SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE À NOYAU ANALYTIQUE.

PAR

IVAR FREDHOLM

à STOCKHOLM.

Le nombre des équations intégrales dont on peut donner une solution effective étant encore assez restreint, je me suis demandé s'il n'est pas possible d'élargir nos connaissances dans cette direction.

L'équation intégrale que j'ai choisie correspond au problème de DIRICHLET dans le plan, dans des conditions qui seront développées dans la suite.

Quoique mes études soient encore assez incomplètes elles m'ont conduit à un résultat qui parait présenter quelque intérêt, c'est-à-dire une classe assez étendue de fonctions uniformes qui restent inaltérées par un groupe de transformations algébriques.

---

§ 1. Exposé du problème. Calcul des noyaux itérés.

Le problème de NEUMANN pour un domaine D limité par la courbe C se traduit comme il est bien connu[1] par une équation intégrale linéaire

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \psi(t), \tag{1}$$

où

$$f(t,s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$$

et la variable complexe $x(s) + i y(s)$ parcourt la courbe C quand s varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

[1] FREDHOLM, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfv. af K. V. A:s förh. 1900.

En appliquant à l'équation (I) soit la méthode de NEUMANN soit la méthode de FREDHOLM il parait que l'on rencontre des complications très grandes, la solution dans chaque cas se présentant sous la forme de séries, dont les termes sont des intégrales multiples d'un ordre croissant infiniment.

En vue de cela il m'a paru intéressant de chercher, au moins dans quelque cas pas trop particulier, si la complication n'est plutôt apparente que réelle.

Afin de me trouver dans des circonstances simples je pars d'une fonction rationnelle $\Phi(s)$ de degré n. Alors il est clair que je puis partager le plan des s en n domaines ayant la propriété que la fonction $\Phi(s)$ prend chaque valeur une et une seule fois dans chaque domaine. J'appelle ces domaines des domaines élémentaires.

Je suppose maintenant que le demi-plan supérieur des s se trouve à l'intérieur d'un des domaines élémentaires et de plus que la fonction $\Phi(s)$ ne devienne pas infinie dans ce demi-plan. En partant d'une fonction rationnelle quelconque on peut toujours par un changement linéaire de la variable s obtenir que les hypothèses soient vérifiées.

Nous allons maintenant nous occuper du calcul des noyaux itérés de l'équation (I). Pour ce but je pose

$$x(s) + i\,y(s) = \Phi(s),$$

$$x(s) - i\,y(s) = \bar{\Phi}(s).$$

Parce que $f(t,s)$ est le coefficient de i dans

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\log\,(\Phi(s) - \Phi(t))$$

on a

$$f(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)-\Phi(t)} - \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}(s)-\bar{\Phi}(t)}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\log\, g(t,s)$$

$$g(t,s) = \frac{\Phi(s)-\Phi(t)}{\bar{\Phi}(s)-\bar{\Phi}(t)}$$

et ainsi $f(t,s)$ est une fonction rationnelle de s et t.

Pour étudier les pôles de $f(t,s)$ posons

$$\Phi(t) = \frac{g(t)}{h(t)}.$$

Alors on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s} \log (\Phi(s) - \Phi(t)) = \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{h(t)g(s) - h(s)g(t)}{h(s)h(t)} =$$

$$= \frac{h(t)g'(s) - h'(s)g(t)}{h(t)g(s) - h(s)g(t)} - \frac{h'(s)}{h(s)},$$

d'où l'on voit que pour un t donné les valeurs qui rendent cette fonction infinie sont les valeurs de s satisfaisant aux équations

$$\Phi(s) = \Phi(t),$$
$$h(s) = 0.$$

Appelons ces racines

$$t_0 = t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

et

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}.$$

Les pôles de la fonction

$$\frac{\partial}{\partial s} \log (\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t))$$

sont

$$\bar{t}_0 = t, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}$$

et

$$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1},$$

où nous avons indiqué la quantité conjuguée par un trait.

Observons que parmi ces quantités $s = t$ n'est pas un pôle de $f(t, s)$ et que les t_ν $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ et a_ν ont des parties imaginaires négatives.

Quant aux valeurs infinies il est facile de voir que $f(t, s)$ pour $s = \infty$ a un zéro d'ordre deux.

Cela posé, on voit que

$$f_2(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) f(x, s)\, dx$$

se calcule simplement en prenant la somme des résidus correspondants aux pôles dont les parties imaginaires soient positives.

D'après ce qui vient d'être dit les pôles sont, pour $f(t, x)$

$$x = \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n-1}$$

$$x = \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$$

et pour $f(x, s)$ les racines de l'équation

$$\bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}(s),$$

que nous appelons

$$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-1}.$$

Parce que l'on a

$$\lim_{x=\bar{t}_\nu} (x - \bar{t}_\nu)\, 2\pi i f(t, x) = -\lim_{x=\bar{t}_\nu} (x - \bar{t}_\nu) \frac{\bar{\Phi}'(x)}{\bar{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(t)} = -1,$$

$$\lim_{x=\bar{a}_\nu} (x - \bar{a}_\nu)\, 2\pi i f(t, x) = -\lim_{x=\bar{a}_\nu} (x - \bar{a}_\nu) \frac{\bar{\Phi}'(x)}{\bar{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(t)} = +1$$

on voit que la somme des résidus correspondants aux infinis de $f(t, x)$ est

$$-\sum_{\nu=1}^{n-1} f(\bar{t}_\nu, s) + \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\bar{a}_\nu, s).$$

Parce que de plus

$$\lim_{x=\bar{s}_\nu} (x - \bar{s}_\nu)\, 2\pi i f(x, s) = -\lim (x - \bar{s}_\nu) \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(x)} = \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}$$

on trouve pour la somme des résidus correspondants aux infinis de $f(x, s)$ l'expression

$$\bar{\Phi}'(s) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f(t, \bar{s}_\nu)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}.$$

Ainsi on a d'abord

$$2\pi i f_2(t, s) = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s) - \Phi(\bar{t}_\nu)} - \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)} \right] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{\Phi'(\bar{s}_\nu)}{\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)} - \frac{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)}{\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t)} \right] \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s) - \Phi(\bar{a}_\nu)}$$

ce qui s'écrit après une réduction simple

$$2\pi i f_2(t,s) = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)-\Phi(\bar{t}_\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Phi'(\bar{s}_\nu)}{\Phi(\bar{s}_\nu)-\Phi(t)} \frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)-\Phi(\bar{a}_\nu)}.$$

Observant maintenant que

$$\bar{\Phi}(\bar{s}_\nu) = \bar{\Phi}(s),$$

on trouve

$$\frac{\bar{\Phi}'(s)}{\bar{\Phi}'(\bar{s}_\nu)} = \frac{d\bar{s}_\nu}{ds}$$

et par conséquent

$$(2) \qquad 2\pi i f_2(t,s) = -\frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(s) - \Phi(\bar{t}_\nu)) + \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)) +$$

$$+ \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=0}^{n-1} (\Phi(s) - \Phi(\bar{a}_\nu)).$$

Pour transformer cette expression dans une forme plus commode pour la suite je considère les racines $u = \bar{t}_\nu$ de l'équation

$$\bar{\Phi}(u) = \bar{\Phi}(t)$$

et parce qu'elles sont fonctions de t, je les désigne par

$$\bar{\psi}_0(t) = t, \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), \ldots, \bar{\psi}_{n-1}(t).$$

Il s'ensuit que les racines $u = t_\nu$ de l'équation

$$\Phi(u) = \Phi(t)$$

sont

$$\psi_0(t) = t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_{n-1}(t),$$

$\bar{\psi}_\nu$ étant la fonction conjuguée de ψ_ν.

Cela posé, considérons le produit

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{t}_\nu) - \Phi(s)),$$

qui évidemment est une fonction rationnelle de s. Ses zéros doivent d'après nos conventions être désignés par

$$\psi_0(\bar{t}_\nu), \psi_1(\bar{t}_\nu), \ldots, \psi_{n-1}(\bar{t}_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

ou bien aussi par la formule

$$\psi_i(\bar{\psi}_k(t)) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ k = \quad\; 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles de notre produit sont $a_0, \ldots, a_n$ chacun comptant $(n-1)$ fois. Ainsi on a

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{t}_\nu) - \Phi(s)) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1} (s - \psi_i(\bar{\psi}_k(t))}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (s - a_\nu)^{n-1}} F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction qui ne dépend pas de s.

Traitons de la même manière le produit

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)).$$

Ses zéros s'obtiennent en cherchant les valeurs de $\bar{s}_\nu$ satisfaisant à l'équation

$$\Phi(\bar{s}_\nu) = \Phi(t).$$

Or cela nous donne d'abord

$$\bar{s}_\nu = \psi_k(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Parce que $u = \bar{s}_\nu$ est une racine de l'équation

$$\bar{\Phi}(u) = \bar{\Phi}(s)$$

j'obtiens pour les racines en s de notre produit

$$s = \bar{\psi}_i(\psi_k(t)) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i = \quad\; 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles sont les valeurs $\bar{s}_\nu$ de s pour lesquelles

$$\Phi(\bar{s}_\nu) = \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

c'est-à-dire

$$\bar{s}_\nu = a_k \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

d'où il s'ensuit que les pôles cherchés sont donnés par la formule

$$\bar{\psi}_i(a_k) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n-1 \\ i = 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on peut poser

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (\Phi(\bar{s}_\nu) - \Phi(t)) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \bar{\psi}_i(\psi_k(t)))}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \bar{\psi}_i(a_k))} G(t),$$

où $G(t)$ ne dépend pas de s.

Enfin, pour le produit

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (\Phi(s) - \Phi(\bar{a}_\nu))$$

nous obtenons par des considérations analogues l'expression

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \psi_i(\bar{a}_k))}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (s - a_\nu)_n} H(t).$$

En introduisant ces expressions dans la formule (2) on obtient

$$(3) \qquad 2\pi i f_2(t, s) = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \bar{\psi}_k t} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \psi_k t} \right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i(\bar{a}_k)} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i(a_k)} \right).$$

Pour contrôler cette expression j'observe que l'on a pour t réel

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t, s)\, ds = 1,$$

m étant quelconque.

En appliquant cela au noyau f_2 il s'agit d'abord de connaître les pôles de f_2 dont la partie imaginaire soit positive.

Or nous savons que si t est réel ou positivement imaginaire $\psi_i(t)$ est négativement imaginaire; au contraire si t est réel ou négativement imaginaire $\bar{\psi}_i(t)$ est positivement imaginaire. Cela posé, il est clair que les pôles de $f_2(t, s)$ qui se trouvent dans le demi-plan positif des s, sont

$$\begin{array}{ll} \bar{\psi}_i \psi_k t & (i, k = 1, \ldots, n-1) \\ \bar{a}_k & (k = 0, 1, \ldots, n-1) \\ \bar{\psi}_i(a_k) & \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Les nombres de ces pôles étant $(n-1)^2$, n, $n(n-1)$ respectivement on obtient en tenant compte des signes des fractions simples dans (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t, s)\, ds = (n-1)^2 - n(n-1) + n = 1.$$

Il convient maintenant de mettre $f(t, s)$ sous une forme analogue à la formule (3). Parce que nous avons

$$2\pi i f(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} [\log(\Phi(s) - \Phi(t)) - \log(\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t))]$$

et parce que

$$\Phi(s) - \Phi(t) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (s - \psi_i(t))}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - a_k)} \cdot F(t),$$

$$\bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(t) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (s - \bar{\psi}_i(t))}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (s - \bar{a}_k)} \cdot \bar{F}(t)$$

il vient

$$2\pi i f(t,s) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i t} - \frac{1}{s-\overline{\psi}_i t}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k} - \frac{1}{s-\overline{a}_k}\right). \tag{5}$$

La comparaison des expressions de f_2 et f porte à croire que $f_r(t,s)$ pourra être exprimé par une formule de la forme

$$2\pi i f_r(t,s) = \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)}\left(\frac{1}{s-\xi_r t} - \frac{1}{s-\overline{\xi}_r t}\right) + \sum_{(\alpha_r)}\left(\frac{1}{s-\alpha_r} - \frac{1}{s-\overline{\alpha}_r}\right) - \sum_{(\beta_r)}\left(\frac{1}{s-\beta_r} - \frac{1}{s-\overline{\beta}_r}\right), \tag{6}$$

où $(\xi_r t)$ représente la totalité des pôles dont la partie imaginaire soit positive et qui dépendent de t, (α_r) et (β_r) désignent les autres pôles. Je les ai ordonnés dans deux groupes suivant que la fraction simple correspondant est positive ou négative. Les traits signifient que α et $\overline{\alpha}$ sont conjugués, et ε_r est $+1$ ou -1. Cela posé, considérons la formule

$$f_{r+1}(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t,x) f(x,s)\,dx$$

sous l'hypothèse que $f_r(t,x)$ soit donné par la formule (6). Dans ce cas nous pouvons exécuter l'intégration comme plus haut en prenant la somme des résidus de la fonction rationnelle $f_r(t,x)f(x,s)$ pour les infinis qui se trouvent dans le demi-plan supérieur des x. En tenant compte des pôles de f_r on obtient ainsi la somme de résidus

$$\varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} f(\xi_r t, s) + \sum_{(\alpha_r)} f(\alpha_r, s) - \sum_{(\beta_r)} f(\beta_r, s)$$

et pour les pôles de $f(x,s)$ la somme

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} f_r(t, \overline{s}_\nu)\frac{d\overline{s}_\nu}{ds}.$$

Ainsi

$$(7)\qquad f_{r+1}(t,s)=\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}f(\xi_r t,s)+\sum_{(\alpha_r)}f(\alpha_r,s)-\sum_{(\beta_r)}f(\beta_r,s)+\sum_{\nu=1}^{n-1}f_r(t,\bar{s}_\nu)\frac{d\bar{s}_\nu}{ds}.$$

Considérons d'abord les trois premières sommes dans le second membre de cette équation.

Si nous employons pour $f(t,s)$ la formule (5) nous obtenons

$$2\pi i\,\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}f(\xi_r t,s)=\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\xi_r t}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\xi_r t}\right)$$

$$-\varepsilon_r M_r\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k}-\frac{1}{s-\bar{a}_k}\right),$$

$$2\pi i\sum_{(\alpha_r)}f(\alpha_r,s)=\sum_{(\alpha_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\alpha_r}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\alpha_r}\right)$$

$$-N_r\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k}-\frac{1}{s-\bar{a}_k}\right),$$

$$-2\pi i\sum_{(\beta_r)}f(\beta_r,s)=-\sum_{(\beta_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\beta_r}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\beta_r}\right)$$

$$+P_r\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k}-\frac{1}{s-\bar{a}_k}\right),$$

où M_r, N_r, P_r désignent les nombres des ξ_r, α_r, β_r respectivement. A cause de la relation (4) on a cependant

$$\varepsilon_r M_r+N_r-P_r=1$$

et à cause de cela on obtient

$$2\pi i\left(\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}f(\xi_r t,s)+\sum_{(\alpha_r)}f(\alpha_r,s)-\sum_{(\beta_r)}f(\beta_r,s)\right)=$$

$$(8)\qquad =\varepsilon_r\sum_{(\xi_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\xi_r t}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\xi_r t}\right)+\sum_{(\alpha_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\alpha_r}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\alpha_r}\right)-$$

$$-\sum_{(\beta_r)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{s-\psi_i\beta_r}-\frac{1}{s-\bar{\psi}_i\beta_r}\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s-a_k}-\frac{1}{s-\bar{a}_k}\right),$$

Pour transformer la dernière somme dans (7) nous considérons d'abord l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{s}_\nu - \lambda} \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} = \frac{d}{ds} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} (\bar{s}_\nu - \lambda).$$

Comme le produit dans le second membre est une fonction symétrique des racines de l'équation en u

$$\frac{\bar{\Phi}(u) - \bar{\Phi}(s)}{u - s} = 0,$$

le produit est une fonction rationnelle en s. Les zéros de cette fonction sont les valeurs de s qui rendent $\bar{s}_\nu = \lambda$ c'est-à-dire

$$s = \bar{\psi}_i \lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Les infinis sont les valeurs de s pour lesquelles $\bar{s}_\nu = \infty$ c'est-à-dire

$$s = \bar{\psi}_i(\infty) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\bar{s}_\nu - \lambda} \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} = \frac{d}{ds} \log \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(s - \bar{\psi}_i \lambda)}{(s - \bar{\psi}_i(\infty))} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \lambda} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i(\infty)} \right).$$

Appliquant ce résultat à la quatrième somme de la formule (7) et en observant que les pôles de la forme $\psi_i(\infty)$ se détruisent on obtient

$$(9) \quad 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n-1} f_r(t, \bar{s}_\nu) \frac{d\bar{s}_\nu}{ds} =$$

$$= \varepsilon_r \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\xi_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \xi_r t} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \bar{\xi}_r t} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\alpha_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \alpha_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \bar{\alpha}_r} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\beta_r)} \left(\frac{1}{s - \bar{\psi}_i \beta_r} - \frac{1}{s - \bar{\psi}_i \bar{\beta}_r} \right).$$

En réunissant cette expression à (8) on trouve en ayant égard aux sommes qui se détruisent

$$(\text{10}) \qquad 2\pi i f_{r+1}(t,s) = \varepsilon_r \sum_{(\xi_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \xi_r t} - \frac{1}{s - \overline{\psi}_i \overline{\xi}_r t} \right)$$

$$+ \sum_{(\alpha_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \alpha_r} - \frac{1}{s - \overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r} \right) - \sum_{(\beta_r)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{s - \psi_i \beta_r} - \frac{1}{s - \overline{\psi}_i \overline{\beta}_r} \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s - a_k} - \frac{1}{s - \overline{a}_k} \right).$$

En se rappelant maintenant que les $\xi_r t, \alpha_r, \beta_r$ ont des parties imaginaires positives on voit que les infinis à parties imaginaires positives de $f_{r+1}(t,s)$ sont

$$\begin{array}{ll} \overline{\psi}_i \overline{\xi}_r & \\ & (i = 1, \ldots, n-1) \\ \overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r,\ \overline{\psi}_i \overline{\beta}_r & \\ \overline{a}_k & (k = 0, \ldots, n-1). \end{array}$$

Il est ainsi facile de voir que le groupe des $\xi_{r+1} t$ est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\xi}_r t$, le groupe des α_{r+1} est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\beta}_r$ augmentée des quantités $\overline{a}_k$ et enfin le groupe β_{r+1} est la totalité des quantités $\overline{\psi}_i \overline{\alpha}_r$. Enfin si

$$\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$$

on voit que la forme supposée de $f_r(t,s)$ est correcte si

$$\varepsilon_r = (-1)^r.$$

Quant aux nombres M_r, N_r et P_r on voit que

$$M_{r+1} = (n-1) M_r,$$

$$N_{r+1} = (n-1) P_r + n,$$

$$P_{r+1} = (n-1) N_r.$$

Parce que l'on a $M_1 = n - 1$, $N_1 = n$, $P_1 = 0$ il s'ensuit que

$$M_r = (n-1)^r,$$

$$N_r - P_r = 1 - (-1)^r (n-1)^r.$$

On a ainsi

$$\varepsilon_r M_r + N_r - P_r = (-1)^r (n-1)^r + 1 - (-1)^r (n-1)^r = 1$$

ce qui peut servir de contrôle.

En comparant maintenant les formules (6) et (10), on trouve d'abord que le groupe des points $\xi_r t$ est la totalité des points qu'on obtient du point t en y appliquant r transformations ψ de sorte que l'on peut écrire

$$(\xi_r t) = (\overline{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \overline{\psi}_{i_3} \ldots \psi_{i_r} t), \text{ si } r \text{ est pair,}$$

$$(\xi_r t) = (\overline{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \overline{\psi}_{i_3} \ldots \overline{\psi}_{i_r} t), \text{ si } r \text{ est impair,}$$

les indices i_ν parcourant tous la suite $1, 2, \ldots, n-1$.

Le nombre de ces points ainsi, comme nous l'avons déjà trouvé, est égal à $(n-1)^r$.

Pour les groupes (α), (β), $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$ on obtient d'abord en comparant les formules (6) et (10) les formules de récursion

$$(\alpha_{r+1}) = (\overline{\psi}_i \bar{\beta}_r) + (\bar{a}_k)$$

qui signifie que le groupe des α_{r+1} s'obtient en appliquant à chacun des points $\bar{\beta}_r$ chacune des transformations $\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$ et en y ajoutant les n pôles $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$.

Pour les autres groupes on obtient facilement des formules de récursion analogues que je réunis avec la formule trouvée tout à l'heure,

$$(\alpha_{r+1}) = (\overline{\psi}_i \bar{\beta}_r) + (\bar{a}_k),$$

$$(\beta_{r+1}) = (\overline{\psi}_i \bar{\alpha}_r),$$

$$(\bar{\alpha}_{r+1}) = (\psi_i \beta_r) + (a_k),$$

$$(\bar{\beta}_{r+1}) = (\psi_i \alpha_r).$$

En appliquant ces formules et en tenant compte des groupes déjà connus on trouve les expressions explicites des groupes (α), (β):

pour r nombre pair

$$(\alpha_r) = \bar{a} + (\xi_1 \bar{a}) + \cdots + (\xi_{r-1} \bar{a}),$$

$$(\bar{\alpha}_r) = a + (\bar{\xi}_1 a) + \cdots + (\bar{\xi}_{r-1} a),$$

$$(\beta_r) = \quad (\xi_1 a) + \cdots + (\xi_r a),$$

$$(\bar{\beta}_r) = \quad (\bar{\xi}_1 \bar{a}) + \cdots + (\bar{\xi}_r \bar{a}).$$

Pour r impair on trouve

$$(\alpha_r) = \bar{a} + (\xi_1 \bar{a}) + \cdots + (\xi_r \bar{a}),$$

$$(\bar{\alpha}_r) = a + (\bar{\xi}_1 a) + \cdots + (\bar{\xi}_r a),$$

$$(\beta_r) = \quad (\xi_1 a) + \cdots + (\xi_{r-1} a),$$

$$(\bar{\beta}_r) = \quad (\bar{\xi}_1 \bar{a}) + \cdots + (\bar{\xi}_{r-1} \bar{a}),$$

où j'ai désigné par a celui des pôles de la fonction $\Phi(s)$ qui se trouve dans le domaine élémentaire contenant l'axe réelle dans son intérieur.

$\bar{a}$ est la quantité conjuguée de a.

Pour abréger je vais appeler le point qui s'obtient en appliquant r transformations ψ, $\bar{\psi}$ à un point quelconque α l'image d'ordre r de α.

Des développements qui précèdent il s'ensuit que les noyaux itérés sont des fonctions rationnelles.

Pour en avoir une expression commode introduisons les notations abrégées

$$\Omega_\nu(t, s) = \sum_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{1}{s - \psi_{i_1} \bar{\psi}_{i_2} \psi_{i_3} \ldots (t)}$$

et

$$\bar{\Omega}_\nu(t, s) = \sum_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{1}{s - \bar{\psi}_{i_1} \psi_{i_2} \bar{\psi}_{i_3} \ldots (t)},$$

où $i, \ldots i_\nu$ prennent indépendamment les valeurs $1, \ldots, n-1$. Alors on peut écrire si r est un nombre pair

$$(11) \qquad 2\pi i f_r(t, s) = \bar{\Omega}_r(t, s) - \Omega_r(t, s)$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} [\bar{\Omega}_\nu(\bar{a}, s) - \Omega_\nu(a, s)] - \sum_{\nu=1}^{r} [\bar{\Omega}_\nu(a, s) - \Omega_\nu(\bar{a}, s)]$$

et si r est un nombre impair

$$(12)\qquad 2\pi i f_r(t,s) = -\bar{\Omega}_r(t,s) + \Omega_r(t,s) + \sum_{\nu=0}^{r}[\bar{\Omega}_\nu(\bar{a},s) - \Omega_\nu(a,s)] - \sum_{\nu=1}^{r-1}[\bar{\Omega}_\nu(a,s) - \Omega_\nu(\bar{a},s)].$$

Par rapport à la formule pour le noyau $f_r(t,s)$

$$(13)\qquad f_r(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x_1)f(x_1,x_2)\ldots f(x_{r-1},s)\,dx_1\ldots dx_{r-1}$$

il est important de savoir dans quelles conditions il est permis de donner des valeurs complexes aux variables t et s jusqu'ici supposées réelles.

Pour répondre à cette question on doit se rendre compte des pôles que nous avons rencontrés en exécutant successivement les intégrations dans la formule précédente et qui sont les images successives des points t et s. Or si nous considérons la partie commune F des domaines élémentaires des fonctions $\Phi(s)$ et $\bar{\Phi}(s)$ qui contiennent l'axe des s réelles nous voyons facilement que si s est un point dans F, toutes les images de s se trouvent en dehors de F. Ainsi nous pouvons faire varier t et s dans le domaine F sans que l'expression (13) cesse de représenter la même fonction analytique. On voit aussi qu'il existe dans ces conditions une limite supérieure finie pour $f(t,x)$ et $f(x,s)$ pourvu qu'on exclue du domaine de s un voisinage des pôles a et $\bar{a}$ et x est une quantité réelle. Ainsi l'expression du noyau résolvant est valable quand t et s se trouvent dans le domaine F.

Le problème électrostatique.

Appelant σ la longueur de l'arc de la courbe C, $\varepsilon(\sigma)$ la densité de l'électricité en équilibre sur C nous aurons

$$\varepsilon(\sigma)\,d\sigma = \omega(s)\,ds,$$

où $\omega(s)$ est la solution de l'équation intégrale homogène

$$\omega(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)\,\omega(t)\,dt = 0.$$

La fonction $\omega(s)$ peut être déterminée par l'équation

$$\omega(s) = \lim_{r=\infty} f_r(t, s).$$

Pour déterminer le potentiel de l'électricité en équilibre soit $\zeta = \xi + i\eta = \Phi(s)$ un point sur la courbe C et $z = x + iy$ un point à l'extérieur de C le potentiel cherché V est déterminé par la formule

$$V = \int_C \log r\, \varepsilon(\sigma)\, d\sigma,$$

où r est la distance des points ζ et z. Je puis aussi écrire

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \log r\, \omega(s)\, ds.$$

Mais puisque $\log r$ est la partie réelle de $\log(z - \zeta) = \log(z - \Phi(s))$ on peut aussi écrire

$$V = R\int_{-\infty}^{+\infty} \log(z - \Phi(s))\, \omega(s)\, ds,$$

où R désigne qu'il faut prendre la partie réelle de l'intégrale.

Pour les calculs suivants il vaut mieux considérer l'intégrale

$$K(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(s)\, ds}{z - \Phi(s)}, \tag{14}$$

dont les parties réelle et imaginaire nous donnent les dérivées premières de V.

Pour des points z extérieurs à la courbe C $K(z)$ est une fonction analytique, tandis que pour des points intérieurs on a $K(z) = 0$.

Pour avoir le prolongement analytique de $K(z)$ à l'intérieur de C il ne faut que changer le chemin d'intégration d'une manière convenable afin d'éviter le point singulier s_0 dans le demi-plan supérieur des s qui satisfait à l'équation

$$\Phi(s_0) = z.$$

On obtient ainsi la relation

$$2\pi i \frac{\omega(s_0)}{\Phi'(s_0)} = K(z),$$

d'où l'on voit qu'il ne faut aucune intégration pour avoir $K(z)$ si on connait $\omega(s)$. On peut aussi écrire la relation entre $K(z)$ et $\omega(s)$

$$2\pi i\, \omega(s)\, ds = K(z)\, dz,$$

où $z = \Phi(s)$. Cette équation n'est du reste que la relation connue de la théorie du potentiel entre la dérivée normale et la densité de l'électricité.

Pour avoir une expression analytique de $K(z)$ j'en calcule d'abord une expression approchée $K_r(z)$ introduisant dans la formule (14) au lieu de $\omega(s)$ $f_r(t, s)$.

Alors j'obtiens si r est un nombre pair

$$K_r(z) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{(\xi_\nu)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{(\xi_\nu)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)}$$

$$+ \sum_{(\xi_r)} \frac{1}{z - \Phi(\xi_r t)}.$$

Si on donne à t la valeur $\bar{a}$ nous pouvons écrire

$$K_r(z) = \frac{1}{z - \Phi(\bar{a})} + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{(\xi_\nu)} \left(\frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)} \right)$$

et en faisant $r = \infty$

$$K(z) = \frac{1}{z - \Phi(\bar{a})} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{(\xi_\nu)} \left(\frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu \bar{a})} - \frac{1}{z - \Phi(\xi_\nu a)} \right).$$

Posant

$$K(z) = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

on sait que $F(z)$ nous donne la représentation conforme de l'extérieur du domaine D sur un cercle. La fonction $F(\Phi(z))$ jouit d'une propriété intéressante qu'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Partons d'une fonction $F(\Phi)$ qui nous donne la représentation conforme de l'extérieur du domaine D sur le demi-plan inférieur.

Puisque $\Phi(z)$ parcourt la frontière de D quand z décrit l'axe réel, il est clair que $f(z) = F(\Phi(z))$ parcourt l'axe réel quand z parcourt les valeurs réelles. Du principe de SCHWARZ il s'ensuit alors que si z et $\bar{z}$ sont des imaginaires conjuguées, $f(z)$ et $f(\bar{z})$ sont aussi des quantités conjuguées.

En se rappelant maintenant que $\Phi(z)$ prend chaque valeur une fois et une seule à l'extérieur du domaine D, si z parcourt en partie E'_0 du domaine élémentaire E_0 qui se trouve dans le demi-plan inférieur, on conclut que $f(z)$ prend toute valeur négativement imaginaire une et une seule fois, dans E'_0. A cause de la propriété de symétrie de $f(z)$ on voit dès lors que la réunion F de E'_0 et de son symétrique $\bar{E}'_0$ par rapport à l'axe réel constitue un domaine élémentaire pour la fonction $f(z)$.

On a par définition

$$\Phi(\psi_\nu(z)) = \Phi(z)$$

et par suite

$$F(\Phi(\psi_\nu(z))) = F(\Phi(z))$$

ou encore

$$f(\psi_\nu(z)) = f(z).$$

En changeant ψ_ν en $\bar{\psi}_\nu$ et z en $\bar{z}$, on aura aussi

$$f(\bar{\psi}_\nu(\bar{z})) = f(\bar{z})$$

ou bien puisque $\bar{z}$ est une quantité arbitraire

$$f(\bar{\psi}_\nu(z)) = f(z).$$

La fonction reste donc invariable pour les transformations ψ_ν et $\bar{\psi}_\nu$ ce qui permet de la prolonger analytiquement en dehors du domaine F.

Mais il est aussi facile de voir que $f(z)$ est une fonction uniforme, car, en formant les images successives du domaine élémentaire F, on voit que chaque image présente dans son intérieur un contour libre auquel s'applique des images d'ordre supérieur, de sorte que les images de F ne sauraient couvrir le plan plus d'une fois. Il est facile aussi de voir que $f(z)$ existe dans tout le plan.