x)$ entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi^{(n)}(x)|^{\frac{1}{n}} = k.$$

La première et la deuxième série admettent donc le rayon de convergence $\frac{2\pi}{k}$ et cela pour toute valeur finie de x ; la troisième et la quatrième série admettent le rayon de convergence $\frac{\pi}{k}$. Il y a donc un point singulier sur les circonférences

des deux cercles.¹ On peut vérifier ce fait à l'exemple suivant. Soit $\varphi(x) = e^{\beta x}$, β étant un nombre complexe quelconque. Les équations (31) et (32) se réduisent aux suivantes

$$\int e^{\beta x} \nabla_{\omega} x = i e^{\beta x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega \beta z} \frac{dz}{\sin \pi z}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

$$\int_0^x e^{\beta x} \Delta_{\omega} x = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (e^{\beta(x+\omega z)} - 1) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz.$$

Du théorème de Cauchy sur les intégrales complexes on conclut aisément que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a+1-i\infty}^{a+1+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz = \omega,$$

ω étant un nombre dont la valeur absolue est plus petite que 2π . En remplaçant dans la première intégrale z par $1+z$ il vient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz = \frac{\omega}{e^{\omega} - 1}.$$

On trouve de même, si $|\omega| < \pi$

$$i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\omega z} \frac{dz}{\sin \pi z} = \frac{2}{1 + e^{\omega}}.$$

En substituant ces expressions dans les équations que nous venons de trouver, on aura

$$\int e^{\beta x} \nabla_{\omega} x = \frac{2 e^{\beta x}}{e^{\omega \beta} + 1}, \quad |\omega \beta| < \pi,$$

$$\int_0^x e^{\beta x} \Delta_{\omega} x = \frac{\omega e^{\beta x}}{e^{\omega \beta} - 1} - \frac{1}{\beta}, \quad |\omega \beta| < 2\pi.$$

¹ Il arrive même que les deux cercles sont des lignes singulières.

On voit que $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont des fonctions méromorphes de ω avec un pôle simple sur les cercles de convergence. En posant $\beta = \pm 1$ et en ajoutant ensemble on trouve

$$\int \text{ch } x \nabla_{\omega} x = \frac{\text{ch} \left(x - \frac{\omega}{2} \right)}{\text{ch} \frac{\omega}{2}},$$

$$\int \text{sh } x \nabla_{\omega} x = \frac{\text{sh} \left(x - \frac{\omega}{2} \right)}{\text{ch} \frac{\omega}{2}},$$

$$\int_0^x \text{ch } x \triangle_{\omega} x = \frac{\omega}{2} \frac{\text{sh} \left(x - \frac{\omega}{2} \right)}{\text{sh} \frac{\omega}{2}},$$

$$\int_0^x \text{sh } x \triangle_{\omega} x = \frac{\omega}{2} \frac{\text{ch} \left(x - \frac{\omega}{2} \right)}{\text{sh} \frac{\omega}{2}} - 1.$$

33. La nature analytique des fonctions F et G est bien différente si $\varphi(x)$ n'est pas une fonction entière. Nous ferons l'étude complète de ces fonctions en supposant que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme de x admettant à distance finie un nombre fini de points singuliers β_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Nous supposons en outre que $\varphi(x)$ satisfasse à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < e^{(k+\varepsilon)|x|} \quad (39)$$

pour toute valeur de x dont le module est suffisamment grand. Comme il y a seulement un nombre fini de points singuliers β_{ν} , on sait trouver deux nombres réels b et \bar{b} tels que la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe pour $\Re(x) > b$ et pour $\Re(x) < \bar{b}$. Les intégrales

$$G(x|\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \quad (31)$$

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz \quad (32)$$

représentent la fonction $G(x|\omega)$ (respectivement $F(x|\omega)$) pour $\Re(x) > b$ pourvu que ω soit positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$ (respectivement $\frac{2\pi}{k}$). Je déforme la ligne d'intégration et je la remplace par un contour (fig. 5) formé d'un arc $B\alpha C$ d'un petit cercle entourant l'origine, de deux droites AB et CD parallèles à l'axe des nombres positif et de deux droites DD' et AA' , perpendiculaires à l'axe des nombres réels et s'étendant à l'infini. Cela posé, donnons à x une valeur quelconque dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et faisons varier ω dans le demi-cercle $\Re(\omega) \geq 0, |\omega| < \frac{\pi}{k}$ s'il s'agit de l'intégrale (31).

Quand on donne à ω une valeur quelconque, différente de zéro, dans ce demi-cercle on peut toujours choisir les droites CD et AB suffisamment gran-

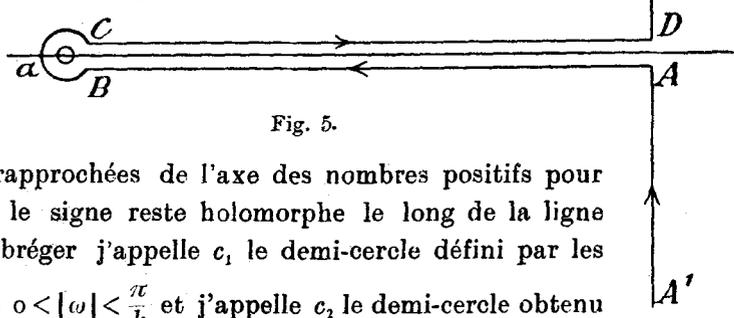


Fig. 5.

des et suffisamment rapprochées de l'axe des nombres positifs pour que la fonction sous le signe reste holomorphe le long de la ligne d'intégration. Pour abrégé j'appelle c_1 le demi-cercle défini par les inégalités $\Re(\omega) \geq 0$, et $0 < |\omega| < \frac{\pi}{k}$ et j'appelle c_2 le demi-cercle obtenu

en remplaçant la dernière inégalité par la suivante¹ $0 < |\omega| < \frac{2\pi}{k}$. On voit donc

que $G(x|\omega)$ est une fonction analytique de x et de ω , holomorphe quand x est dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et ω dans le demi-cercle c_1 . Il en est de même de la fonction $F(x|\omega)$; seulement c_1 est à remplacer par c_2 .

Il s'agit maintenant de prolonger les fonctions en dehors de ces deux domaines. Je fais d'abord remarquer qu'il résulte des équations aux différences finies

$$\nabla_{\omega} G(x|\omega) = \varphi(x), \quad \Delta_{\omega} F(x|\omega) = \varphi(x)$$

qu'on a

$$G(x|\omega) = (-1)^m G(x + m\omega|\omega) + 2 \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \varphi(x + s\omega),$$

$$F(x|\omega) = F(x + m\omega|\omega) - \omega \sum_{s=0}^{m-1} \varphi(x + s\omega).$$

Supposons que ω soit à l'intérieur de c_1 ou de c_2 . Quel que soit x on peut tou-

¹ Si $k = 0$ les deux demi-cercles sont à remplacer par le demi-plan $\Re(\omega) > 0$.

jours choisir l'entier positif m suffisamment grand pour que le premier terme au second membre soit une fonction holomorphe de x et de ω . On voit donc à ces deux équations que $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont des fonctions uniformes de x admettant les points singuliers

$$x = \beta_\nu - s\omega \quad \begin{array}{l} s = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \nu = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

et elles sont d'ailleurs holomorphes. Au voisinage du point $x = \beta_\nu - s\omega$ les fonctions sont de la forme

$$G(x|\omega) = (-1)^s 2\varphi(x+s\omega) + \psi(x|\omega),$$

$$F(x|\omega) = -\omega\varphi(x+s\omega) + \psi(x|\omega),$$

$\psi(x|\omega)$ étant une fonction holomorphe dans le point en question. La partie principale de $F(x|\omega)$ est donc la même dans tous les points $x = \beta_\nu - s\omega$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Il arrive que deux ou plusieurs points singuliers viennent coïncider. On voit aisément comment le dernier énoncé est à modifier en ce cas.

34. On peut encore réaliser le prolongement analytique d'une autre manière qui va nous conduire à une expression plus commode. Revenons à l'équation (31) que j'écris sous la forme suivante

$$G(x|\omega) = \frac{i}{\omega} \int_{x+a\omega-i\omega\infty}^{x+a\omega+i\omega\infty} \varphi(z) \frac{dz}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \quad -1 < \alpha < 0. \quad (40)$$

Supposons, pour fixer les idées, que ω soit positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Cette relation est vraie, si $\Re(x) > b - a\omega$. Je fais maintenant varier x sur une droite parallèle à l'axe des nombres réels de manière que la partie réelle de x diminue. Je suppose que cette droite ne passe par aucun des points β_ν . Quand la ligne d'intégration arrive à un des points β_ν je la déforme en y ajoutant un petit cercle entourant le point β_ν et parcouru dans le sens positif. L'intégrale étendue le long de ce cercle est égale au résidu dans le point β_ν . Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que \bar{b} l'équation (40) a pris la forme¹

¹ On sait que Cauchy désigne par la notation

$$\mathcal{E}[\varphi(z)]\psi(z)$$

la somme des résidus de l'expression $\varphi(z)\psi(z)$ relatifs aux points singuliers de la fonction $\varphi(z)$.

$$G(x|\omega) = -\frac{2\pi}{\omega} \oint \frac{[\varphi(z)]}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} + \frac{x+a\omega+i\omega\infty}{i} \int_{x+a\omega-i\omega\infty}^{x+a\omega+i\omega\infty} \varphi(z) \frac{dz}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)}. \quad (41)$$

En posant pour abrégé

$$p(x|\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \oint \frac{[\varphi(z)]}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-z)}, \quad (42)$$

cette équation peut encore s'écrire

$$G(x|\omega) = p(x|\omega) + i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \quad (43)$$

Ici on suppose que $\Re(x) \leq \bar{b}$. L'intégrale au second membre représente une fonction holomorphe pour ces valeurs de x quand ω est situé dans le demi-cercle c_1 . Quand les variables x et ω restent dans ces deux domaines la fonction $G(x|\omega)$ admet, par conséquent, les mêmes points singuliers que la fonction $p(x|\omega)$. Or on voit à l'expression (42) que p est une fonction uniforme et périodique de x , admettant la période 2ω , et satisfaisant aux relations suivantes

$$p(x+\omega|\omega) = -p(x|\omega), \quad p(x|\omega) = p(x|-\omega).$$

Cette fonction périodique admet les points singuliers

$$x = \beta_\nu \pm s\omega, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

et l'on voit aisément comment elle se comporte au voisinage de ces points. Si les β_ν sont des pôles simples de la fonction $\varphi(z)$ avec les résidus B_ν , on trouve immédiatement

$$p(x|\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{B_\nu}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)}. \quad (44)$$

Si les β_ν sont des pôles des ordres r_ν la fonction p est de la forme

$$p(x|\omega) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{s=0}^{s < \frac{r_\nu}{2}} \frac{B_\nu^{(s)} + A_\nu^{(s)} \cot \frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu)}{\left[\sin \frac{\pi}{\omega}(x-\beta_\nu) \right]^{2s+1}}, \quad (45)$$

où les $B_v^{(s)}$ et les $A_v^{(s)}$ sont des polynomes en $\frac{x}{\omega}$ mais ils sont indépendants de x .

En ce cas la fonction $p(x|\omega)$ admet pour pôles d'ordre r_v les points $\beta_v \pm s\omega$.

Cela posé, reprenons l'équation (40), donnons à x une valeur fixe dans le demi-plan $\Re(x) > b$ et soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Faisons maintenant décrire à la variable ω un cercle ayant l'origine pour centre et qui doit être parcouru en sens direct. Le chemin d'intégration tourne. Quand il arrive à un des points β_v , j'évite ce point par un petit cercle, entourant le point β_v , et parcouru dans le sens positif. Quand ω arrive sur l'axe des nombres négatifs l'équation (40) a pris la forme (41) ou, ce qui revient au même, la forme (43). Quand ω continue sa rotation autour de l'origine on rencontre de nouveau les mêmes points singuliers mais les petits cercles par lesquels on les évite doivent cette fois être parcourus dans le sens négatif. Quand ω revient à son point de départ sur l'axe des nombres positifs l'équation (41) reprend par conséquent la forme (40). Il en résulte que $G(x|\omega)$ est une fonction uniforme de ω au voisinage du point $\omega = 0$.

D'autre part laissons, dans l'équation (41), ω fixe et négatif et faisons varier x de sorte que sa partie réelle diminue. Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que \bar{b} l'équation (41) a pris la forme

$$G(x|\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \quad (46)$$

Désignons par \bar{c}_1 le demi-cercle symétrique à c_1 par rapport à l'axe imaginaire et déterminé par les inégalités $\Re(\omega) \leq 0$, $0 < |\omega| < \frac{\pi}{k}$. On voit comme plus haut que l'intégrale au second membre représente une fonction qui est holomorphe pour toutes les valeurs de ω et de x qui appartiennent respectivement au demi-cercle \bar{c}_1 et au demi-plan $\Re(x) < \bar{b}$.

De l'équation (43) on peut déduire une relation remarquable. Nous venons de voir que cette équation est vraie, si ω est négatif et $\Re(x) > \bar{b}$. Remplaçons ω par $-\omega$ et en même temps z par $-1-z$, nous aurons:

$$G(x|-\omega) = p(x|\omega) + i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}.$$

Dans cette équation ω est positif et $\Re(x) > \bar{b}$. Mais l'intégrale au second membre

représente, pour ces valeurs des variables, la fonction $G(x + \omega | \omega)$. On a par conséquent

$$G(x - \omega | -\omega) = G(x | \omega) - p(x | \omega). \quad (47)$$

Cette relation joue un rôle capital dans l'étude de la fonction G . Nous l'avons démontrée en supposant ω positif, mais il va sans dire qu'elle subsiste pour toute valeur régulière de ω et de x .

Il résulte en particulier de cette relation que la fonction $G(x - \omega | -\omega)$ est encore une solution de notre équation aux différences finies, c'est à dire qu'on a

$$\nabla_{\omega} G(x - \omega | -\omega) = \varphi(x).$$

Ce fait est d'ailleurs une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des fonctions, pourvu qu'on sache que la fonction admet le prolongement analytique que nous venons de réaliser.

Il y a, pour cette fonction, un certain développement qui mérite d'être signalé et qui est voisin de celui qui nous a servi pour point de départ. Pour y arriver je définis d'abord une fonction \bar{G} par la limite

$$\bar{G}(x | \omega) = \int_{\omega} \varphi(-x) \nabla x.$$

En posant, par exemple, $\lambda(x) = x^2$ on a donc

$$\bar{G}(-x | \omega) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x - s\omega) e^{-\eta(x-s\omega)^2}.$$

De ce qui précède il résulte que cette limite existe et qu'on a

$$\bar{G}(-x | \omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x - \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}.$$

On suppose ici que $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ et que $\Re(x) < b$. Mais en rapprochant cette équation de l'équation (46) on voit que

$$\bar{G}(-x | \omega) = G(x | -\omega).$$

On a par conséquent, ω étant positif:

$$G(x - \omega | -\omega) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \varphi(x - s\omega) e^{-\eta(x-s\omega)^2}. \quad (48)$$

On vérifie immédiatement que cette limite représente une solution de notre équation aux différences finies. En particulier on trouve

$$G(x - \omega | -\omega) = 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \varphi(x - s\omega),$$

si cette série converge. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence directe de notre définition de la fonction $G(x|\omega)$, si la série converge uniformément pour toutes les valeurs de ω dans un domaine connexe comprenant des segments de l'axe positif et de l'axe négatif; mais s'il n'en est plus ainsi la démonstration que nous venons de donner devient nécessaire.

Je vais encore attirer l'attention sur une expression remarquable de la fonction périodique p qui découle immédiatement de l'expression (48). En substituant cette expression dans l'équation (47) on voit qu'on a toujours

$$p(x|\omega) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)^2}. \quad (49)$$

On a encore

$$p(x|\omega) = 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\eta|s|\omega},$$

si cette limite existe. En particulier on aura

$$p(x|\omega) = 2 \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega), \quad (50)$$

si la série converge.

35. Passons à la fonction $F(x|\omega)$. Si $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ cette fonction se représente dans le demi-plan $\Re(x) > b$, par l'intégrale (32) que j'écris sous la forme suivante

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{x+a\omega-i\omega\infty}^{x+a\omega+i\omega\infty} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \right)^2 dz. \quad (51)$$

Pour effectuer le prolongement analytique nous allons raisonner sur cette intégrale comme nous venons de le faire relativement à l'intégrale (40). Pourtant il y a une différence à noter provenant de ce que la fonction $f(z)$ est non uniforme. Cette fonction est uniquement déterminée dans le demi-plan $\Re(z) > b$ si l'on suppose, pour fixer les idées, que $a > b$, et que l'intégrale

$$f(z) = \int_a^z \varphi(z) dz$$

soit étendue le long d'un chemin situé tout entier dans le demi-plan. Mais la fonction $f(z)$, étant l'intégrale d'une fonction uniforme, admet en général les points β_v pour points singuliers logarithmiques. Je trace de chaque point β_v une coupure réunissant ce point au point à l'infini. Cette coupure sera formée d'une droite parallèle à l'axe imaginaire et dirigée du côté négatif de cet axe. Dans le plan ainsi découpé $f(z)$ est une fonction uniforme. Le point γ représente, dans la figure 6, le point à l'infini sur la coupure partant du point β_v . Soit Γ_v un lacet formé du bord droit de la coupure de γ à α , d'un petit cercle C_v autour de β_v et parcouru dans le sens positif et enfin du bord gauche de la coupure de α à γ . Posons pour abrégé

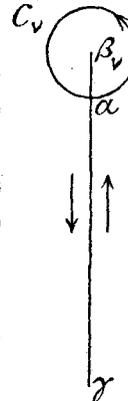


Fig. 6.

$$\Gamma = \sum_{v=1}^{v=n} \Gamma_v.$$

Soit ω fixe et positif. Dans l'équation (51) je fais varier x sur une droite parallèle à l'axe réel de sorte que sa partie réelle diminue. Je suppose que cette droite ne passe par aucun des points β_v . La ligne d'intégration se déplacera à gauche. En franchissant la coupure partant du point β_v , j'ajoute à la ligne d'intégration le lacet Γ_v . Quand la partie réelle de x est devenue plus petite que \bar{b} , l'équation (32) a pris la forme

$$F(x|\omega) = H(x|\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz, \quad \frac{2\pi}{k} > \omega > 0, \quad (52)$$

où l'on a posé pour abrégé

$$H(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{\Gamma} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega} (z-x)} \right)^2 dz.$$

La dernière intégrale dans le second membre de l'équation (52) représente une fonction qui est holomorphe pour $\Re(x) < \bar{b}$ quand ω est situé dans le demi-cercle c_2 . Quand x et ω restent dans ces deux domaines les points singuliers de $F(x|\omega)$ sont donc les mêmes que ceux de la fonction $H(x|\omega)$. Or il est facile d'évaluer cette fonction. En effet, ω étant positif, la fonction $\cot \frac{\pi}{\omega} (z-x) - i$ tendra

vers zéro quand z tend vers l'infini le long d'une des coupures. En intégrant par partie on trouve donc

$$\frac{1}{2\pi i\omega} \int_{\Gamma_\nu} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \right)^2 dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\nu} \varphi(z) \left[\cot \frac{\pi}{\omega}(z-x) - i \right] dz.$$

Mais la fonction sur laquelle porte l'intégrale au second membre est uniforme. Les deux intégrales le long des deux bords de la coupure se détruisent donc mutuellement de sorte qu'il reste seulement l'intégrale étendue le long du cercle \mathcal{C}_ν qui est égale au résidu dans le point β_ν . On a par conséquent

$$H(x|\omega) = -\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu - \oint [\varphi(z)] \pi \cot \frac{\pi}{\omega}(x-z), \quad (53)$$

où B_ν désigne le résidu de la fonction $\varphi(z)$ dans le point β_ν . La fonction $H(x|\omega)$ sera définie pour toutes les valeurs des variables par cette équation. On voit que c'est une fonction périodique de x avec la période ω . Elle admet les points singuliers

$$x = \beta_\nu \pm s\omega, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

En rapprochant l'expression (53) de l'expression (42) on trouve entre les fonctions p et H la relation suivante

$$\triangle_{\omega} H(x|2\omega) = p(x|\omega). \quad (54)$$

Si les β_ν sont des pôles simples de la fonction $\varphi(x)$ on aura

$$H(x|\omega) = -\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu \pi \cot \frac{\pi}{\omega}(x - \beta_\nu). \quad (55)$$

Si les β_ν sont des pôles des ordres r_ν , la fonction $H(x|\omega)$ est de la forme

$$H(x|\omega) = -\pi \sum_{\nu=1}^{\nu=n} B_\nu \left[\cot \frac{\pi}{\omega}(x - \beta_\nu) + i \right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{s=1}^{s \leq \frac{r_\nu}{2}} \frac{B_\nu^{(s)} + A_\nu^{(s)} \cot \frac{\pi}{\omega}(x - \beta_\nu)}{\left[\sin \frac{\pi}{\omega}(x - \beta_\nu) \right]^{2s}}, \quad (56)$$

où les $A_\nu^{(s)}$ et les $B_\nu^{(s)}$ sont des polynomes en $\frac{1}{\omega}$. Si les β_ν sont des points singuliers essentiels, la fonction $H(x|\omega)$ admet une infinité de points singuliers essentiels.

Cela posé, reprenons l'équation (51) et donnons à x une valeur fixe quelconque dans le demi-plan $\Re(x) > b$. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{2\pi}{k}$. Je fais maintenant décrire à ω un cercle ayant l'origine pour centre et parcouru en sens *inverse*. Quand ω arrive à l'axe des nombres négatifs l'équation (51) a pris la forme (52) où $H(x|\omega)$ a la valeur donnée par l'équation (53). Mais si l'on fait varier ω sur le même cercle en sens *direct*, partant d'une valeur positive et continuant sa marche jusqu'à ce qu'il arrive à l'axe des nombres négatifs on trouve l'équation suivante

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{\Gamma'} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \right)^2 dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz. \quad (57)$$

ω est ici négatif. On peut évaluer la première intégrale comme plus haut en remarquant que la fonction $\cot \frac{\pi}{\omega}(z-x) + i$ tendra vers zéro quand z tend vers l'infini le long d'une des coupures. On a par conséquent

$$\frac{1}{2\pi i \omega} \int_{\Gamma'} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \right)^2 dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma''} \varphi(z) \left[\cot \frac{\pi}{\omega}(z-x) + i \right] dz.$$

L'équation (57) peut donc s'écrire comme il suit

$$F(x|\omega) = 2\pi i \sum_{r=1}^{v-n} B_r + H(x|\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 dz. \quad (58)$$

Les valeurs de la fonction $F(x|\omega)$, pour ω négatif, sont donc différentes dans les deux cas. $F(x|\omega)$ est par conséquent une fonction non uniforme de ω . La différence entre les deux systèmes de valeurs est constante et égale à $2\pi i \sum B_r$. Soit B le résidu de $\varphi(x)$ à l'infini. On a

$$B = - \sum_{r=1}^{v-n} B_r.$$

La fonction $F(x|\omega)$ est donc de la forme

$$F(x|\omega) = -B \log \omega + F_1(x|\omega), \quad (59)$$

$F_1(x|\omega)$ étant une fonction uniforme de ω au voisinage de $\omega = 0$. Dans le plan

des ω je prend comme coupure la partie négative de l'axe imaginaire. Dans le plan ainsi découpé $F(x|\omega)$ est une fonction uniforme.

Dans l'équation (58) ω est négatif et $\Re(x) > b$. Laissons ω fixe et faisons varier x de sorte que sa partie réelle diminue. Quand la partie réelle de x devient plus petite que b l'équation prend la forme

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x+\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz. \quad (60)$$

J'ai ainsi réalisé complètement le prolongement analytique que j'avais en vue.

Soit \bar{c}_2 le demi-cercle symétrique à c_2 par rapport à l'axe imaginaire et déterminé par les inégalités $\Re(\omega) \leq 0$, $0 < |\omega| < \frac{2\pi}{k}$. On voit à la dernière intégrale que la fonction $F(x|\omega)$ est holomorphe pour toutes les valeurs de ω et de x qui appartiennent respectivement au demi-cercle \bar{c}_2 et au demi-plan $\Re(x) < b$.

En regardant l'expression (53) on voit que la fonction périodique $\Pi(x|\omega)$ satisfait à la relation

$$\Pi(x|\omega) = -\Pi(x|\omega) + 2\pi i B. \quad (61)$$

Cela posé, on trouve immédiatement, en rapprochant les équations (58) et (32), la formule suivante

$$F(x-\omega|\omega) = F(x|\omega) - \Pi(x|\omega) \quad (62)$$

qui exprime une des principales propriétés de la fonction F . Cette relation est démontrée en supposant ω positif. Il va sans dire qu'elle subsiste pour les valeurs complexes de ω , les branches de la fonction étant convenablement choisies.

36. Je vais maintenant déduire, pour la fonction F , une expression nouvelle qui est fort remarquable. Pour y arriver je définis d'abord une fonction \bar{F} par la limite suivante

$$\bar{F}(x|\omega) = \sum_{-a}^x \varphi(-z) \triangle_{\omega} z.$$

En posant $\lambda(x) = x^2$ on a donc

$$\bar{F}(-x|\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^a \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x-s\omega) e^{-\eta(x-s\omega)^2} \right]. \quad (63)$$

L'intégrale au second membre n'est pas complètement déterminée, a étant par hypothèse plus grand que b . Convenons de choisir le chemin d'intégration de sorte qu'il ne rencontre aucune des coupures partant des points β_ν . On peut donc intégrer le long de l'axe réel, si tous les points β_ν sont au dessous de cet axe. Mais s'il n'en est pas ainsi, il faut intégrer de $-\infty$ jusqu'au point \bar{b} le long de l'axe réel, et puis de \bar{b} jusqu'à b le long d'une courbe située au-dessus de l'axe réel et laissant tous les points β_ν du côté droit de la courbe; enfin on chemine de b jusqu'à a le long d'une courbe située dans le demi-plan $\Re(z) > b$.

Supposons que $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. De ce qui précède il résulte immédiatement que la limite (63) existe et qu'on a

$$\bar{F}(-x|\omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{a-i\omega}^{a+i\omega} f(x-\omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz$$

pourvu que $\Re(x) < \bar{b}$. Mais en rapprochant cette équation de l'équation (60), on trouve

$$-\bar{F}(-x|\omega) = F(x|-\omega).$$

On a donc, ω étant positif:

$$F(x|-\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x-s\omega) e^{-\eta(x-s\omega)^2} - \int_{-\infty}^a \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz \right].$$

Il s'agit ici de la branche de la fonction F obtenue en faisant varier ω sans franchir la coupure. En substituant cette expression dans l'équation

$$\Pi(x|\omega) = F(x|\omega) - F(x-\omega|-\omega)$$

on trouve enfin

$$\Pi(x|\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) e^{-\eta z^2} dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)^2} \right], \quad (64)$$

Cette égalité est valable dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$ pourvu que x ne soit pas situé sur une droite parallèle à l'axe réel et passant par un des points β_ν .

On a donc en particulier

$$\Pi(x|\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x+s\omega), \quad (65)$$

si la série et l'intégrale convergent. Dans ces deux expressions on suppose que les lignes d'intégration ont été choisies comme nous venons de le dire. On vérifie immédiatement à l'aide de ces expressions que $H(x|\omega)$ est une fonction périodique de x avec la période ω .

Cette fonction admet un développement en série de Fourier dont les coefficients s'expriment d'une manière très simple à l'aide de la fonction $\varphi(x)$. Admettons que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\Re\left(\frac{\beta_1}{i}\right) \geq \Re\left(\frac{\beta_2}{i}\right) \geq \Re\left(\frac{\beta_3}{i}\right) \cdots > \Re\left(\frac{\beta_n}{i}\right).$$

Soient x et x_0 deux points quelconques dans la bande

$$\Re\left(\frac{\beta_\nu}{i}\right) > \Re\left(\frac{x}{i}\right) > \Re\left(\frac{\beta_{\nu+1}}{i}\right). \quad (66)$$

On aura

$$H(x|\omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \right), \quad (67)$$

où

$$a_n = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} H(x|\omega) \cos \frac{2\pi n x}{\omega} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} H(x|\omega) \sin \frac{2\pi n x}{\omega} dx.$$

Substituons dans ces intégrales l'expression (64) et remarquons que cette expression converge uniformément par rapport à x . On trouvera, si $n > 0$

$$a_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} \cos \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx, \quad (68)$$

$$b_n = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} \sin \frac{2\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx, \quad (68')$$

où l'intégration est étendue le long d'une droite parallèle à l'axe réel et passant par le point x_0 . Enfin on aura

$$a_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx - \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx \right].$$

Dans la première intégrale le chemin a été choisi de la même manière que dans l'expression (64). Soit, comme plus haut, B_s le résidu de la fonction $\varphi(x)$ dans le point β_s . On aura donc

$$a_0 = -2\pi i \sum_{s=1}^{s=v} B_s.$$

Des intégrales (68) on peut déduire une autre expression remarquable des coefficients a_n et b_n . Je déforme deux fois le chemin d'intégration de la manière que j'ai déjà expliquée. Les nouvelles intégrales se détruisent mutuellement à l'exception de celles qui sont étendues le long de n petit cercles entourant les points singuliers. Par un calcul facile on trouvera ainsi

$$a_n = -\pi i \mathcal{E} \left(\varphi(x) e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}} \right) + \pi i \mathcal{E}' \left(\varphi(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{\omega}} \right),$$

$$b_n = -\pi \mathcal{E} \left(\varphi(x) e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}} \right) - \pi \mathcal{E}' \left(\varphi(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{\omega}} \right),$$

où \mathcal{E} désigne la somme des résidus dans les points $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$ et \mathcal{E}' désigne la somme des résidus dans les points $\beta_{v+1}, \beta_{v+2}, \dots, \beta_n$.

Avec cette détermination des coefficients a_n et b_n la série (67) convergera absolument et uniformément dans la bande (66) et elle représente la fonction $\Pi(x|\omega)$. En particulier on aura $a_0 = 0$, s'il s'agit du demi-plan $\Re\left(\frac{x}{i}\right) > \Re\left(\frac{\beta_1}{i}\right)$, et $a_0 = 2\pi i B$, s'il s'agit du demi-plan $\Re\left(\frac{x}{i}\right) < \Re\left(\frac{\beta_n}{i}\right)$.

En tenant compte de la relation

$$p(x|\omega) = \triangle_{\omega} \Pi(x|2\omega)$$

on voit enfin que la fonction périodique p se représente dans la bande (66) par la série convergente¹

¹ On peut déduire plusieurs autres expressions remarquables des deux fonctions périodiques. Admettons pour un moment que le point à l'infini est un pôle d'ordre quelconque pour la fonction $\varphi(x)$. On démontre que

$$p(x|\omega) = (-1)^m \omega^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{E}^{m-1}(z)}{(m-1)!} \varphi^m(x+\omega z) dz,$$

$$\Pi(x|\omega) = (-1)^m \omega^{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{E}^m(z)}{m!} \varphi^{(m)}(x+\omega z) dz - 2\pi i \sum_{s=1}^{s=v} B_s.$$

$$p(x|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{\omega} + \beta_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\omega} \right),$$

où

$$\alpha_n = \frac{4}{\omega} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} \cos \frac{\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx,$$

$$\beta_n = \frac{4}{\omega} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} \sin \frac{\pi n x}{\omega} \varphi(x) e^{-\eta x^2} dx,$$

x_0 étant un point quelconque dans la bande (66).

Les séries asymptotiques.

37. Nous avons vu que les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ admettent une infinité de points singuliers au voisinage du point $\omega = 0$. Ce point est donc un point singulier essentiel des deux fonctions. Voyons maintenant comment ces fonctions se comportent quand ω tend vers zéro le long d'un rayon vecteur. Dans ce but reprenons les quatre séries que nous avons envisagées dans le paragraphe 16. Nous pouvons présenter le terme complémentaire de ces séries sous une forme nouvelle. Développons la fonction f par la formule de Taylor et prenons le reste sous la forme donnée par DARBOUX; on aura

Ces deux intégrales ne dépendent pas de l'entier m . Seulement il faut avoir soin de choisir m suffisamment grand pour assurer la convergence, ce qui est toujours possible. Les intégrales admettent n coupures formées de n droites parallèles à l'axe réel et passant par les n points β_ν . Elles convergent pour toute valeur positive de ω et pour toute valeur de x qui n'est pas située sur une des coupures. La première équation est vraie dans tout le plan découpé. La première intégrale représente donc la même fonction des deux côtés d'une coupure. La seconde équation est vraie dans la bande (66). Quand x franchit la coupure passant par le point β_ν la seconde intégrale fait un saut brusque qui est égal à $2\pi i B_\nu$. Cette intégrale représente donc différentes fonctions dans les différentes bandes.

On démontre de même que la fonction p se représente par la série suivante

$$p(x|\omega) = 2 \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \nabla_{\omega} P(x+s\omega)]$$

qui converge pour toute valeur de ω qui est différente de zéro et pour toute valeur de x qui n'est pas de la forme $\beta_\nu, \beta_\nu \pm \omega, \beta_\nu \pm 2\omega, \dots$. Ici $P(x)$ a la même signification que dans le paragraphe 11.

$$f(x + \omega z) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x) + \lambda \frac{\omega^{m+1} z^{m+1}}{(m+1)!} \varphi^{(m)}(x + \Theta \omega z),$$

λ désignant une quantité dont le module est au plus égal à l'unité. Substituons cette expression dans les intégrales suivantes, on trouve, en tenant compte des formules (18) et (20)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz &= \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x) \\ &+ \frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi^{(m)}(x + \Theta \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 z^{m+1} dz, \quad -1 < \alpha < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 dz &= \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu D_\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x) \\ &+ \frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi^{(m)}(x + \Theta \omega z) \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 z^{m+1} dz, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. De même, en tenant compte des formules (19) et (17) on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\cos \pi z} &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu E_\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) \\ &+ \frac{\omega^m \lambda}{m! i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi^{(m)}(x + \Theta \omega z) \frac{z^m}{\cos \pi z} dz, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et enfin

$$i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\omega^\nu C_\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + R_m, \quad (69)$$

où

$$R_m = i \lambda \frac{\omega^m}{m!} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi^{(m)}(x + \Theta \omega z) \frac{z^m}{\sin \pi z} dz, \quad -1 < \alpha < 0.$$

Quand m augmente indéfiniment les quatre séries divergeront toujours car autrement les fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ auraient été holomorphes au voisinage du point $\omega = 0$. Considérons la dernière série. Je vais démontrer qu'elle représente asymptotiquement la fonction G quand ω tend vers zéro d'une certaine manière. Donnons à x une valeur fixe dans le demi-plan $\Re(x) > b$. L'intégrale R_m converge, si ω est positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$. Elle convergera encore quand ω est situé dans le demi-cercle c_1 , pourvu qu'on déforme la ligne d'intégration d'une manière convenable. Je prends comme chemin d'intégration le contour C_2 (fig. 3, page 160) dans lequel les deux droites $\alpha\beta'$ et $\alpha\beta''$ doivent former avec l'axe des nombres positifs les angles $\pm \eta$. Supposons que

$$|\omega| < \frac{\pi \sin \eta - \varepsilon}{k},$$

ε étant un nombre positif. On a alors

$$R_m = i\lambda \frac{\omega^m}{m!} \int_{C_2} \varphi^{(m)}(x + \Theta(\omega z)) \frac{z^m}{\sin \pi z} dz.$$

Quand ω est situé dans le demi-cercle c_1 on peut toujours choisir le nombre positif η assez petit pour que la fonction sur laquelle porte l'intégrale R_m reste holomorphe quand z parcourt la ligne C_2 . On sait donc trouver une constante K telle que l'on ait constamment

$$\left| \frac{\varphi^{(m)}(x + \Theta(\omega z))}{m!} \right| < K e^{k|\omega z|},$$

On a donc

$$|R_m| < K |\omega|^m \int_{C_2} e^{(\pi \sin \eta - \varepsilon)|z|} \left| \frac{z^m}{\sin \pi z} dz \right|.$$

La fonction $|\omega^{-m} R_m|$ reste par conséquent plus petite qu'une constante quand ω tend vers zéro et l'on a uniformément

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \frac{R}{\omega^{m-1}} = 0,$$

ω tendant vers zéro par des valeurs appartenant au demi-cercle c_1 . En déformant le chemin d'intégration d'une autre manière on voit que cette équation subsiste quand ω tend vers zéro par des valeurs appartenant au demi-cercle \bar{c}_1 . On voit enfin que ces deux résultats restent vrais encore si $\Re(x) < \bar{b}$. La série divergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{\nu} C_{\nu}}{2^{\nu} \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) \quad (70)$$

représente donc asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ d'une part dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, pourvu que $\Re(x) > b$, et d'autre part dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, pourvu que $\Re(x) < \bar{b}$. Mais elle représente asymptotiquement la fonction

$$G(x|\omega) - p(x|\omega) = G(x - \omega | -\omega)$$

d'une part dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, si $\Re(x) < \bar{b}$, et d'autre part dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, si $\Re(x) > b$.

On peut évidemment décomposer la fonction $p(x|\omega)$ en n fonctions périodiques

$$p(x|\omega) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_{\nu}(x|\omega),$$

$p_{\nu}(x|\omega)$ étant la fonction qui appartient au point singulier β_{ν} . Supposons que les β_{ν} soient rangés de sorte que

$$\Re(\beta_1) \geq \Re(\beta_2) \geq \dots \geq \Re(\beta_n).$$

Alors, si

$$\Re(\beta_s) > \Re(x) > \Re(\beta_{s+1}),$$

il résulte de notre analyse que la série représente asymptotiquement la fonction

$$G(x|\omega) - \sum_{\nu=1}^{\nu=s} p_{\nu}(x|\omega) \text{ dans l'angle } \frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2},$$

et la fonction

$$G(x|\omega) - \sum_{\nu=s+1}^{\nu=n} p_{\nu}(x|\omega) \text{ dans l'angle } \frac{3\pi}{2} > \arg \omega > \frac{\pi}{2}.$$

On voit de même que la série divergente

$$\int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^{\nu} B_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x), \quad (71)$$

dans le plan découpé, représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \arg \omega \geq -\frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x|\omega)$, pourvu que $\Re(x) > b$, mais elle représente la fonction

$$F(x|\omega) - \Pi(x|\omega) = F(x - \omega | -\omega),$$

si $\Re(x) < \bar{b}$. La série représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geq \arg \omega \geq \frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x|\omega)$, si $\Re(x) < \bar{b}$ et la fonction

$$F(x|\omega) + \Pi(x|-\omega),$$

si $\Re(x) > b$. On démontre enfin que les deux autres séries se comportent d'une manière semblable.

Quelles sont maintenant les valeurs asymptotiques des fonctions p et Π ? Dans le plan des ω les points singuliers de ces fonctions sont tous situés sur certains rayons vecteurs. Supposons pour simplifier que tous les β_n soient des pôles. En regardant l'expression (45) on voit alors immédiatement que la fonction $p(x|\omega)$ tend vers zéro, quand ω tend vers zéro le long d'un rayon vecteur sur lequel il n'y a pas de point singulier et plus généralement qu'on a

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{-m} p(x|\omega) = 0$$

quel que soit l'entier positif m . Sur un tel rayon vecteur tous les termes du développement asymptotique de $p(x|\omega)$ sont donc nuls. De l'expression (56) il résulte de même qu'on sait trouver une constante c telle que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Pi(x|\omega) - c}{\omega^m} = 0$$

le long des mêmes rayons vecteurs. Mais cette constante dépend de l'argument de ω . Elle passe d'une valeur à une autre quand ω franchit un des vecteurs sur lesquels la limite cesse d'exister.

Résumons les résultats que nous venons de trouver. Les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ admettent des prolongements analytiques dans tout le plan des x et, dans le plan des ω , elles existent à l'intérieur du cercle $|\omega| < \frac{\pi}{k}$, respectivement à l'intérieur du cercle $|\omega| < \frac{2\pi}{k}$. $G(x|\omega)$ est une fonction uniforme de x et de ω . $F(x|\omega)$ est une fonction uniforme de x , mais une fonction non uniforme de ω

au voisinage du point $\omega = 0$. Pour toute valeur de ω différente de zéro les deux fonctions admettent dans le plan des x les points singuliers

$$x = \beta_\nu - s\omega, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Pour toute valeur de x , différente des β_ν , elles admettent, dans le plan des ω , les points singuliers

$$\omega = \frac{\beta_\nu - x}{s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Ces points singuliers sont situés sur n rayons vecteurs que j'appelle *les vecteurs singuliers*. La série (70) représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ sur tout rayon vecteur différent des vecteurs singuliers. On a donc en particulier

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(x|\omega) = \varphi(x), \tag{72}$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur non singulier. Mais cette limite cesse d'exister quand ω tend vers zéro le long d'une courbe tangente à l'origine à un vecteur singulier. De même la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{2\nu} E_{2\nu}}{2^{2\nu} (2\nu)!} \varphi^{(2\nu)}(x)$$

représente asymptotiquement la fonction $G\left(x + \frac{\omega}{2}|\omega\right)$ sur les mêmes vecteurs.

Supposons, pour fixer les idées, que $\Re(x) > b$ et que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\arg(\beta_{\nu+1} - x) \geq \arg(\beta_\nu - x) \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors la série (71) représente asymptotiquement la fonction $F(x|\omega)$ dans l'angle $\arg(\beta_1 - x) > \arg \omega > -\frac{\pi}{2}$. Et elle représente asymptotiquement la fonction

$$F(x|\omega) - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p} B_\nu \quad \text{dans l'angle } \arg(\beta_{p+1} - x) > \arg \omega > \arg(\beta_p - x).$$

La valeur asymptotique de la fonction $F(x|\omega)$ fait donc un saut brusque quand ω franchit un des vecteurs singuliers. Ce saut est égal à une des périodes de

l'intégrale $\int_a^x \varphi(x) dx$. On a donc en particulier

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(x) dx, \quad (73)$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. Mais la détermination qu'il faut choisir de l'intégrale au second membre change avec l'argument de ω .

Les égalités (72) et (73) ont lieu uniformément dans tout angle qui ne comprend aucun vecteur singulier et qui n'est pas limité par un tel rayon vecteur. Mais quand ω franchit le vecteur qui passe par le point $\beta_\nu - x$ la valeur asymptotique de $F(x|\omega)$ augmente de $2\pi i B_\nu$.

Quand on fait varier x les vecteurs singuliers tournent. Quand x décrit un cercle autour d'un des points singuliers le vecteur singulier correspondant à ce point fait une rotation complète.

Intégrales définies.

38. Je vais encore signaler quelques autres expressions des solutions principales qui pourtant ne sont que d'une médiocre importance. Supposons pour abrégé que $b < 0$ et que $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Soit x un point dans la bande

$$0 < \Re(x) < \omega$$

et posons $\alpha = -\frac{x}{\omega}$ dans la formule (14). On aura

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(z) \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-x)} \right)^2 dz.$$

En changeant la variable d'intégration on trouve, après quelques réductions faciles

$$\begin{aligned} F(x|\omega) &= \frac{\pi}{\omega} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{ch} \frac{2\pi t}{\omega}}{\left(\operatorname{ch} \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega} \right)^2} [f(it) + f(-it)] dt \\ &+ \frac{\pi i}{\omega} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{sh} \frac{2\pi t}{\omega}}{\left(\operatorname{ch} \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega} \right)^2} [f(it) - f(-it)] dt. \end{aligned} \quad (74)$$

De l'équation (13) on déduit de même, en supposant $a = 0$,

$$\begin{aligned}
 F(x|\omega) &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \left[1 - \frac{sh \frac{2\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} \right] [\varphi(it) - \varphi(-it)] dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{2\pi x}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) + \varphi(-it)] dt. \tag{75}
 \end{aligned}$$

Si $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$ on trouve enfin, en posant $\alpha = -\frac{x}{\omega}$ dans l'équation (12),

$$\begin{aligned}
 G(x|\omega) &= \frac{2}{\omega} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{\pi x}{\omega} ch \frac{\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) + \varphi(-it)] dt \\
 &\quad + \frac{2i}{\omega} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi x}{\omega} sh \frac{\pi t}{\omega}}{ch \frac{2\pi t}{\omega} - \cos \frac{2\pi x}{\omega}} [\varphi(it) - \varphi(-it)] dt. \tag{76}
 \end{aligned}$$

Ces trois relations sont valables pour toute valeur de x dans la bande $0 < \Re(x) < \omega$. Les seconds membres représentent d'ailleurs des fonctions périodiques de x .

Si $\varphi(x)$ est une puissance entière de x les fonctions F et G se réduisent aux polynomes de Bernoulli et aux polynomes d'Euler. En posant $\omega = 1$ dans les trois formules précédentes on trouve ainsi pour ces polynomes les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 B_{2\nu}(x) &= (-1)^\nu 2\pi \int_0^\infty t^{2\nu} \frac{1 - \cos 2\pi x ch 2\pi t}{(ch 2\pi t - \cos 2\pi x)^2} dt, \\
 B_{2\nu+1}(x) &= (-1)^{\nu+1} 2\pi \int_0^\infty t^{2\nu+1} \frac{\sin 2\pi x sh 2\pi t}{(ch 2\pi t - \cos 2\pi x)^2} dt, \\
 B_{2\nu}(x) &= (-1)^\nu 2\nu \int_0^\infty t^{2\nu-1} \left[1 - \frac{sh 2\pi t}{ch 2\pi t - \cos 2\pi x} \right] dt,
 \end{aligned}$$

$$B_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} (2\nu+1) \int_0^{\infty} t^{2\nu} \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} dt,$$

$$E_{2\nu}(x) = (-1)^{\nu} 4 \int_0^{\infty} t^{2\nu} \frac{\sin \pi x \operatorname{ch} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} dt,$$

$$E_{2\nu+1}(x) = (-1)^{\nu+1} 4 \int_0^{\infty} t^{2\nu+1} \frac{\cos \pi x \operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} dt.$$

On suppose ici que $0 < \Re(x) < 1$. Les seconds membres sont des fonctions périodiques de x . Les intégrales se confondent donc, pour les valeurs réelles de x , avec les fonctions que nous avons désignées plus haut par $B_{\nu}(x)$ et $E_{\nu}(x)$. CAUCHY¹ a démontré pour la première fois ces formules et elles ont été retrouvées par RAABE² et HERMITE³.

Nous mentionnerons encore quelques autres cas particuliers. En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ dans l'équation (76) on trouve

$$g(x) = \int \frac{\nabla x}{x} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x \operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} \frac{dt}{t} + \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad (77)$$

où $0 < \Re(x) < 1$. Le dernier terme au second membre provient de ce qu'il y a, dans l'intégrale (12), sur le chemin d'intégration un pôle qu'il faut éviter par un petit demi-cercle dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro.

En posant $\varphi(x) = \frac{1}{x+n}$, n étant positif, on trouve directement de l'équation (76)

$$g(x+n) = 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x \operatorname{ch} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} \frac{ndt}{n^2+t^2} + 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x \operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} \frac{tdt}{n^2+t^2}. \quad (78)$$

En remplaçant x par $1-x$ dans cette équation on voit que la première intégrale au second membre est égale à

¹ Mémoire sur les intégrales définies, Œuvres (1) 1, Paris 1882, p. 458-60.

² Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob-Bernoulli'sche Funktion, J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 348-67.

³ Sur la fonction de Jacob-Bernoulli, id. 79 (1875), p. 339-44; Œuvres 3, Paris 1912, p. 215-21. voir aussi: Lindelöf, Le calcul des résidus p. 71-2.

$$\frac{g(n+x) + g(n+1-x)}{2}$$

et la seconde intégrale est égale à

$$\frac{g(n+x) - g(n+1-x)}{2}$$

dans la bande $0 < \Re(x) < 1$. Si n est un entier positif l'équation (78) peut donc aussi s'écrire comme il suit

$$g(x) = (-1)^n 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x \operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch} 2 \pi t - \cos 2 \pi x} \frac{t dt}{n^2 + t^2} + \frac{\pi}{\sin \pi x} - \sum_{s=1}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{x-s},$$

où l'on suppose que $n < \Re(x) < n+1$. Si l'on fait $f(x) = \log x$ dans l'équation (74) on trouve, en supposant $0 < \Re(x) < 1$,

$$\Psi(x) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi x \operatorname{ch} 2\pi t}{(\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x)^2} \log t dt - \frac{\pi}{2} \cot \pi x.$$

Si $x = \frac{1}{2}$ cette relation se réduit à

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{\log t dt}{(\operatorname{ch} \pi t)^2} = -C - \log 4,$$

C étant la constante d'Euler. De même en posant $\varphi(x) = \frac{1}{x+n}$ dans l'équation (75), n étant un entier positif, on trouve après quelques réductions

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} 2\pi t}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} \right] \frac{t dt}{n^2 + t^2} + \log n - \frac{\pi}{2} \cot \pi x + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=2n} \frac{1}{x-s}.$$

Cette relation est vraie dans la bande $n < \Re(x) < n+1$. On trouve enfin, en posant $\varphi(x) = \log x$ dans l'équation (75):

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\pi x - \operatorname{ch} 2\pi t} \log t dt + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

où $0 < \Re(x) < 1$.

**Développements en séries procédant suivant les différences
successives d'une fonction.**

39. Pour arriver à ces développements nous déduirons d'abord deux lemmes. M. BENDIXSON¹ a démontré que le domaine de convergence de la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s \frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-s)}{1 \cdot 2 \cdots s} \quad (1)$$

est un demi-plan, limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe réel. C'est à dire qu'il existe un nombre réel λ tel que la série converge si $\Re(y) > \lambda$, et diverge si $\Re(y) < \lambda$. La série converge uniformément dans tout domaine fini situé à l'intérieur du domaine de convergence. En tenant compte d'un résultat de M. CAHEN, MM. LANDAU² et PINCHERLE³ ont démontré que l'abscisse de convergence λ se détermine par l'une ou l'autre des deux limites suivantes

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s c_s \right|}{\log n}, \quad \text{si } \lambda \geq 0,$$

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s c_s \right|}{\log n}, \quad \text{si } \lambda < 0.$$

M. PINCHERLE a donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette un développement de la forme (1). Des résultats de M. PINCHERLE⁴ on peut sans peine conclure que:

Lemme 1. Soit $\Omega(x)$ une fonction holomorphe pour $\Re(x) > b$, et supposons qu'on sache trouver deux constantes positives C et k telles qu'on ait, quelque petit que soit le nombre positif ε ,

$$|\Omega(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

¹ Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, Acta math. 9 (1886), p. 1-34.

² Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzgsb. Akad. München 36 (1906), p. 151-218.

³ Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti, Atti del 4. congresso internazionale dei Matematici 2, p. 45 Roma 1909. Voir aussi une Note de M. MITTAG-LEFFLER: Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet, C. R. Acad. sc. Paris 160 (1915) p. 271-3.

⁴ Sur les fonctions déterminantes, Ann. Éc. Norm. (3) 22 (1905), p. 1-68. Sopra un problema d'interpolazione, Rend. Circ. mat. Palermo 14 (1900), p. 142-4. Voir aussi un mémoire de M. CARLSON: Sur les séries de coefficients binomiaux, Nova Acta Soc. sc. Upsal. (4) 4. (1915) n° 3.

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b$. Cette fonction admet un développement de la forme

$$\Omega(x+y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(y-\omega)(y-2\omega)\cdots(y-s\omega)}{s!} \Delta_{\omega}^s \Omega(x+\omega) \quad (2)$$

qui converge, si $\Re(x+y) > b$. Ici ω désigne un nombre positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$. Si la partie réelle de x est plus petite que b on suppose, pour fixer les idées, que la fonction $\Omega(y)$ est holomorphe dans les points $y = x, x + \omega, x + 2\omega, \dots$

Si l'une ou l'autre des deux conditions que nous venons d'imposer à la fonction $\Omega(x)$ cesse d'être satisfaite quand on remplace le nombre b par un nombre¹ plus petit que b , on peut en outre affirmer que la série (2) diverge, si $\Re(x+y) < b$. En diminuant le nombre positif ω on augmente en général le domaine de convergence de la série (2).

Comment se comporte la différence $n^{\text{ième}}$ de $\Omega(x)$ pour les valeurs très grandes de n ? De ce que nous venons de dire relativement à la série (1) il résulte que l'abscisse de convergence de la série (2) est égale à

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\omega^n \Delta_{\omega}^n \Omega(x)|}{\log n}.$$

Cette série converge donc si $\Re\left(\frac{y}{\omega}\right) > \lambda$, et elle diverge si $\Re\left(\frac{y}{\omega}\right) < \lambda$. Mais $\lambda \leq \frac{b-\sigma}{\omega}$, où σ désigne la partie réelle de x . On a donc pour des valeurs suffisamment grandes de n

$$|\omega^n \Delta_{\omega}^n \Omega(x)| < n^{\frac{b-\sigma}{\omega} + \epsilon} \quad (3)$$

Cette inégalité nous sera utile dans un moment.

Lemme 2. J'ai besoin encore d'un autre lemme qui a été donné par EULER.² Soit une série de puissances

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$$

convergente pour $|x| < 1$. Posons

¹ Il peut arriver que $b = -\infty$.

² Institutiones calculi differentialis, Opera mathematica (1) 10, p. 217.

$$x = \frac{z}{1+z},$$

et développons chaque terme suivant les puissances de z . Il vient

$$f(x) = (1+z) \sum_{s=0}^{\infty} a_s \sum_{v=s}^{\infty} (-1)^{v-s} \binom{v}{s} z^v.$$

Cette série converge en particulier si $|z| < \frac{1}{2}$. D'un théorème connu, dû à WEIERSTRASS, il résulte qu'on peut échanger l'ordre des sommations et ranger la série suivant les puissances de z , si $|z| < \frac{1}{2}$. On trouve ainsi

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{(1-x)^{s+1}} \left(a_s - \binom{s}{1} a_{s-1} + \binom{s}{2} a_{s-2} - \dots + (-1)^s a_0 \right),$$

pourvu que $\left| \frac{x}{1-x} \right| < \frac{1}{2}$. La relation est donc en particulier valable si $-1 < x < 0$.

Cette transformation d'Euler a été rigoureusement établie pour la première fois par PONCELET. MM. PRINGSHEIM¹, FABRY et LINDELÖF en ont fait récemment des applications intéressantes.

40. Ces préliminaires posés je vais signaler un développement de la fonction $G(x|\omega)$ qui est fort remarquable et qui nous fournira une nouvelle occasion de démontrer l'existence de la limite

$$\int_{\omega}^{\infty} \varphi(x) \nabla x = \lim_{\varrho \rightarrow 1} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x+s\omega) \varrho^s. \quad (4)$$

Supposons que la série au second membre converge, si le nombre positif ϱ est plus petit que 1. Appliquons la transformation d'Euler à cette série. On trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varrho^s \varphi(x+s\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\varrho^s \omega^s}{(1+\varrho)^{s+1}} \Delta_{\omega}^s \varphi(x). \quad (5)$$

Il résulte du lemme 2 que cette relation est toujours valable si ϱ est positif et plus petit que 1. Faisons tendre ϱ vers 1. Le premier membre tend par hypothèse vers la fonction $\frac{1}{2} G(x|\omega)$. On a donc

¹ Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation. Sitzgsb. Akad. München Jahrg. 1912, p. 11-92.

$$G(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \Delta_{\omega}^s \varphi(x) \tag{6}$$

pourvu que la série au second membre converge. La limite (4) existe donc toujours si cette série converge. On peut indiquer une expression simple du terme complémentaire de la série. En effet, multiplions et divisons la série au premier membre de l'équation (5) par $1 + \rho$. On trouve

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \rho^s \varphi(x + s\omega) = \frac{\varphi(x)}{1 + \rho} - \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \rho^s \omega \Delta_{\omega}^s \varphi(x + s\omega).$$

En répétant cette opération n fois on trouvera

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \rho^s \varphi(x + s\omega) &= \\ &= \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \frac{\rho^s \omega^s}{(1 + \rho)^{s+1}} \Delta_{\omega}^s \varphi(x) + (-1)^n \frac{\rho^n \omega^n}{(1 + \rho)^n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \rho^s \Delta_{\omega}^n \varphi(x + s\omega). \end{aligned}$$

Dans cette identité on suppose que $\rho < 1$. Faisons tendre ρ vers 1. Il vient

$$\int_{\omega}^{\infty} \varphi(x) \nabla_{\omega} x = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \Delta_{\omega}^s \varphi(x) + (-1)^n \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \int_{\omega}^{\infty} \Delta_{\omega}^n \varphi(x) \nabla_{\omega} x.$$

On en conclut en particulier que la limite (4) existe toujours si la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \Delta_{\omega}^n \varphi(x + s\omega)$$

converge pour une valeur convenablement choisie de n c'est à dire en prenant n suffisamment grand. Soit par exemple $\varphi(x) = x^{\nu}$, ν étant un entier plus petit que n . Tous les termes de la série sont nuls. La limite existe donc et l'équation (6) se réduit à

$$E_{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \frac{\Delta^s x^{\nu}}{2^s}.$$

Considérons un autre exemple. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique qui satisfait aux conditions énumérées au commencement du paragraphe 27. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$. Soit x un point quelconque tel que la fonction $\varphi(z)$ soit holomorphe dans les points $z = x, x + \omega, x + 2\omega, \dots$. De l'inégalité (3) il résulte qu'on a

$$\left| \left(\frac{\omega}{2} \right)^n \Delta_{\omega}^n \varphi(x) \right| < \frac{n^{\frac{b-\sigma}{\omega} + \varepsilon}}{2^n}$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n . La série (6) converge donc absolument pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de la fonction $G(x|\omega)$.

41. Considérons maintenant la fonction

$$F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega} x.$$

Admettons que, dans le demi-plan $\Re(x) > b + \varepsilon$, la fonction $\varphi(x)$ soit holomorphe et satisfasse à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < C e^{(k+\varepsilon)|x|} \quad (7)$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε . Soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Dans le paragraphe 29 nous avons démontré que ces conditions entraînent qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|F(x|\omega)| < C_1 e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

pour toute valeur de x dans le demi-plan $\Re(x) > b + \varepsilon$. On sait en outre que $F(x|\omega)$ est holomorphe dans ce demi-plan. Si l'on suppose que ω soit positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$ on peut donc développer la fonction $F(x|\omega)$ à l'aide de la formule d'interpolation de Newton:

$$\Omega(x+y) = \Omega(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y(y-\omega)\cdots(y-(s-1)\omega)}{s!} \Delta_{\omega}^s \Omega(x). \quad (8)$$

En posant

$$\Omega(x) = F(x|\omega)$$

et en remarquant qu'on a

$$\Delta_{\omega} F(x|\omega) = \varphi(x),$$

et par conséquent

$$\Delta_{\omega}^s F(x|\omega) = \Delta_{\omega}^{s-1} \varphi(x),$$

on trouve

$$F(x+y|\omega) = F(x|\omega) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y(y-\omega)(y-2\omega)\cdots(y-s\omega)}{(s+1)!} \Delta_{\omega}^s \varphi(x). \quad (9)$$

Il résulte du lemme 1 que cette série converge pourvu que $\Re(x+y) > b$. Supposons que, dans une petite bande entourant la droite $\Re(x) = b$, la fonction $\varphi(x)$ ou bien admette un point singulier ou bien cesse de satisfaire à une inégalité de la forme (7) quelque grand que soit k . Alors la série diverge si $\Re(x+y) < b$.

Soit en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 1$ on trouve la série bien connue¹:

$$\Psi(x+y) = \Psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s y(y-1)\cdots(y-s)}{s+1} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+s)}.$$

On a ici $b = 0$. La condition de convergence est donc $\Re(x+y) > 0$.

En posant $y = \frac{\omega}{2}$ dans l'équation (9), et en se rappelant qu'on a

$$\Delta_{\omega} F(x|2\omega) = G(x|\omega),$$

on trouve la série:

$$G\left(x\left|\frac{\omega}{2}\right.\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{(s+1)!} \Delta_{\omega}^s \varphi(x) \quad (10)$$

qui converge dans le demi-plan $\Re(x) > b - \frac{\omega}{2}$. En posant $y = -\frac{\omega}{2}$ on trouve de même

$$G\left(x - \frac{\omega}{2}\left|\frac{\omega}{2}\right.\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}{(s+1)!} \Delta_{\omega}^s \varphi(x). \quad (11)$$

Cette série converge dans le demi-plan $\Re(x) > b + \frac{\omega}{2}$. Au sujet de la série (10) on peut noter qu'il arrive qu'il y a, à l'intérieur du domaine de convergence, des points singuliers (essentiels ou non) de la fonction correspondante car en général la fonction $G(x)$ n'est pas holomorphe dans la bande $b > \Re(x) > b - \frac{\omega}{2}$. Ce fait ne se présente pas pour la série (11). Si en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ et $\omega = 2$, ces deux séries se réduisent aux suivantes

¹ Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 83.

$$\int \frac{\nabla x}{x} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s-1)}{x(x+2)(x+4) \dots (x+2s)},$$

$$\int \frac{\nabla x}{x} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s+1)}{(x+1)(x+3) \dots (x+2s+1)}.$$

La première série converge dans le demi-plan $\Re(x) > -1$ et la seconde converge dans le demi-plan $\Re(x) > 0$.

42. Nous avons déjà dit que la série (8) converge uniformément par rapport à y à l'intérieur du domaine de convergence. En dérivant par rapport à y on trouve donc

$$\Omega'(x+y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta_{\omega}^s \Omega(x)}{s!} y(y-\omega) \dots (y-(s-1)\omega) \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-\omega} + \dots + \frac{1}{y-(s-1)\omega} \right]. \quad (12)$$

Cette série va nous donner un nouveau développement de la fonction F . En effet, posons

$$\Omega(x) = \int_a^x F(x|\omega) dx.$$

On a en vertu de l'équation (21) paragraphe 2

$$\Delta_{\omega} \Omega(x) = \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(x|\omega) dx = \int_a^x \varphi(x) dx = f(x)$$

et par conséquent

$$\Delta_{\omega}^{s+1} \Omega(x) = \Delta_{\omega}^s f(x).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (12) on obtiendra

$$F(x+y|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta_{\omega}^s f(x)}{(s+1)!} y(y-\omega) \dots (y-s\omega) \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-\omega} + \dots + \frac{1}{y-s\omega} \right]. \quad (13)$$

Du lemme 1 on conclut que cette série converge, pourvu que $\Re(x+y) > b$, et qu'elle représente la solution principale F . Soit en particulier $y=0$ on aura

$$F(x|\omega) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \omega^s \Delta_{\omega}^s f(x). \quad (14)$$

Le domaine de convergence de cette série est donc le demi-plan $\Re(x) > b$, et elle converge absolument pour ces valeurs de x . On suppose toujours que $0 < \omega < \frac{\log 2}{k}$. Si $k = 0$ la série converge pour toute valeur positive de ω .

On peut vérifier à l'aide de cette série que la différence de $F(x|\omega)$ est égale à $\varphi(x)$ car en appliquant l'opération Δ_ω à la série on trouve

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \omega^{s-1} \Delta_\omega^s f(x).$$

Mais cette série représente la dérivée de $f(x)$ c'est à dire $\varphi(x)$. C'est ce qu'on voit en posant $y = 0$ dans l'équation (12).

En faisant $y = -\omega$ dans l'équation (13) on trouve cet autre développement

$$F(x - \omega | \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \omega^s \Delta_\omega^s f(x) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s+1} \right),$$

qui converge, si $\Re(x) > b + \omega$.

Si la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions du paragraphe 33 ces séries convergent encore pour des valeurs complexes de ω pourvu que la valeur absolue de ω soit suffisamment petite. Par exemple, si ω est négatif, la série (14) convergera dans le demi-plan $\Re(x) < \bar{b}$.

43. Je fais remarquer qu'il y a une différence notable entre les conditions de convergence des séries que nous venons de considérer et celles de la série (6)

$$G(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \Delta_\omega^s \varphi(x). \quad (6)$$

La dernière série converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le font les autres séries. Nous l'avons déjà constaté en partie. Nous avons établi l'équation (6) par une méthode directe et très simple, mais nous avons dû supposer que la série au premier membre de l'équation (5) converge, si $|\varrho| < 1$. D'autre part nous avons établi l'équation (14), par exemple, sans faire cette hypothèse. Il y a donc lieu de se demander si l'équation (6) reste vraie dans les mêmes cas que l'équation (14). Il en est bien ainsi mais la démonstration que j'en peux donner est indirecte et un peu détournée.

Supposons que $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions du paragraphe 41. Nous avons démontré qu'on a

$$G(x|\omega) = i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(x+\omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \quad (15)$$

Soit $0 < \omega < \frac{\log 2}{k}$. La fonction $\varphi(x)$ admet, en vertu du lemme 1, un développement de la forme

$$\varphi(x+\omega z) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z(z-1)\cdots(z-s+1)}{s!} \omega^s \Delta_{\omega}^s \varphi(x).$$

Substituons ce développement dans l'intégrale (15) et supposons pour un moment que $\varphi(x)$ soit un polynôme quelconque. La série s'arrête après un nombre fini de termes; on peut donc intégrer terme par terme. Mais l'équation (6) est déjà établie dans le cas actuel. En comparant les deux expressions de la fonction G on constate que

$$i \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z(z-1)\cdots(z-s+1) \frac{dz}{\sin \pi z} = (-1)^s \frac{s!}{2^s}.$$

Cela posé revenons au cas général et intégrons de nouveau terme par terme. On retrouve l'équation (6). Pour justifier l'intégration terme par terme il suffit de démontrer que l'intégrale

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n! \sin \pi z} \omega^n \Delta_{\omega}^n \varphi(x) \right| |dz| \quad (16)$$

converge. Posons $x = \sigma + i\tau$, $z = -\frac{1}{2} + it$. On a, en vertu de l'inégalité (3),

$$|\omega^n \Delta_{\omega}^n \varphi(x)| < n \frac{b-a}{\omega} + \varepsilon. \quad (17)$$

D'autre part en remarquant que

$$\frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n! \sin \pi z} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n-z) \Gamma(1+z)}{\Gamma(n+1)}$$

et en tenant compte de la valeur asymptotique de la fonction gamma on voit qu'on peut trouver une constante C telle que

$$\left| \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n! \sin \pi z} \right| < CV n^{-\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)} |t|$$

pour $n \geq 1$ et pour toute valeur réelle de t . De ces deux inégalités il résulte que l'intégrale (16) converge si $\sigma > b + \frac{3}{2}\omega$. L'équation (6) est ainsi établie si la partie réelle de x est suffisamment grande. Mais de l'inégalité (17) résulte que la série converge uniformément dans tout domaine fini qui ne renferme pas de point singulier de la fonction $G(x|\omega)$. L'équation (6) est par conséquent vraie pour toute valeur non singulière de x .

Table des matières.

	Pages
1. Introduction	71
Première partie. Variables réelles.	
2. Propriétés générales des solutions principales	81
3. La formule sommatoire de Boole	87
4. Une règle de convergence	91
5. Démonstration de l'existence de la fonction $G(x \omega)$	93
6. La formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin	98
7. Comparaison d'une série et d'une intégrale	102
8. Extension d'un théorème de Cauchy	105
9. Démonstration de l'existence de la fonction $F(x \omega)$	108
10. Les polynomes de Bernoulli	113
11. Valeurs asymptotiques des solutions principales quand x augmente indéfiniment	115
12. Valeurs asymptotiques quand ω tend vers zéro	119
13. Les dérivées de la fonction $F(x \omega)$	120
14. Les dérivées de la fonction $G(x \omega)$	122
15. La fonction gamma et quelques fonctions qui s'y rattachent	125
16—19. Les termes complémentaires des séries asymptotiques	133
20. Séries trigonométriques	143
21. Nouvelles expressions des coefficients de Fourier	145
22. Généralisation d'une formule donnée par Kummer	149
23—24. Application aux polynomes de Bernoulli et d'Euler	152
25. Nouveaux développements en séries	156
Deuxième partie. Variables complexes.	
26. Application de l'intégrale de Cauchy	158
27. Fonctions holomorphes dans un demi-plan	162
28. Exemples particuliers	165
29. Inégalités qui caractérisent les solutions principales	169
30. Séries trigonométriques	173
31. Séries qui convergent dans un demi-plan	175
32. Fonctions entières	176
33. Fonctions uniformes; prolongement analytique des solutions	178
34. La fonction périodique qui appartient à $G(x \omega)$	180
35. Prolongement analytique de la fonction $F(x \omega)$	184
36. La fonction périodique qui appartient à $F(x \omega)$	188
37. Les séries asymptotiques	192
38. Intégrales définies	198
39. Lemme sur les séries de facultés	202
40—43. Développements en séries procédant suivant les différences successives d'une fonction	204

