La plupart de mes premiers Mémoires se rapportent à l'Analyse infinitésimale et à la Géométrie: j'ai été ensuite amené, par mes fonctions de Professeur de mécanique à la Sorbonne, à m'occuper de Mécanique rationnelle. J'ai toujours eu peu de gout pour le développement des théories générales et j'ai plutôt recherché les questions précises et limitées pouvant ouvrir des voies nouvelles. Faut-il approuver ou critiquer cette disposition d'esprit à traiter de préférence un cas particulier simple et a en laisser de côté la généralisation? Quoiqu'il en soit, on reconnaîtra, dans ce qui suit, bien des exemples de cette tendance. Il en est résulté que je me suis occupé de sujets variés qu'il est parfois difficile de ramener à un même point de vue. J'exposerai d'abord les travaux d'Analyse, puis ceux de Géométrie, enfin ceux de Mécanique. Il m'arrivera de citer des noms de mathématiciens qui ont traité ou continué certaines théories. Mais que les auteurs non cités me pardonnent; je ne puis faire de cet exposé une histoire des questions qui sont traitées.

Analyse mathématique.

En analyse, je me suis occupé de la théorie générale des fonctions d'une variable complexe, en particulier des fonctions uniformes sur une surface de Riemann avec ou sans coupures, des applications à quelques fonctions particulières telles que les fonctions elliptiques, les fonctions eulériennes et analogues, les fonctions périodiques générales, puis de la théorie des équations différentielles tant au point de vue des propriétés des intégrales que de la formation et de la signification des invariants; j'ai donné les premiers exemples de la détermination d'une singularité d'une fonction d'après son développement en série entière; enfin j'ai étudié quelques développements en série particuliers conduisant à des suites de polynomes dont l'une a servi de base à d'importants travaux de M. Pincherle.

Dans leurs recherches sur les polynomes électrosphériques, MM. Guillet et Aubert[1] ont rencontré des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés. Je me suis proposé d'étudier, d'une façon générale, ce genre de développements dans divers articles.

[1] *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820.

Je me suis attaché à franchir, sur certains points, le passage difficile entre la théorie des fonctions d'une variable et celle des fonctions de deux ou plusieurs variables; c'est à cet ordre d'idées qu'il faut rapporter la découverte des fonctions hypergéométrique de deux variables et des équations aux dérivées partielles correspondantes, l'étude des polynomes qui s'y rattachent et leur application au calcul approché des intégrales doubles; la théorie des fonctions méromorphes quadruplement périodiques de deux variables et leur expression directe par des quotients de fonctions Θ; la théorie des fonctions méromorphes de deux variables à trois ou deux paires de périodes; l'étude des fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce avec des singularités essentielles; la détermination des coefficients des développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques par des intégrales de fonctions à multiplicateur; l'indication d'une méthode pour poser le problème de l'inversion des intégrales doubles; l'étude des fonctions harmoniques de trois variables réelles, la classification de leurs singularités, l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler à ces fonctions; l'application des théorèmes généraux aux fonctions harmoniques admettant un, deux ou trois groupes de périodes; les développements en séries trigonométriques de ces dernières fonctions dont les applications sont nombreuses en physique mathématique; la généralisation des polynomes d'Hermite et de Didon; la définition des polynomes de Bernoulli à deux variables et enfin l'introduction des fonctions de Bessel à plusieurs variables. Ces méthodes et ces résultats quoique exposés pour des fonctions de deux ou trois variables peuvent être étendus à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Entrons maintenant dans quelques détails.

Théorie des fonctions d'une variable.

Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. — Le théorème de Cauchy donne le développement en série entière d'une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle; celui de Laurent, le développement d'une fonction holomorphe dans l'aire comprise entre deux circonférences concentriques. Je considère (15, 16, 17)[1], d'une manière générale, une aire S limitée par des arcs de cercle tournant tous leurs convexités vers

[1] Les numéros placés entre parenthèses correspondent à la table bibliographique placée à la fin de cette Notice.

l'intérieur de l'aire, et ayant pour centres respectifs les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et je démontre que toute fonction $f(x)$ *holomorphe dans cette aire* est développable en une série de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x-a_k)^\nu}$$

convergente en tous les points de l'aire. Mais cette série a, de plus, la propriété suivante: elle converge encore en tous les points de l'aire indéfinie située à l'*extérieur de tous les cercles, et sa somme est alors égale à zéro.* Voilà donc un développement qui est convergent en deux parties du plan séparées l'une de l'autre, et qui, dans une des parties, a pour somme $f(x)$ et dans l'autre zéro. C'est Weierstrass qui a signalé le premier ce fait singulier sur un exemple qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques; après lui, Tannery en a donné un exemple beaucoup plus simple. On voit que notre méthode, trés générale, permet de représenter toute fonction analytique uniforme par un développement de ce genre, dans une aire choisie convenablement. Par exemple, la série (17)

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\, 2^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n}\right]$$

a pour somme 1 dans une partie du plan et zéro dans l'autre. On conclut de là un moyen de former une série de fractions rationnelles, convergente dans plusieurs aires séparées, et représentant une fonction $f_1(x)$ dans une des aires, une autre fonction $f_2(x)$ dans une autre des aires, et ainsi de suite, de sorte que, dans chacune des aires, la série représente une fonction différente. On peut faire (18), sur les développements de ce genre, cette remarque que, *si les cercles limitant l'aire S n'ont aucun point commun, le développement en série, par notre méthode, n'est possible que d'une manière;* c'est ce qui arrive dans les théorèmes de Cauchy et Laurent; *si*, au contraire, *deux ou plusieurs de ces cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement est possible d'une infinité de manières.* Par exemple, si le cercle de centre a_1 a un point commun avec un autre cercle limite, on peut prendre arbitrairement certains des coefficients correspondants en nombre aussi grand qu'on le veut.

Il est possible de généraliser considérablement ces résultats et de former le développement d'une fonction $f(x)$, holomorphe dans l'aire S limitée par des arcs de cercles de centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, en série de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{d^\nu \psi(\alpha_k - x)}{d x^\nu},$$

où $\psi(x)$ désigne une fonction uniforme donnée qui a pour pôle simple le point $x=0$, et qui possède d'autres pôles quelconques en nombre fini ou infini. En général, ce développement est encore convergent dans des aires autres que S, et représente dans ces aires des fonctions entièrement différentes de $f(x)$: j'examine les divers cas qui peuvent se présenter, et dont la discussion ne saurait trouver place ici. Je me borne à dire que des cas particuliers dignes d'intérêt sont ceux qui consistent à prendre pour $\psi(x)$ la fonction $\cot x$ ou $Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}$.

J'ai formé par un procédé analogue des développements en série, propres à représenter une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs d'ellipse et, comme cas limite, par des segments de droites. J'en conclus une forme de développement en série pouvant représenter, *pour toutes les valeurs de la variable*, l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont uniformes et ont un nombre fini de points singuliers; car cette intégrale est holomorphe à l'extérieur d'un contour fermé infiniment rapproché de la ligne brisée obtenue en joignant par des droites les points singuliers dans un ordre quelconque.

Fonctions d'un point analytique. — Le célèbre Mémoire de Weierstrass sur les fonctions analytiques uniformes (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876) a été le point de départ d'un grand nombre de travaux sur la théorie des fonctions.

Je me suis proposé (2, 3) de traiter, suivant les idées de Weierstrass, la théorie des fonctions *uniformes d'un point analytique:* voici ce que l'on entend par cette dénomination. Soit $F(x, y)=0$ une équation algébrique irréductible repré sentant une courbe d'ordre m et de genre p; on appelle *point analytique* (x, y) le système des deux nombres formé par une valeur quelconque attribuée à x et par une des m valeurs correspondantes de y. Une fonction de la variable x sera dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y) *si cette fonction n'a qu'une valeur en chaque point* (x, y); telle serait, par exemple, une fonction rationnelle de x et y. Si l'on convient, avec Riemann, de représenter le point (x, y) par un point d'une surface composée de m feuillets superposés, la fonction sera uniforme sur cette surface. J'étends d'abord à ces fonctions la notion de pôles et de points singuliers essentiels, puis je donne l'expression générale d'une de ces fonctions avec un nombre fini de points singuliers, pôles ou points singuliers essentiels. L'élément analytique à l'aide duquel nous exprimons ces fonctions est l'*intégrale abélienne normale de seconde espèce* attachée à la courbe $F(x, y) = 0$. Cette intégrale est, comme l'on sait, une fonction du point analytique (x, y) finie partout, excepté en un point $x = \xi$, $y = \eta$ où elle devient infinie du premier ordre avec un résidu égal à l'unité; je la désigne par $Z(\xi, \eta)$, en mettant ainsi en évidence le point (ξ, η) où elle devient infinie. Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y) et (x_0, y_0), ces derniers avec des résidus -1 et $+1$, comme il résulte du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième espèce. Elle joue, dans cette théorie, le même rôle que la fonction $\frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}$ dans la théorie des fonctions uniformes de x. Ainsi l'expression générale d'une fonction $f(x, y)$, ayant le seul point singulier (a, b), est

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1 \cdot 2 \cdots (\nu - 1)} Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

où $Z^{(\nu-1)}(\xi, \eta)$ désigne la dérivée d'ordre $(\nu - 1)$ de $Z(\xi, \eta)$ par rapport à ξ, et cette expression est entièrement analogue à l'expression

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1 \cdot 2 \cdots (\nu - 1)} \frac{d^{\nu-1}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0 - a}\right)}{d a^{\nu-1}}$$

d'une fonction uniforme $f(x)$ ayant le seul point singulier a. Comme dans la théorie de Weierstrass, une fonction $f(x, y)$ ayant plusieurs points singuliers est la somme de plusieurs expressions analogues à la précédente.

Il y a cependant entre les deux théories une différence considérable qu'il importe de signaler en peu de mots: c'est que, dans les expressions que donne Weierstrass pour les fonctions uniformes d'une variable x, *les coefficients des séries sont arbitraires*, tandis que, dans les expressions des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y), *les coefficients des séries sont assujettis à vérifier p relations* qu'il serait trop long d'indiquer ici.

Nos formules se déduisent toutes par un procédé uniforme du théorème suivant:

Si l'on forme, d'une part, la somme des résidus d'une fonction uniforme d'un point analytique ayant un nombre fini de points singuliers et, d'autre part, la somme des coefficients de x^{-1} dans les développements des m déterminations de la fonction au voisinage du point ∞, ces deux sommes sont égales.

Passant ensuite à l'étude des fonctions qui ont une infinité de points singuliers, je démontre à leur égard un théorème qui est la généralisation de celui de M. Mittag-Leffler et qui permet de *former une fonction uniforme du point analytique* (x, y) *n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point* (a, b) *et admettant, pour pôles, les points* (a_ν, b_ν), *avec des parties principales données d'avance, le point* (a_ν, b_ν) *étant assujetti à tendre vers* (a, b) *quand* ν *croît indéfiniment.* Comme je l'ai appris depuis par M. Mittag-Leffler, ce théorème avait été trouvé, mais non publié, par Weierstrass, avec qui je suis très honoré de m'être rencontré sur ce point. J'étends, de même, aux fonctions d'un point analytique, la méthode de décomposition en facteurs primaires que Weierstrass a indiquée pour former une fonction uniforme avec des zéros donnés, et je suis conduit à l'expression générale d'une fonction d'un point analytique admettant un seul point singulier essentiel et des zéros en nombre infini se rapprochant indéfiniment de ce point essentiel. Ces théorèmes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) conduisent, dans le cas particulier où le genre p est égal à l'unité, à des théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. On peut alors exprimer x et y par des fonctions elliptiques d'un paramètre u, de sorte que toute fonction uniforme du point (x, y) devienne fonction uniforme de u, et réciproquement. On arrive ainsi à étendre les théorèmes de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels dont MM. Hermite[1] et Picard[2] ont donné des expressions générales.

La formule célèbre connue sous le nom d'*intégrale de Cauchy* peut, de la façon suivante (2, 3), être étendue aux fonctions d'un point analytique:

Traçons sur l'un des feuillets d'une surface de Riemann une courbe fermée C qui ne comprend dans son intérieur aucun point de ramification de la surface; soient $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière sur toute la portion de la surface de Riemann extérieure à C, et (x, y), (x_0, y_0) deux points de cette portion de surface, on a

---

[1] *Cours professé à la Faculté des Sciences.*
[2] *Comptes rendus*, novembre 1879.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_C Z(\xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C.

On déduit de cette formule des développements en série pour les fonctions d'un point (x, y) holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercles, analogues à ceux que j'ai donnés (15) pour les fonctions uniformes sur une portion de plan. Lorsque le genre $p=1$, on obtient une formule digne d'attention relative aux fonctions à deux périodes.

Développements en série suivant les inverses de polynomes donnés. Considérons une suite donnée de polynomes (20, 21, 22, 23)

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$$

d'un degré marqué par l'indice, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est égal *à l'unité.* Les racines du polynome $P_n(x)$ sont supposées, quel que soit n, à l'intérieur d'un cercle fixe de centre O et de rayon déterminé R; autrement dit, ces racines, réelles ou complexes, ont leurs modules inférieurs à R. On a, des lors, pour $|x| > R$,

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1}{x^n}\left(1 + \frac{p_{1n}}{x} + \frac{p_{2n}}{x^2} + \cdots\right),$$

série convergente. Soit, d'autre part,

$$f(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_\nu}{x^\nu} + \cdots$$

une fonction développée en série suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$ à l'extérieur du cercle R.

On pourra, par la méthode des coefficients indéterminés, calculer les coefficients a_ν du développement

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_1}{P_1(x)} + \frac{a_2}{P_2(x)} + \cdots + \frac{a_n}{P_n(x)} + \cdots$$

en ordonnant les deux membres suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Ce développement n'est possible que d'une manière. Pour l'application du théorème de Cauchy, il est utile de connaître le développement de $\frac{1}{x-y}$, avec

$$|x|>|y|.$$

Posons alors

$$\frac{1}{x-y}=\frac{Q_0}{P_1(x)}+\frac{Q_1}{P_2(x)}+\cdots+\frac{Q_{n-1}}{P_n(x)}+\cdots,$$

les P_n étant donnés, et calculons les coefficients Q_ν par la méthode générale précédente en écrivant

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}+\cdots;$$

on trouve $Q_0=1$ et l'on voit que Q_ν est un polynome de degré ν en y, que nous désignerons par $Q_\nu(y)$, dont le terme de degré le plus élevé est y^ν; les résultats obtenus pour le calcul des $Q_\nu(y)$ peuvent être résumés dans le théorème suivant.

L'intégrale

$$I_n^\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)}\,dx,$$

prise le long de la circonférence C dans le sens positif, est égale à zéro si $\nu \gtrless n$ *et à l'unité si* $\nu=n$.

Fonctions elliptiques.

Théorie générale. — Abel et Jacobi ont représenté les fonctions elliptiques d'une variable x par le quotient de deux fonctions entières admettant chacune une des deux périodes et se reproduisant multipliées par une exponentielle linéaire en x quand on ajoute à la variable la deuxième période. En appliquant les principes de la théorie des fonctions posés par Weierstrass, on peut *a priori*, d'une manière fort simple, arriver à cette expression des fonctions elliptiques (26).

Soit $f(x)$ une fonction doublement périodique d'une variable se comportant, en tous les points à distance finie, comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut, d'après les résultats trouvés par Weierstrass, se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ *n'ayant pas de zéros communs.* Cette forme n'est pas unique, car on peut évidemment multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière de x, $e^{g(x)}$. En disposant convenablement de cette fonction $g(x)$ et s'appuyant sur d'importants résultats dus à Guichard (*Annales de l'École Normale*, 1887), on arrive à mettre la fonction elliptique $f(x)$ sous la forme du quotient de deux autres fonctions entières $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, qui remplissent les conditions caractéristiques des fonctions d'Abel et de Jacobi et qui peuvent, par suite, être exprimées à l'aide des fonctions Θ.

Cette méthode est importante en ce qu'elle s'étend (56) et (58, 59) aux fonctions de deux variables à quatre paires de périodes.

Expression nouvelle des fonctions elliptiques. — D'après les théorèmes généraux de la théorie des fonctions, on reconnaît *a priori* l'existence d'une infinité de représentations analytiques d'une fonction *méromorphe dans tout le plan*, c'est-à-dire uniforme et n'ayant que des pôles à distance finie, ces représentations analytiques étant assujetties à donner la fonction pour toutes les valeurs de la variable. Si l'on se limite aux représentations qui donnent la fonction sous forme du quotient de deux séries convergentes pour toutes les valeurs de la variable, il existe encore une infinité de représentations différentes. Les plus simples sont: 1° celle qui donne la fonction sous forme du quotient de deux séries entières, par exemple celle qui donne les fonctions elliptiques sous forme du quotient de fonctions Θ; 2° celle qui donne la fonction sous forme d'une série unique mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, série qui est définie par le théorème de M. Mittag-Leffler. Plus généralement, en admettant que la fonction ait pour zéros les points

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_\nu, \; \ldots$$

et pour pôles les points

$$b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_\nu, \; \ldots,$$

on pourra la regarder comme le quotient de deux fonctions méromorphes

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

la fonction $P(z)$ ayant pour zéros une partie des points a_ν et pour pôles une partie des points b_ν; la fonction $Q(z)$ ayant pour zéros les autres points b_ν et pour pôles les autres points a_ν. Ces deux fonctions P et Q sont, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, représentées par des séries convergentes dans tout le plan. La seule difficulté qui se présentera et qui pourra être considérable sera de calculer les coefficients des séries et surtout ceux de la partie entière des développements. J'ai fait ce calcul pour les fonctions elliptiques (27) en prenant, pour $Q(z)$, une fonction entière ayant pour zéros les pôles de la fonction situés dans une moitié du plan et, pour $P(z)$, une fonction ayant pour pôles les pôles de la fonction situés dans l'autre moitié du plan. Ces recherches se rattachent à mes études (39) et (40) sur les fonctions que Heine a introduites comme une généralisation des fonctions eulériennes Γ, et à des résultats que Poincaré a indiqués dans ses Mémoires sur les invariants arithmétiques (*Comptes rendus*, 1879, et *Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Alger, 1881). Elles donnent les fonctions elliptiques sous une forme nouvelle mettant en évidence la double périodicité d'une manière différente de celle qui se présente dans les expressions connues. Voici comment: la fonction elliptique est le quotient de deux séries $P(z)$ et $Q(z)$, d'une forme simple, qui admettent séparément la période ω et se reproduisent divisées par $\left(q^2 e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1\right)$ quand on augmente z de la deuxième période ω'.

Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques. — La formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement la solution de la question suivante:

Former une fraction rationnelle de degré n dont les infinis, au nombre de n, sont connus et qui prend des valeurs données pour $(n+1)$ valeurs particulières attribuées à la variable.

Je me suis proposé (25) de résoudre une question analogue qui peut s'énoncer ainsi:

Former une fonction elliptique d'ordre n dont les infinis, situés dans un parallélogramme élémentaire, sont connus et qui prend des valeurs données pour n valeurs attribuées à la variable.

Ce problème se résout par une formule entièrement semblable à celle de Lagrange, avec cette différence que, dans un cas particulier, le problème est impossible ou indéterminé.

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques. — Les fonctions elliptiques obtenues d'abord par Abel et Jacobi, sous forme d'un quotient de deux fonctions entières, ont éte développées par Jacobi en séries trigonométriques simples. La méthode que je donne, pour obtenir les coefficients de ces derniers développements, repose sur la résolution d'un système d'équations linéaires (24); elle fournit directement l'expression du *multiplicateur et du module en produits infinis*, sans que l'on soit obligé de passer par l'intermédiaire de la fonction $\varphi(q)$ de Jacobi. Cette méthode a provoqué de la part de Poincaré de profondes recherches dans lesquelles il a indiqué les conditions générales de son emploi.

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. — On sait que Hermite appelle *fonctions doublement périodiques de troisième espèce* des fonctions qui se comportent comme des fractions rationnelles pour toutes les valeurs finies de la variable z, et se reproduisent, multipliées par des exponentielles du premier degré par rapport à z, quand on augmente z de l'une ou de l'autre des périodes ω et ω'.

On peut exprimer toutes ces fonctions par une exponentielle du second degré en z multipliée par le quotient de deux produits de fonctions Θ ne contenant pas le même nombre de facteurs au numérateur qu'au dénominateur; elles se divisent donc en deux groupes: 1° celles où il existe plus de fonctions Θ au dénominateur qu'au numérateur; 2° celles où, au contraire, il existe plus de fonctions Θ au numérateur.

Pour les fonctions doublement périodiques de première et deuxième espèce, Hermite a indiqué un autre mode d'expression, mettant en évidence les points où ces fonctions deviennent infinies et la façon dont elles y deviennent infinies; la formule d'Hermite, appelée *formule de décomposition* en éléments simples, est analogue à la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples et est, comme cette dernière formule, de la plus haute importance pour l'intégration et le développement en série des fonctions de première et seconde espèce.

Pour les fonctions doublement périodiques de troisième espèce, il n'existait pas de formule analogue: la difficulté était de trouver la nouvelle fonction devant servir d'élément de décomposition. C'est cette fonction que j'ai réussi à former (28 à 33); ici, je demande la permission de citer, dans le *Traité des fonctions elliptiques* du regretté Halphen, un passage auquel le sentiment de vive sympathie que j'ai toujours eu pour l'auteur me fait attacher le plus grand prix: «Au Chapitre XIII, nous avons trouvé les développements de plusieurs fonctions de troisième espèce, les inverses des fonctions σ, les inverses de leurs produits deux à deux. Ces développements et beaucoup d'autres analogues avaient été formés par M. Biehler dans une thèse remarquable, dont on doit recommander l'étude[1]; mais c'est M. Appell qui, en créant le nouvel élément simple, a conduit cette partie de la théorie au plus haut degré de perfection.» Cet élément simple est une série dont la composition a quelque ressemblance avec celle des fonctions θ. Soient n un entier positif et q la constante $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, l'élément simple est la fonction de deux variables indépendantes z et u, définie par la série

$$\chi_n(z, u) = \frac{\pi}{\omega} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{2n\nu\pi u i}{\omega}} q^{n\nu(\nu-1)} \cot \frac{\pi}{\omega}(z-u-\nu\omega'),$$

qui devient infinie toutes les fois que la différence $z-u$ est de la forme $p\omega+p'\omega'$ (p et p' entiers). A l'aide de cet élément, on peut écrire toute fonction doublement périodique de troisième espèce, sous forme d'une somme de termes ne devenant chacun infini qu'en un point du parallélogramme des périodes et d'une partie entière, s'il y a lieu. Soit une fonction de troisième espèce $F(z)$ ramenée, ce qui est toujours possible, à vérifier deux relations de la forme

$$F(z+\omega)=F(z), \qquad F(z+\omega')=e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}} F(z),$$

où m désigne un entier non nul, positif ou négatif.

Si m est positif, la fonction $F(z)$ a dans un parallélogramme des périodes m zéros de plus que d'infinis: en particulier, elle peut n'avoir que m zéros et pas d'infini. Toute fonction de cette espèce, ayant m zéros et pas d'infini, est une fonction linéaire et homogène de m fonctions

$$g_0(z),\ g_1(z),\ \ldots,\ g_{m-1}(z),$$

linéairement indépendantes. Si la fonction $F(z)$ devient infinie du premier ordre en p points $a, b, \ldots, l$, avec les résidus correspondants $A, B, \ldots, L$, on peut l'écrire sous la forme suivante

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \cdots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

[1] *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, Thèse par Ch. BIEHLER, Gauthier-Villars, 1879.

$G(z)$ désignant une fonction entière vérifiant les mêmes relations que $F(z)$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$G(z)=\lambda_0 g_0(z)+\lambda_1 g_1(z)+\cdots+\lambda_{m-1} g_{m-1}(z),$$

où les λ sont des constantes. Les résidus $A, B, \ldots L$ sont entièrement indépendants des pôles; quant aux coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, on arrive à les calculer (32), soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit par la considération de l'intégrale

$$\int F(x)\chi_m(x, z)\,dx,$$

prise sur le contour d'un parallélogramme élémentaire.

Si, au contraire, l'entier appelé m est négatif, $m=-\mu$, la fonction admet, dans un parallélogramme des périodes, μ infinis de plus que de zéros: supposons encore qu'elle devienne infinie du premier ordre aux points $a, b, \ldots, l$ avec les résidus $A, B, \ldots, L$, on aura

$$F(z)=A\chi_\mu(z, a)+B\chi_\mu(z, b)+\cdots+L\chi_\mu(z, l);$$

les résidus $A, B, \ldots, L$ ne sont plus indépendants des pôles: ils sont liés aux pôles par μ relations

$$Ag_k(a)+Bg_k(b)+\cdots+Lg_k(l)=0, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, \mu-1).$$

Ces μ relations sont d'ailleurs suffisantes pour rendre le second membre de la dernière formule de décomposition doublement périodique de troisième degré: c'est ce que l'on vérifie, en cherchant l'effet de l'addition de la seconde période ω' au premier argument de $\chi_n(z, u)$.

Ainsi, et c'est là une circonstance très remarquable, la même fonction $\chi_n(z, u)$ sert d'élément de décomposition dans les deux cas: dans l'un des cas, z est la variable et u un paramètre qui coïncide successivement avec les différents pôles; dans l'autre, c'est le premier argument z qui sert de paramètre et le second u de variable.

Ces résultats donnent immédiatement les développements des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en séries trigonométriques (32). En effet, pour développer une quelconque de ces fonctions en série, il suffira de connaître le développement de l'élément simple. J'indique, en conséquence, des développements en séries des quatre fonctions

$$\chi_n(z, u), \ \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u\right), \ \chi_n\left(z, u+\frac{\omega'}{2}\right), \ \chi_n\left(z+\frac{\omega'}{2}, u+\frac{\omega'}{2}\right).$$

On se trouve alors en possession de méthodes et de formules générales permettant de trouver facilement les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et comprenant, comme cas particuliers, les formules, si précieuses pour l'Arithmétique, que Biehler a établies dans son excellente Thèse, en suivant la voie ouverte par Hermite. Quelques-unes des séries que j'ai obtenues de cette façon ont été reproduites par Hermite dans un Mémoire inséré au Tome C du *Journal de Crelle.* Cette méthode de développements en série permet de démontrer une loi générale énoncée par Hermite et vérifiée par Biehler sur un grand nombre d'exemples, loi qui donne une propriété arithmétique extrêmement remarquable des coefficients des développements en série des fonctions de troisième espèce, suivant les puissances de q:

Si l'on développe une fonction doublement périodique de troisième espece en une série ordonnée par rapport aux puissances de q, *on voit apparaître dans les sinus et cosinus qui forment le coefficient de* $q^{\frac{N}{4}}$ *les combinaisons* $\frac{\delta' \pm m\delta}{2}$ *des diviseurs conjugués* δ *et* δ' *de* N; *le signe* $+$ *convenant au cas où il y a au numérateur* m *fonctions* Θ *de plus qu'au dénominateur, le signe* $-$, *au cas où il y a au dénominateur* m *fonctions* Θ *de plus qu'au numérateur.*

L'élément simple $\chi_n(a, z)$, considéré comme une fonction du second argument, vérifie une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions Θ et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions Θ et de la fonction $\chi_n(a, z)$ (106).

Enfin on peut rattacher les formules de décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce au théorème de M. Mittag-Leffler: dans cette application (33), les degrés des polynomes à retrancher de la partie principale croissent indéfiniment.

Signalons à cette occasion une étude intéressante à faire: à savoir l'étude des zéros de la fonction $\chi_n(z, u)$. J'ai indiqué dans les Acta (43) une méthode générale pour obtenir des relations entre des χ_n d'indices différents.

Fonctions particulières.

Fonctions analogues aux fonctions circulaires. — Les fonctions circulaires se présentent comme formant la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le développement de $e^{x\sqrt{-1}}$; ce fait m'a conduit (46) à étudier les trois fonctions de deux variables θ et φ qui naissent du développement de l'exponentielle $e^{\alpha\theta+\alpha^2\varphi}$, où α et α^2 sont les racines cubiques de l'unité. Les propriétés de ces fonctions permettent de concevoir un calcul de quantités complexes dans l'espace, semblable au calcul des imaginaires dans le plan. A cette occasion, il se présente des systèmes de trois familles de surfaces, telles que les plans tangents en un point commun à trois surfaces, appartenant respectivement aux trois familles, forment un trièdre régulier dont les arêtes sont également inclinées sur la droite ayant pour équations $x=y=z$.

Généralisant ce résultat (47), j'étudie n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $(n-1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfaisant aux équations différentielles

$$\begin{aligned}
dy_1 &= y_2\,dx_1 + y_3\,dx_2 + \cdots + y_n\,dx_{n-1},\\
dy_2 &= y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2 + \cdots + y_1\,dx_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dy_n &= y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \cdots + y_{n-1}\,dx_{n-1},
\end{aligned}$$

qui constituent l'extension naturelle des équations

$$dy_1 = y_2\,dx, \quad dy_2 = y_1\,dx,$$

auxquelles satisfont les sinus et cosinus hyperboliques. Les fonctions ainsi obtenues admettent $(n-1)$ groupes de périodes conjuguées et sont liées par une relation algébrique.

Fonctions analogues aux fonctions eulériennes. — La fonction $\Gamma(x)$ ne diffère que par un facteur exponentiel de la limite du produit infini dont le terme général est $\frac{n}{x+n}e^{\frac{x}{n}}$; elle est formée avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction $\sin \pi x$. En suivant le mode de généralisation employé pour passer des produits infinis qui définissent les fonctions circulaires aux produits infinis qui définissent les fonctions elliptiques, on est amené (38) à considérer des fonctions formées avec la moitié des facteurs primaires qui constituent la fonction Θ. Ces nouvelles fonctions peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction O que Heine a découverte, en généralisant la série hypergéométrique de Gauss. On a ainsi une double série de fonctions: d'un côté, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, et, de l'autre, les fonctions eulériennes et les fonctions de Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes à plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction eulérienne Γ et à la fonction O de Heine, et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1. Je m'occupe (38—40) de l'étude des principales propriétés de ces fonctions, puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes de calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et produits infinis.

Soient $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, $(n+1)$ quantités imaginaires, telles que les modules de

$$q_1 = e^{\frac{\pi\omega_1 i}{\omega}}, \quad q_2 = e^{\frac{\pi\omega_2 i}{\omega}}, \quad \ldots, \quad q_n = e^{\frac{\pi\omega_n i}{\omega}}$$

soient moindres que l'unité; la fonction que j'étudie est définie par l'équation

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \ldots q_n^{2m_n}\right),$$

le produit étant étendu à toutes les valeurs entières positives ou nulles de m_1, $m_2, \ldots, m_n$. J'indique $(n+1)$ équations aux différences finies auxquelles satisfait cette fonction O, des formules pour la multiplication de l'argument x et la décomposition de cette fonction O en facteurs primaires. Lorsque le nombre n est égal à l'unité, on retrouve les fonctions O de Heine. Le cas où $n=2$ mérite une attention particulière (40): en divisant la fonction $O(-x+\omega_1+\omega_2 \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$ par la fonction $O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$, on obtient une fonction possédant les propriétés suivantes: elle a la période ω, et, quand on augmente la variable x de ω_1 ou ω_2, elle se reproduit multipliée par une fonction Θ aux périodes (ω, ω_2) ou aux périodes (ω, ω_1). On peut, à l'aide de cette nouvelle fonction, exprimer toute fonction uniforme qui admet la période ω et se reproduit multipliée par une fonction elliptique aux périodes ω et ω_2, quand on fait croître x de ω_1. Le cas particulier, où les périodes ω_1 et ω_2 sont égales, avait été considéré antérieurement par M. Picard[1]; j'indique, pour ce cas, une relation entre la fonction O et la dérivée d'une fonction Θ par rapport à une *période*.

[1] *Comptes rendus,* 11 mars 1878.

Périodicité générale. — Une fonction d'une variable x est périodique, lorsqu'elle ne change pas de valeur, quand on fait l'opération qui consiste à ajouter une certaine constante à x; on peut se placer à un point de vue beaucoup plus général, en considérant des fonctions d'une variable x qui ne changent pas de valeur, quand on fait, sur x, une opération déterminée $\varphi(x)$, par exemple quand on élève x au carré, $[\varphi(x)=x^2]$. La fonction $\varphi(x)$ étant donnée, pour obtenir des fonctions possédant cette propriété, je forme des séries qui, lorsqu'elles sont convergentes, conservent la même somme quand on y remplace x par $\varphi(x)$. J'indique (35), comme exemple, les cas où $\varphi(x)$ a l'une des deux valeurs x^2 ou x^3-1. Me proposant ensuite (36) de traiter un cas où $\varphi(x)$ est une fonction transcendante, j'ai supposé $\varphi(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, et, pour simplifier le calcul, j'ai modifié la méthode générale. Cette méthode permet également de former une fonction de x, se reproduisant multipliée par un facteur $\psi(x)$ donné d'avance, quand x se trouve remplacé par $\varphi(x)$; il suffit, pour cela, de multiplier ou de diviser le terme général de mes séries par une espèce de factorielle. Ces nouvelles fonctions, qui constituent une sorte de généralisation des fonctions périodiques de seconde espèce, se présentent, comme je l'ai montré (102, 108, 109), dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. A la suite des deux Notes que j'ai publiées sur ces fonctions, M. Rausenberger a fait une étude de la *périodicité générale* dans les *Matematische Annalen*, de l'année 1881.

Séries et polynômes. Détermination de la nature d'une singularité d'une fonction définie par une série entière. — On sait quel développement ont pris, dans ces derniers temps, les recherches sur la détermination des singularités des fonctions définies par des développement en séries de puissances. Je crois avoir donné les premiers exemples de déterminations de ce genre.

Soit une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes d'une variable x. Cette variable étant réelle et les coefficients de la série étant positifs à partir d'un certain rang, la série, convergente pour de petites valeurs de x, deviendra divergente quand x tendra, en croissant, vers une certaine limite qu'on peut toujours ramener à être l'unité, à moins que la série ne converge pour toutes les valeurs de la variable. La question qui se pose alors est de savoir de quelle façon la fonction définie par la série devient infinie pour $x=1$. Je résous cette question (8), en supposant que le produit du coefficient de x^n par une certaine puissance de n tende vers une limite pour n infini: dans cette hypothèse, la fonction devient infinie comme une puissance négative de $1-x$, ou comme $-\log(1-x)$, dans un cas particulier. Ce théorème, qui peut être utile pour trouver la somme de la série dans le voisinage de la valeur critique 1, est un cas particulier d'une proposition que j'ai indiquée postérieurement (11) et qui donne la limite du rapport de deux séries divergentes pour lesquelles le rapport des termes généraux tend vers une limite: *Soient deux séries* $f(x)=\Sigma u_n x^n$, $\varphi(x)=\Sigma v_n x^n$ *dans lesquelles les coefficients* u_n *et* v_n *finissent par rester positifs et qui sont convergentes pour* $x<1$ *et divergentes pour* $x=1$, *si le rapport* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers une limite quand* n *augmente indéfiniment, le rapport* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *tend vers cette même limite quand* x *tend vers l'unité.*

Sommation de certaines séries. — Il existe deux classes étendues de séries et de produits convergents dont on peut évaluer les limites à l'aide de transcendantes connues (37). Ce sont: 1° les séries et les produits convergents dont le terme général est une fonction rationnelle du rang n; leurs limites s'expriment à l'aide de la fonction Γ et de ses dérivées; 2° les séries et les produits convergents dont le terme général, de rang n, est une fonction rationnelle de q^n, q désignant une constante dont le module est différent de l'unité; leurs limites s'expriment au moyen de la fonction O de Heine et de sa dérivée. Je montre, en outre (40), que ces mêmes transcendantes permettent de résoudre certains problèmes de calcul fonctionnel.

Polynômes et opérations fonctionnelles. — Certains polynômes, ceux de Legendre par exemple, s'offrent comme formant les coefficients du développement d'une fonction génératrice suivant les puissances d'une variable. J'ai étudié (14) les polynômes P_n qui forment les coefficients de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans le développement de $f(h)e^{hx}$ suivant les puissances positives de h, $f(h)$ désignant une fonction quelconque de h développable en série entière. Ces polynômes partagent, avec la fonction x^n, cette propriété que la dérivée de l'un d'entre eux est égale au précédent multiplié par le degré n. Si la fonction $f(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les polynômes correspondants satisfont à des équations différentielles de même nature dont j'indique le mode de formation. Les développements en série procédant suivant ces polynômes ont été étudiés par Halphen[1], à la suite d'un développement particulier indiqué par Léauté[2] (13, 14).

A cette occasion je définis une opération fonctionnelle consistant à remplacer dans une série ou un polynôme $\Sigma u_n x^n$ la puissance x^n par le polynôme P_n. Cette opération joue un rôle fondamental dans les belles recherches de M. Pincherle (Acta mathematica, t. 10).

Autres polynômes. — Signalons encore 1° les polynômes en a qui forment les coefficients des puissances de x dans le développement de $e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ en série entière (12); ces polynômes sont liés à la somme des produits des n premiers entiers p à p; 2° certains polynômes (92) naissant de la série hypergéométrique du second ordre à une variable indépendante; 3° les polynômes de Bernoulli qui expriment, pour des valeurs entières de la variable, la somme des puissances semblables des n premiers entiers (135); faisant, à ces polynômes, l'application d'une méthode donnée par Darboux[3], j'indique leurs expressions approchées quand leur degré est très grand; j'étudie ensuite (138) les développements en série procédant suivant ces polynômes, développements qui présentent des particularités curieuses; c'est ainsi que, pour $(y-x)^{-1}$, il existe un développement qui converge seulement pour des valeurs *entières* de x; 4° des polynômes à une et à deux variables (139) analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes d'Hermite.

Fractions continues. — Une note (134) contient l'expression générale de la réduite de rang n d'une fraction continue périodique au moyen des racines de l'unité.

Dans une autre publication (136), (136[bis]) j'ai montré comment on peut rattacher un nombre complexe à des fractions continues à termes réels, notamment à la fraction

$$b-\cfrac{a}{b-\cfrac{a}{b-\cdots}}$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 781 et 823; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2[me] série, t. V, p. 462.

[2] *Comptes rendus*, t. XC, p. 1404.

[3] *Journal de Mathématiques*, 3[me] série, t. IV, p. 5 et 377; 1877.

où b et a sont des nombres réels et positifs tels que

$$b^2-4a<0.$$

On est conduit à attribuer à la fraction une valeur complexe f donnée par

$$f=b-\frac{a}{f}.$$

La fraction continue considérée est une fraction de Stieltjes, de la forme particulière

$$b+\cfrac{1}{bz+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{bz+\cdots}}}$$

Si l'on suppose b réel et positif, z complexe, cette fraction est convergente et définit une fonction $\varphi(z)$. Pour $z=-\frac{1}{a}$, elle se réduit à la fraction proposée qui est divergente. Mais si la variable complexe z tend vers la valeur réelle négative $-\frac{1}{a}$, la fonction $\varphi(z)$ tend vers l'une des deux racines complexes x ou y de l'équation en f, la limite étant x ou y suivant que z tend vers $-\frac{1}{a}$ par des valeurs complexes situées au dessus ou au dessous de l'axe des quantités réelles. Les deux valeurs complexes de z qu'on est conduit à rattacher à la fraction proposé à termes réels sont, d'après cela, les deux limites vers lesquelles tend $\varphi(z)$ quand z tend vers $-\frac{1}{a}$ de la façon indiquée.

J'ai été amené (137) à généraliser les développements élémentaires en fractions continues, en considérant des développements qui se rattachent à la recherche de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre à une unité près, comme les fractions continues des éléments se rattachent à la détermination d'un nombre à une unité près ($n=1$). Ces recherches ont été étendues et complétées par M. Armand Cahen (C. R. 1923 et 1924).

Fonctions et intégrales abéliennes. Fonctions périodiques de plusieurs variables. Intégrales de fonctions à multiplicateurs.

En 1885, le Journal Acta mathematica annonçait, dans les termes suivants, l'ouverture d'un concours international.

»Sa Majesté Oscar II, désireux de donner une nouvelle preuve de l'intérêt qu'Elle porte à l'avancement des Sciences mathématiques, intérêt qu'Elle a déjà témoigné en encourageant la publication du Journal: Acta mathematica, qui se trouve sous Son auguste protection, a résolu de décerner, le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de Sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathématique supérieure ...»

»Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser Ses intentions à une Commission de trois membres: M. Carl Weierstrass à Berlin, M. Charles Hermite à Paris, M. Gösta Mittag-Leffler à Stockholm ...»

C'est à ce concours que j'envoyai un Mémoire *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et les développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*. On trouvera dans le tome 13 des Acta mathematica un rapport détaillé d'Hermite sur ce Mémoire. Voici le résumé des questions qui y sont traitées.

On connaît l'intérêt que présentent tant pour l'analyse que pour l'arithmétique les développements des fonctions doublement périodiques en séries trigonométriques. Le problème analogue du développement en séries trigonométriques des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes n'avait pas encore été abordé. Le principal objet du Mémoire est d'arriver à une expression des coefficients de ce genre de développement. Pour cela j'étudie d'abord une classe de fonctions, déjà considérées par Prym (Journal de Crelle t. 70) que j'appelle fonctions à multiplicateurs et qui sont la généralisation de celles que l'on obtiendrait en remplaçant, dans une fonction doublement périodique de seconde espèce, l'argument par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante. Voici comment ces fonctions sont définies.

Partons de la considération d'une relation algébrique de genre p et de la surface de Riemann correspondante, rendue simplement connexe au moyen des coupures introduites par Riemann. Les fonctions à multiplicateurs sont des fonctions uniformes sur cette surface, n'ayant d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs, aux deux bords d'une coupure, ne diffèrent l'une de l'autre que par des facteurs ou multiplicateurs constants: il y a en tout $2p$ multiplicateurs correspondant aux $2p$ périodes d'une intégrale abélienne de première espèce.

Le problème qui se pose alors est de former l'expression générale des fonctions admettant $2p$ multiplicateurs donnés d'avance. J'indique cette expression sous deux formes différentes: sous la première forme, qui met en évidence les zéros et les infinis, la fonction est représentée par une exponentielle dont l'exposant est une somme d'intégrales abéliennes de première espèce, avec des coefficients arbitraires, et d'intégrales normales de troisième espèce avec des coefficients entiers; sous la deuxième forme, qui met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, elle est donnée par une somme d'éléments simples. J'avais déjà rencontré antérieurement ces fonctions à propos de l'intégration de certaines équations différentielles (98) et je les avais étudiées pour elles-mêmes dans un Mémoire étendu; dans ce Mémoire, j'avais indiqué la première forme de l'expression générale de ces fonctions et j'avais également donné une formule de décomposition en éléments simples; mais cette formule présentait cet inconvénient que l'élément simple devenait infini, non pas en un seul, mais en p points; pour arriver à une formule plus parfaite, j'ai dû avoir recours à la notion d'intégrales de fonctions à multiplicateurs, de même que, pour décomposer en éléments simples une fonction algébrique par la formule de Riemann-Roch, on est obligé de se servir d'intégrales de fonctions algébriques. Je démontre ensuite plusieurs théorèmes, parmi lesquels je cite le suivant qui est une généralisation de la proposition célèbre d'Abel, sur les intégrales de différentielles algébriques: la somme des valeurs que prend une intégrale abélienne de première espèce aux zéros d'une fonction à multiplicateurs est égale à la somme des valeurs qui correspondent aux infinis de la même fonction, augmentée d'une constante dépendant uniquement des multiplicateurs. Ce théorème conduit à des conséquences importantes sur le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans l'expression d'une fonction ayant des multiplicateurs et des pôles donnés. Je prouve après cela que, comme il arrive déjà pour les fonctions algébriques de genre supérieur à zéro, les résidus et les pôles d'une fonction à multiplicateurs ne sont pas indépendants les uns des autres: il existe en général $p-1$ relations entre les pôles et les résidus correspondants d'une fonction à multiplicateurs, et p dans un cas spécial, comprenant en particulier celui des fonctions algébriques; ce cas spécial se présente lorsqu'il existe une fonction sans zéros ni infinis, admettant les multiplicateurs donnés. C'est ainsi, par exemple, que, pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une variable u, $(p=1)$, il n'y a, en général, aucune relation entre les pôles et les résidus, tandis qu'il en existe une lorsque les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme e^{au}.

Je donne la classification des intégrales des fonctions à multiplicateurs en intégrales de première espèce qui sont toujours finies, en intégrales de seconde espèce n'ayant que des pôles, et en intégrales de troisième espèce où s'offrent des infinis logarithmiques. Nous citerons en particulier cette proposition qu'en général il existe $p-1$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes, et p dans le cas particulier dont il a été question précédemment. Les modules de périodicité de ces intégrales, le long des coupures, sont liés aux multiplicateurs par des relations qui deviennent identiques lorsque les multiplicateurs se réduisent à l'unité et que les intégrales deviennent abéliennes. Entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce à multiplicateurs inverses, existe une équation qui coïncide, dans le cas particulier des multiplicateurs égaux à l'unité, avec la relation d'une importance capitale découverte par Riemann, entre les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Enfin je forme les intégrales normales de fonctions à multiplicateurs de seconde et de troisième espèce; j'établis des relations entre les modules de périodicité de ces intégrales et leurs multiplicateurs, puis d'autres entre ces modules et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses. L'ensemble de ces résultats rend manifeste l'analogie de la nouvelle théorie avec celle des intégrales abéliennes: la différence de nature analytique entre les deux genres de quantités apparaît toutefois dans cette circonstance, qu'il existe une intégrale de troisième espèce avec un seul infini logarithmique, tandis qu'une intégrale abélienne de troisième espèce possède au moins deux infinis de cette nature.

Après avoir ainsi étudié les fonctions à multiplicateurs et leurs intégrales, j'arrive à la seconde partie du mémoire qui a pour objet le calcul des coefficients du développement en série trigonométrique des fonctions abéliennes. Pour cela j'exprime d'abord ces coefficients par la formule de Fourier, puis, à l'aide d'un changement de variables, j'arrive à des intégrales de fonctions à multiplicateurs, que je cherche à réduire par l'application des théorèmes généraux antérieurement donnés. En traitant d'abord le cas simple des fonctions elliptiques, j'obtiens ainsi une méthode qui donne *directement* les coefficients du développement en série trigonométrique de $sn\,u$ sans l'intervention des fonctions Θ. J'applique ensuite la même méthode générale aux transcendantes de Göpel et de Rosenhain et je trouve les coefficients, sous forme d'une fonction rationnelle des constantes p, q, r qui figurent dans les fonctions Θ à deux variables, multipliée par une intégrale définie où entrent deux entiers arbitraires. Cette intégrale définie porte précisément sur une fonction à multiplicateurs: elle se réduit, dans des cas très particuliers, à des fonctions de la nature des fonctions de Bessel.

Mais ici apparaît une différence entre les développements des fonctions elliptiques par la formule de Fourier et ceux que j'ai trouvés pour les fonctions abéliennes. On sait que l'on ne peut pas faire l'inversion d'une intégrale ultra-elliptique de première espèce, comme l'on fait celle d'une intégrale elliptique; mais on peut chercher à faire cette inversion, en restant dans le domaine des variables réelles et appliquant les idées que Weierstrass a développées dans un Mémoire *Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen*[1]*:* ce nouveau problème, d'une grande importance au point de vue des applications, se ramène à celui que j'ai traité. Il conduit également (85) à la considération des fonctions de Bessel à plusieurs variables, étudiées depuis par Akimoff, par Pérès et par Jekhowsky (Comptes rendus t. 162, 170, 172, 179, Bulletin astronomique t. XXXIV et XXXV, Bulletin des Sciences mathématiques t. XLI).

Dans les dernières pages du Mémoire, je montre que la méthode suivie s'applique aussi aux développements, en séries trigonométriques, des fonctions hyperelliptiques de genre quelconque et même de certaines fonctions irrationnelles, et que le mode de raisonnement, employé pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut également donner des résultats utiles pour l'étude de l'intégrale générale d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Suit une classification de celles de ces équations dont l'intégrale générale n'a, sur la surface de Riemann, d'autres singularités que des pôles et des points logarithmiques (voir aux équations différentielles).

Fonctions à multiplicateurs exponentiels. — Les fonctions à multiplicateurs constituent, comme le montre l'analyse précédente, des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Je me suis proposé d'étudier de même (29) certaines fonctions d'un point analytique, qui peuvent être envisagées comme analogues aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Si l'on considère une courbe algébrique de genre p et si l'on appelle $u^{(1)}(x, y)$, $(i=1, 2, \dots p)$ les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondantes, les fonctions considérées sont des fonctions du point analytique (x, y) qui ne changent pas, quand ce point décrit un cycle normal de *rang impair*, et qui se reproduisent multipliées par $e^{-mu^{(i)}(x,y)}$ quand le point décrit le cycle normal de

[1] *Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1866, p. 97.

rang $2i, m$ désignant un entier positif ou négatif. Supposons encore que ces fonctions n'aient que des pôles sur la surface de Riemann; alors: 1° si m est positif, elles ont sur cette surface un nombre de zéros dépassant de mp celui des infinis; 2° si au contraire m est négatif et égal à $-\mu$ elles ont μp infinis de plus que de zéros. Les fonctions de la première sorte sont les inverses de celles de la seconde. Je donne l'expression générale de ces fonctions par une fraction rationnelle en x et y, multipliée par des fonctions Θ où l'on a remplacé les variables par les intégrales abéliennes correspondantes. Quand m est positif, les résidus et les pôles sont indépendants les uns des autres; quand m est négatif, il y a des relations nécessaires entre les pôles et les résidus correspondants.

Des fonctions de cette nature et leurs intégrales ont été étudiées dans les thèses de MM. Lacour (1895) et Suchar (1897).

Extension d'un théorème de Liouville aux fonctions abéliennes. — Liouville a démontré le théorème suivant sur les fonctions doublement périodiques:

Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction elliptique qui sont situés dans un même parallélogramme élémentaire, la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par des multiples des périodes.

Comme ce théorème est un cas particulier du théorème d'Abel, on est conduit à penser que l'on peut déduire, du théorème d'Abel, une proposition sur les fonctions abéliennes analogue à celle de Liouville sur les fonctions elliptiques. C'est ce que j'ai réussi à faire (60, 61) pour le système des fonctions abéliennes qui expriment les sommes des puissances semblables des limites supérieures des intégrales abéliennes, dans les équations d'inversion de Jacobi.

Sur les fonctions abéliennes (65). — Dans une Lettre à Hermite[1], Jacobi démontre que les fonctions de deux variables à quatre paires de périodes qui résultent de l'inversion des intégrales ultra-elliptiques sont des *fonctions algébriques de fonctions d'une variable.* Depuis il n'a été fait, à ma connaissance, aucune recherche sur le mécanisme par lequel se manifeste, dans ce mode d'expression, la quadruple périodicité des fonctions ultra-elliptiques. D'après Weierstrass, toute fonction méromorphe de deux variables x et y, à quatre paires de périodes, peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions de même nature, liées par une équation algébrique irréductible. Ces fonctions sont des

[1] *Journal de Mathématiques,* t. VIII.

fonctions rationnelles de six quantités $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ dont les trois premières dépendent de x seul et sont liées par une relation algébrique, les trois dernières de y seul et sont liées par la même relation; ces fonctions rationnelles ne changent pas quand on fait sur X_1, X_2, X_3 une certaine substitution rationnelle et qu'on opère de même sur Y_1, Y_2, Y_3. On est ainsi conduit à envisager les fonctions abéliennes à un point de vue algébrique dont je donne des exemples élémentaires.

Sur l'inversion des intégrales abéliennes. — Dans leur *Theorie der Abelschen Functionen,* Clebsch et Gordan généralisent le problème de l'inversion, en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent les intégrales abéliennes de première espèce et des intégrales normales de troisième espèce; ils indiquent une méthode pour passer, par continuité, de ce cas, à celui où certaines intégrales de troisième espèce sont remplacées par des intégrales de seconde espèce. Des exemples de l'intégration d'un tel système avaient été donnés auparavant par Rosenhain[1], puis par Clebsch, à l'occasion de ses recherches sur les courbes des genres 0 et 1. Enfin Elliot[2] a intégré un système d'équations où figurent les intégrales de première espèce, avec des intégrales *normales* de deuxième et troisième espèce. Il restait donc à envisager des systèmes d'équations contenant, en outre, les dérivées d'ordre quelconque des intégrales de deuxième espèce par rapport au paramètre. L'étude de ces systèmes conduit au théorème général suivant (62, 63):

Soient x et y deux variables liées par une relation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours d'autres fonctions rationnelles de x et y

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y)$$

possédant la propriété suivante: le système d'équations différentielles

$$\varphi_i(x_1, y_1)\, dx_1 + \varphi_i(x_2, y_2)\, dx_2 + \cdots + \varphi_i(x_n, y_n)\, dx_n = du_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définit les n points analytiques (x_i, y_i), en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique de ces n points soit uniforme en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

---

[1] *Savants étrangers,* 1851.
[2] *Annales de l'École Normale,* 2e série, t. XI.

Signalons spécialement les cas où le genre de la relation qui lie x et y est 0 ou 1; la méthode d'intégration employée dans le cas général, où le genre est quelconque, est une généralisation de la méthode de Clebsch; elle est différente de celle d'Elliot. Il serait trop long de reproduire ici les théorèmes particuliers (63) relatifs aux fonctions rationnelles et aux fonctions elliptiques; ils sont à signaler comme pouvant faire pénétrer la notion du problème d'inversion de Jacobi dans un enseignement élémentaire.

Fonctions de deux variables à quatre paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Les fonctions doublement périodiques d'une variable qui se comportent, à distance finie, comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions Θ d'une variable. Après la découverte des fonctions Θ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de n variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions Θ de n variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction Θ de n variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement: elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de n variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. Weierstrass a, ensuite, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possédait une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié ni indiqué la méthode dont il faisait usage. Dans une Note présentée à l'Academie des Sciences le 3 décembre 1883, Poincaré et E. Picard, s'appuyant sur ce théorème de Weierstrass, que $n+1$ *fonctions méromorphes de n variables à $2n$ groupes de périodes sont liées par une relation algébrique,* ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me suis proposé (58) et (59) de traiter directement la question par une méthode qui s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de variables. Partant de l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème que Poincaré a établi dans le tome II des Acta, je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes; la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation: cette méthode est l'extension naturelle de celle que j'ai suivie antérieurement pour les fonctions elliptiques (26). Voici quelques indications à ce sujet. On commence par démontrer le théorème suivant:

Etant données deux fonctions entières $H(x, y)$ et $K(x, y)$ de deux variables indépendantes vérifiant l'identité

$$H(x, y+1)-H(x, y)=K(x+1, y)-K(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $G(x, y)$ vérifiant les deux équations

$$G(x+1, y)-G(x, y)=H(x, y),$$
$$G(x, y+1)-G(x, y)=K(x, y).$$

Pour cela, en modifiant la méthode que Guichard a donnée (Annales de l'Ecole normale, novembre 1887), pour démontrer un théorème analogue relativement aux fonctions d'une variable, on forme, à l'aide d'une intégrale définie affectée de coupures, des fonctions entières $\psi_n(z)$ vérifiant les identités

$$\psi_n(z+1)-\psi_n(z)=z^n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et se comportant, quand n est très grand, de telle façon que, si

$$H(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n+\cdots$$

est une série convergente quel que soit z, il en soit de même de

$$G(z)=a_0 \psi_0(z)+a_1 \psi_1(z)+a_2 \psi_2(z)+\cdots+a_n \psi_n(z)+\cdots;$$

cette dernière série définira alors une fonction entière vérifiant la relation $G(z+1)-G(z)=H(z)$. Il est évident que les fonctions $\psi_n(z)$ ne diffèrent des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une fonction entière admettant la période 1:

c'est ce que je vérifie en montrant, à l'aide des expressions des polynômes de Bernoulli par des intégrales définies données par Hermite, que $\psi_n - \varphi_n$ est un polynôme en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$. La fonction $\psi_n(z)$ une fois formée, la démonstration du théorème préliminaire est des plus faciles.

Voici maintenant comment se trouve résolue la question principale. D'après un théorème de Poincaré (Acta mathematica, t. II) une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y se comportant comme une fraction rationnelle en tous les points à distance finie, peut s'écrire sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

les fonctions φ et ψ étant *entières* et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction f est indéterminée. Ce mode de représentation n'est pas unique; on en obtient évidemment une infinité d'autres possédant les mêmes propriétés, en multipliant le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros,* c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière $e^{g(x,y)}$. Si l'on suppose que la fonction f admette quatre groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (α, β), (α', β') on arrive, en déterminant convenablement $g(x, y)$, à mettre la fonction f sous la forme du quotient de deux nouvelles fonctions entières $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ vérifiant les relations

$$\frac{\Phi(x+2\pi i, y)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1,$$

$$\frac{\Phi(x, y+2\pi i)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2i\pi}y+c},$$

$$\frac{\Phi(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2i\pi}y+c'},$$

où a, b, a', b' désignent des entiers non nuls tous en même temps, les périodes étant liées par l'équation

$$a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

Faisant alors un changement linéaire de variables, qui substitue aux variables x et y d'autres variables X et Y, on amène les fonctions Φ et Ψ à admettre les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et à vérifier des relations de la forme

$$\frac{\Phi(X+A, Y+B)}{\Phi(X, Y)} = \frac{\Psi(X+A, Y+B)}{\Psi(X, Y)} = e^{MX+C},$$

$$\frac{\Phi(X+A', Y+B')}{\Phi(X, Y)} = \frac{\Psi(X+A', Y+B')}{\Psi(X, Y)} = e^{MY+C'},$$

avec $B = A'$. On retrouve alors les équations caractéristiques des fonctions Θ, fournissant immédiatement ces fonctions par la méthode des coefficients indéterminés.

Ce théorème fondamental étant démontré, il devient facile d'établir l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables, sans singularités essentielles, admettant quatre paires de périodes. Je n'insiste pas sur cette démonstration.

Fonctions de deux variables à deux paires de périodes sans singularités essentielles à distance finie. — Une fonction d'une variable à une période ω, sans points essentiels à distance finie, peut toujours être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières, sans zéros communs, admettant séparément la période ω et pouvant, par suite, s'exprimer par la formule de Fourier. Il est naturel de se demander si une proposition analogue s'applique aux fonctions de deux variables. Tout d'abord, une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être mise sous la forme, (58) et (59),

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de f et vérifiant chacune les deux relations

$$\varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$

$$\psi(x+2\pi i, y) = \psi(x, y), \qquad \psi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y),$$

où n désigne un entier.

Si cet entier n est nul, les fonctions entières φ et ψ admettant séparément la période $2\pi i$ par rapport à x et y, sont données par la formule de Fourier. Si n est différent de zéro, il est aisé d'obtenir l'expression générale des fonctions φ et ψ. Mais il est plus simple de remarquer que l'on peut, avec des fonctions θ d'une variable, former une fonction entière $\theta_n(x, y)$ vérifiant les deux relations

$$\theta_n(x+2\pi i, y) = \theta_n(x, y), \qquad \theta_n(x, y+2\pi i) = e^{-nx}\theta_n(x, y),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\,\theta_n(x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\,\theta_n(x, y),$$

les fonctions Φ et Ψ sont des fonctions entières admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$. On pourra donc mettre la fonction f sous la forme du quotient de Φ par Ψ, Φ et Ψ étant des fonctions entières admettant séparément les deux paires de périodes et développables, par conséquent, par la série de Fourier. On arrive ainsi à une expression analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression ci-dessus n'est pas irréductible.

Sur des expressions triplement ou quadruplement périodiques. — Les fonctions abéliennes de genre *deux* sont des fonctions de deux variables, avec quatre paires de périodes simultanées, n'admettant pas de singularité essentielle à distance finie; elles se réduisent, dans des cas limites, à des fonctions de deux variables à trois paires de périodes, dont le premier exemple a été donné par Rosenhain dan son Mémoire couronné. La question qui se présente naturellement à l'esprit est d'étudier les expressions les plus simples triplement ou quadruplement périodiques, avec des singularités essentielles à distance finie.

Un premier procédé pour former ces expressions est le suivant (54): Soient b et β deux constantes données, m un entier quelconque, $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des constantes assujetties à la condition $\Sigma a_i - \Sigma \alpha_i = m\beta$ et soit, d'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{\theta_1(x+a_1)\,\theta_1(x+a_2)\cdots\theta_1(x+a_n)}{\theta_1(x+\alpha_1)\,\theta_1(x+\alpha_2)\cdots\theta_1(x+\alpha_n)},$$

la fonction θ_1 étant formée avec les périodes ω et ω'. Si l'on désigne par $f(y)$ une fonction uniforme de y admettant la période b, la fonction

$$\psi(x, y) = f\left[m y + \frac{b}{2\pi i}\log\varphi(x)\right]$$

est une fonction uniforme de x et y admettant trois paires de périodes conjuguées, à savoir pour x les périodes $\omega, \omega', 0$ et pour y les périodes correspondantes $0, \frac{b\beta}{\omega}, b$. Dans le cas particulier où $f(y)$ est une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi y i}{b}}$ la fonction $\psi(x, y)$ est de la nature de celles qui ont été considérées par Rosenhain; entre trois de ces fonctions il existe une relation algébrique; il en existe une, en particulier, entre $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$, car les dérivées partielles de ψ sont alors des fonctions de même nature que ψ. On peut, par un procédé analogue, former des expressions à quatre paires de périodes.

Une autre façon de former des expressions quadruplement périodiques consiste à se servir de séries infinies et à imiter ce que l'on fait pour les fonctions elliptiques, quand on représente ces fonctions par des séries de termes simplement périodiques. C'est ce que j'avais réussi à faire en me proposant de publier une étude complète sur ce sujet, quand une Note de M. E. Picard (Comptes rendus, 18 mars 1889) sur cette même question m'obligea à publier, dans la séance suivante (Comptes rendus, 25 mars 1889), les principaux résultats que j'avais obtenus (55), et que je vais rapidement résumer. Considérant une série dont le terme général est

$$S_{m,n} = a^{-m} b^{-n} R\left(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\gamma+n\delta}\right),$$

où $R(z, t)$ désigne une fonction rationnelle de z et t, a, b, α, β des constantes, m et n des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$, je remarque que, si cette série est convergente, elle définit une expression uniforme en x et y admettant les paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par le facteur a ou le facteur b quand on augmente x et y de la paire de périodes (α, γ) ou (β, δ). On obtient, de cette façon, des séries analogues à celles qu'Hermite prend comme point de départ de la théorie des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce.[1] En supposant les constantes a et b égales à l'unité, la série définit une expression quadruplement périodique. On peut se proposer de former, de la même façon, des expressions quadruplement périodiques de troisième espèce, c'est-à-dire des expressions de reproduisant multipliées par une exponentielle, dont

[1] *Annales de l'Ecole Normale*, 3me série, t. II, 1885.

l'exposant est une fonction linéaire de x et y, quand on augmente ces variables d'une paire de périodes. Je montre que, dans l'hypothèse $\beta=\gamma$, on obtient des expressions de cette nature en multipliant le terme général $S_{m,n}$ de la série employée précédemment par le terme général d'une série Θ de deux variables construite avec les groupes de périodes (α, β) et (β, δ). D'une façon générale, l'étude des fonctions uniformes quadruplement périodiques de troisième espèce présente des particularités que nous indiquons dans le paragraphe suivant.

Fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce avec des singularités essentielles. — Soit une fonction quadruplement périodique de troisième espèce de x et y; je suppose essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle dont l'exposant est du second degré en x et y, la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et démontré par Weierstrass, par Picard et Poincaré et par moi-même (58), (59), qu'une fonction quadruplement périodique de deux variables de première espèce qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation $\beta=\alpha'$. Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. E. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre.[1] Il en est de même pour les fonctions quadruplement périodiques de deuxième espèce, comme je l'ai montré par des exemples. A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à vérifier la relation de Riemann $\beta=\alpha'$.

Je démontre ce théorème (57) et je donne quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième

[1] *Comptes rendus*, 1er semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131, 1889.

espèce, en suivant une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce ou en imitant ce que fait Halphen dans son Traité des fonctions elliptiques, t. I, p. 468.

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. — Fuchs a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax+by+c$ et $a'x+b'y+c'$. Je forme directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie. J'indique d'abord un exemple élémentaire, en composant avec des fonctions Θ une fonction $\varphi(x, y)$ qui vérifie les relations

$$\varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y+2\pi i) = \varphi(x+2a, y+x) = \varphi(x, y)$$

et qui admet, par suite, un groupe de substitutions linéaires entières. Viennent ensuite des produits infinis vérifiant les mêmes relations. Je m'occupe enfin (51) de fonctions de trois variables formées avec la fonction suivante, analogue à la fonction Θ,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4+4xn^3+6yn^2+4zn}.$$

On peut construire (52) avec cet élément $\varphi(x, y, z)$ des fonctions admettant un groupe de substitutions linéaires entières. Rivereau a déterminé les zéros de la fonction $\varphi(x, y, z)$ (Annales de la Faculté de Marseille, 1892).

Ces travaux aboutissent à l'étude des fonctions Θ du 4me degré (86, 87) (88, 89) (90, 91) et de certaines fonctions de plusieurs variables $x_1, x_2, \dots x_n$ qui admettent la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et qui ne changent pas quand on augmente chaque variable $x_2, x_3, \dots x_n$ de la précédente et x_1 d'une certaine constante.

Autres fonctions de plusieurs variables complexes.

Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations rationnelles. — Les fonctions fuchsiennes de Poincaré sont des fonctions d'une variable laissées invariables par une infinité de substitutions linéaires; M. E. Picard a étudié des fonctions de deux variables possédant cette même propriété. Je démontre qu'il ne peut pas exister de fonctions uniformes *d'un seul point analytique d'une courbe du premier genre* qui remplissent des conditions analogues. On se demande alors s'il ne serait pas possible de former des fonctions uniformes *de deux points analytiques* (x, y) (x', y') appartenant à une courbe du premier genre, qui gardent la même valeur, quand on remplace les deux points par deux autres points (x_1, y_1) et (x_1', y_1') déduits des premiers par une transformation rationnelle telle que, les deux points (x, y) et (x', y') étant supposés connus, les coordonnées des deux autres points (x_1, y_1) et (x_1', y_1') soient déterminées par des équations du second degré ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de (x, y), (x', y') et réciproquement. Je forme (48) des fonctions de cette nature, en m'appuyant sur un problème d'inversion résolu par Rosenhain et sur les propriétés des fonctions abéliennes. La transformation rationnelle réversible, qui n'altère pas les nouvelles fonctions, est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Extension des théorèmes de Weierstrass et de M. Mittag-Leffler à certaines fonctions de deux variables complexes. — Cette extension (45) se rapporte à une classe particulière de fonctions de deux variables: elle est suivie d'une application à la formation de certaines fonctions de deux variables à deux périodes.

Problème de l'inversion des intégrales multiples. — Une intégrale définie simple est une intégrale étendue à une ligne, située dans le plan des variables complexes, dont on donne les extrémités: elle dépend alors des deux variables définissant ces deux extrémités. Je considère de même une intégrale double (77—79) portant sur une fonction donnée mais étendue à un champ dont la définition dépend d'un certain nombre de variables: l'intégrale est alors une fonction de ces variables. En prenant pour la fonction sous le signe d'intégration une fonction algébrique, on peut poser un certain nombre de problèmes analogues aux problèmes classiques sur les intégrales abéliennes, notamment un problème analogue à celui de l'inversion d'après Jacobi.

En supposant, pour simplifier, les variables réelles, prenons, par exemple, pour champ d'intégration, un cercle quelconque du plan

$$x^2+y^2-2ax-2by-c \leqq 0.$$

La définition de ce champ dépend de trois variables a, b, c. Considérons les trois équations

$$\begin{aligned} \iint dx\,dy &= u, \\ \iint (x+y)\,dx\,dy &= v, \\ \iint (x^2+y^2)\,dx\,dy &= w. \end{aligned}$$

On voit facilement que ces trois équations définissent $a+b$, a^2+b^2, c, comme fonctions uniformes de u, v, w (79).

Intégrales eulériennes. — Séries hypergéométriques — Polynômes.

Intégrales eulériennes et séries hypergéométriques d'une variable. — La fonction hypergéométrique d'une variable définie par la série classique a été étudiée, depuis Gauss, par un grand nombre de géomètres; elles comprend, comme cas particuliers, la plupart des fonctions élémentaires, et les relations auxquelles elle satisfait fournissent, ainsi que l'a montré Gauss, une méthode générale pour le développement de ces fonctions en fractions continues algébriques; cette fonction hypergéométrique joue un rôle important dans beaucoup de questions de Mathématiques pures et appliquées, notamment dans la théorie des fonctions sphériques et dans plusieurs développements en séries employés en Mécanique céleste; elle vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre qui peut lui servir de définition, et c'est en se plaçant à ce point de vue que Riemann a étudié la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans un Mémoire qui contient les germes de la théorie des équations différentielles linéaires, telle qu'elle a été développée depuis par Fuchs; enfin, g et h désignant deux des quatre quantités $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$, cette fonction peut être représentée par des intégrales définies de la forme

$$\int_g^h u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

étudiées par Euler dans le cas $g=0, h=1$, et par Jacobi dans les autres cas; c'est en partant de ces intégrales que Jacobi a trouvé, par des transformations faciles, toutes les solutions de l'équation différentielle de la série hypergéométrique indiquées par Gauss et Kummer.

La théorie de la série hypergéométrique de Gauss est dans un rapport étroit avec celle des intégrales eulériennes qui ont été étudiées à tant de points de vue différents. J'ai obtenu une formule très générale comprenant, comme cas particuliers, un grand nombre d'intégrales définies, exprimables à l'aide de l'intégrale eulérienne Γ, entre autres les intégrales eulériennes de première espèce et les intégrales qui se présentent dans la théorie des polynômes de Legendre et de Jacobi. J'ai montré, en effet (9), que l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x)\, F(\alpha+n, \beta-n, \gamma, x)\, dx,$$

où n désigne une constante quelconque, s'exprime au moyen de la fonction Γ, du moment qu'elle est finie; si la constante n est *nulle*, cette intégrale s'exprime au moyen de la fonction eulérienne Γ et de sa dérivée. Parmi les applications de cette formule générale, je donne d'abord (10) la détermination des coefficients du développement de la fonction hypergéométrique de Gauss, en série de polynômes de Jacobi,

$$X_m = F(\alpha+\beta+m, -m, \gamma, x),$$

où m est un entier positif, polynômes représentés par une formule de Jacobi analogue à celle que O. Rodrigues a donnée pour les polynômes de Legendre; les coefficients de ce développement ont des valeurs simples. Puis, supposant m et m' quelconques (non entiers), je calcule (10) l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} X_m X_{m'}\, dx$$

qui, d'après Jacobi, est nulle lorsque m et m' sont des entiers différents; je montre que cette intégrale est encore nulle, quand m et m' sont deux racines *distinctes* d'une équation transcendante, dont le premier membre s'exprime à l'aide de la fonction Γ et dont le second membre est une constante arbitrairement choisie; lorsque l'on prend $m=m'$, l'intégrale est évidemment différente de zéro; je donne alors sa valeur. On peut déduire de ce résultat la détermination des coefficients A_m du développement d'une fonction en série de la forme $\Sigma A_m X_m$, la sommation étant étendue aux valeurs de m qui sont racines de l'équation transcendante citée plus haut; on sait que certains problèmes de Physique conduisent à des développements de ce genre. Peu de temps après leur publication, ces résultats ont été généralisés par Callandreau (Comptes rendus, 14 juillet 1879).

Fonctions hypergéométriques de deux variables. — Plusieurs géomètres, entre autres Clausen[1], Pochhammer[2], Thomae[3], Goursat[4], ont généralisé les résultats donnés par Gauss et Riemann dans la théorie de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ en formant des fonctions hypergéométriques *d'une variable* construites d'une façon analogue à celle de Gauss et vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Antérieurement à Pochhammer, Hermite avait indiqué une intégrale définie analogue à celle d'Euler, contenant *un paramètre variable* et vérifiant une équation differentielle d'ordre supérieur qui comprend, comme cas particulier, celle de Gauss. Je me suis placé à un tout autre point de vue, et je me suis proposé de former des fonctions *de deux variables indépendantes x et y*, analogues à la fonction hypergéométrique de Gauss, en suivant le mode de généralisation qui conduit des fonctions Θ d'une variable aux fonctions Θ de plusieurs variables. Cette question se posait tout naturellement; en effet, les polynômes de Legendre $\frac{d^n (1-x^2)^n}{d x^n}$ s'expriment à l'aide de la série de Gauss; or Hermite, ayant étudié les propriétés des polynômes à *deux variables*

$$\frac{\partial^{m+n} (1-x^2-y^2)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n},$$

a montré que ces polynômes sont entièrement analogues à ceux de Legendre; on pouvait donc penser qu'il existait des fonctions hypergéométriques de deux variables comprenant, comme cas particuliers, les polynômes d'Hermite, de même que la fonction de Gauss comprend ceux de Legendre. Dans la 2me édition de son *Handbuch der Kugelfunctionen*, Heine commence de la façon suivante (IIe volume, p. 357) l'exposé des résultats que je lui avais communiqués et au sujet desquels il m'avait écrit plusieurs lettres:

»Euler et Pfaff se sont déjà occupés de séries hypergéométriques d'ordre supérieur, c'est-à-dire de séries dans lesquelles, au lieu de deux éléments au numérateur et d'un élément au dénominateur comme dans la série de Gauss, entrent un plus grand nombre d'éléments au numérateur et au dénominateur, de telle manière que la permutation des éléments du numérateur ou de ceux du dénominateur n'altère pas la valeur de la série. Ces séries servent à l'intégration

---

[1] *Journal de Crelle,* t. 3.
[2] *Journal de Crelle,* t. 71.
[3] *Mathematische Annalen,* t. 2.
[4] *Annales de l'Ecole Normale,* 2me série, t. XII.

d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, comme la série de Gauss sert à l'intégration d'une équation du second ordre, et occupent ainsi une place déterminée dans l'Analyse (*voir* un Mémoire de Thomae, *Math. Annalen*, t. II). Elles s'imposent à l'attention par plusieurs propriétés intéressantes, parmi lesquelles je citerai celles que Clausen a données dans le tome III du Journal de Crelle, . . .
. . . Partant de ce fait que ma généralisation de la série de Gauss avec un facteur q[1] comprend comme cas particulier les fonctions Θ d'une variable, tandis que les Θ d'ordre supérieur contiennent plusieurs variables, je cherchai une généralisation de la série de Gauss contenant *deux variables* et conservant les propriétés essentielles de la série de Gauss. C'est cette généralisation que M. Appell a trouvée . . .»

Voici maintenant l'analyse des principaux résultats que j'ai obtenus dans cette voie:

Je considère (66) quatre séries F_1, F_2, F_3, F_4, qui peuvent être regardées comme autant de généralisations différentes de la série de Gauss. On le reconnaîtra immédiatement en comparant les termes généraux de ces séries au terme général de la série de Gauss: par exemple, les deux séries que j'appelle $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ et $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ ont respectivement pour terme général

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\cdots(\beta'+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}\frac{x^m}{1\cdot 2\cdots m}\frac{y^n}{1\cdot 2\cdots n},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}\frac{x^m}{1\cdot 2\cdots m}\frac{y^n}{1\cdot 2\cdots n},$$

les entiers m et n variant de 0 à ∞. Ces quatre séries sont convergentes pour des valeurs de x et y dont les modules sont suffisamment petits: ainsi la série F_2 est convergente quand la somme des modules de x et y est inférieure à l'unité, et la série F_4 quand la somme de leurs racines carrées est inférieure à l'unité. Les quatre séries définissent donc des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage des valeurs $x=0$ et $y=0$; comme pour les fonctions de Gauss, les dérivées partielles de ces fonctions sont des fonctions de même nature. Il existe, pour les fonctions de deux variables, un grand nombre de formules semblables à celles que donne Gauss: *Relationes inter functiones contiguas;* puis des formules permettant de transformer ces fonctions, de les ramener les unes aux autres dans

[1] Cette généralisation de Heine consiste à remplacer, dans le terme général de la série de Gauss, un facteur tel que $\alpha+k$ par l'expression $\frac{1-q^{\alpha+k}}{1-q}$ se réduisant à $\alpha+k$ pour $q=1$.

certains cas particuliers. On peut représenter ces fonctions par des intégrales définies qui rappellent l'intégrale définie d'Euler servant à représenter la fonction de Gauss. Ainsi, en faisant

$$f(u, v)=u^{\alpha-1}v^{\beta-1}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1},$$

on trouve que la fonction F_2 est égale à un facteur constant multiplié par l'intégrale définie double

$$\iint (1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}f(u, v)\,du\,dv,$$

prise entre les limites $u\geq 0$, $v\geq 0$, $1-u-v\geq 0$. En partant de cette expression de la fonction F_2, j'étends à cette fonction certaines propriétés que Jacobi a démontrées pour la fonction de Gauss et qui se rattachent au développement de $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ en fraction continue (68).

L'une des propriétés les plus importantes de la fonction de Gauss est qu'elle vérifie une équation linéaire du second ordre: les fonctions de deux variables possèdent une propriété toute semblable. Elles satisfont chacune à deux équations différentielles linéaires simultanées, aux dérivées partielles. Par exemple, la fonction F_2 satisfait aux deux équations différentielles

$$(x-x^2)r-xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\beta yq-\alpha\beta z=0,$$
$$(y-y^2)t-xys+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]q-\beta' xp-\alpha\beta' z=0,$$

où p, q, r, s, t désignent, comme d'ordinaire, les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y. Les équations que vérifient F_3 et F_4 sont du même genre: elles rentrent toutes dans le type d'équations simultanées de la forme

$$r=a_1 s+a_2 p+a_3 q+a_4 z,$$
$$t=b_1 s+b_2 p+b_3 q+b_4 z,$$

où les a et les b sont des fonctions de x et y telles que $(1-a_1 b_1)$ ne soit pas identiquement nul, et où la condition d'intégrabilité est remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. L'étude de ces équations différentielles s'imposait: elle révèle cette circonstance que les propriétés de l'intégrale générale présentent de nombreux points de ressemblance avec celles de l'intégrale générale d'une équation linéaire à une variable indépendante, telles qu'elles résultent des travaux de Fuchs (116). Ainsi, lorsqu'on connait quatre fonctions linéairement indépendantes vérifiant les deux équations simultanées, l'intégrale générale de ces équations est égale à une combinaison linéaire de ces quatre fonctions avec des coefficients constants arbitraires. On peut aussi, comme pour les équations linéaires, montrer que, si les coefficients et la quantité $\frac{1}{1-a_1 b_1}$ sont des fonctions développables en séries convergentes procédant suivant les puissances positives croissantes de $x-x_0$ et $y-y_0$, on pourra satisfaire à ces équations par une fonction z développable de la même façon, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x=x_0$ et $y=y_0$. Enfin, si l'on prend quatre intégrales linéairement indépendantes et si l'on suppose que les variables imaginaires x et y décrivent, dans le plan sur lequel elles sont représentées, des courbes fermées, la valeur finale de chacune de ces intégrales est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des valeurs initiales des quatre intégrales. En appliquant ces théorèmes aux équations simultanées que vérifient respectivement les fonctions F_2, F_3, F_4, on arrive à trouver l'intégrale générale de chacun de ces systèmes d'équations simultanées, exprimée à l'aide de quatre fonctions hypergéométriques particulières. On arrive, en outre, à prolonger chacune de ces fonctions à l'extérieur des régions où les séries définissant primitivement ces fonctions cessent d'être convergentes; ce qui permet d'établir des relations fort nombreuses du genre de celles que Gauss donne dans son Mémoire »*Determinatio seriei nostræ per æquationem differentialem*» et dont Kummer a fait plus tard une étude approfondie.

La fonction F_1 se comporte autrement que les trois autres: elle vérifie *trois* équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre et non *deux* équations seulement. Je démontre, pour ce système d'équations, des théorèmes analogues aux précédents, avec cette différence qu'un système fondamental d'intégrales est formé de trois fonctions au lieu de quatre. Ces équations admettent un grand nombre d'intégrales exprimables à l'aide de la fonction F_1 par des formules telles que

$$x^l (1-x)^m y^p (1-y)^{m'} F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' désignant des fonctions rationnelles et du premier degré de x et y. J'ai indiqué beaucoup de ces intégrales (69); M. Goursat[1] en étudiant la question d'une manière systématique, en a trouvé jusqu'à *soixante*.

[1] *Comptes rendus*, 23 octobre 1882.

Pour achever le résumé des principales propriétés des fonctions hypergéométriques de deux variables, il nous reste à dire un mot des polynômes qui s'y rattachent. On peut exprimer, à l'aide de la fonction F_2, les polynômes qu'Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre et des polynômes cos (n arc cos x) (Comptes rendus, t. LX), les polynômes de plusieurs variables qui ont été étudiés par Didon (t. V, VI, VII des Annales de l'Ecole Normale), et les polynômes que j'ai formés (66)

$$U_{m,n}=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+\gamma-1}y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}\right]}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

analogues aux polynômes de Jacobi; ainsi

$$U_{m,n}=C\,F_2(-m-n,\,m+\gamma,\,n+\gamma',\,\gamma,\,\gamma',\,x,\,y),$$

C désignant une constante connue. Ces polynômes possèdent des propriétés semblables à celles des polynômes d'Hermite et des fonctions Y_n de Laplace; la propriété fondamentale est que l'intégrale double

$$\int\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}\,U_{m,n}\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy,$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites $x=0$, $y=0$, $1-x-y=0$ est nulle, tant que $m+n$ est différent de $\mu+\nu$; cette intégrale, au contraire, n'est pas nulle quand $m+n=\mu+\nu$ et j'indique alors sa valeur. Ces formules permettent de calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables x et y en série procédant suivant les polynômes $U_{m,n}$. Le calcul se simplifie par l'introduction d'un polynôme adjoint exprimable aussi à l'aide de la fonction F_2. Les mêmes propositions s'étendent à des polynômes définis d'une façon plus générale, en ajoutant, dans les polynômes $U_{m,n}$, le facteur $(1-x-y)^\lambda$ en avant du signe de différentiation et le facteur inverse sous le signe de différentiation (70). Elles résultent toutes d'une propriété générale des fonctions satisfaisant à l'équation différentielle unique, obtenue en ajoutant les deux équations différentielles de la fonction F_2, et faisant $\beta+\beta'=\delta$, équation qui est intéressante à étudier pour elle-même et dont un grand nombre d'intégrales s'expriment à l'aide des fonctions F_2 et F_4. Cette propriété est la suivante: Les quantités γ, γ', $1+\alpha+\delta-\gamma-\gamma'$ étant supposées positives, soient z une intégrale de l'équation, et z_1 une intégrale de l'équation obtenue en remplaçant α et δ par $\alpha+\lambda$ et $\delta-\lambda$; l'intégrale double

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy,$$

étendue au même triangle que plus haut est nulle, si les fonctions z et z_1 et leurs dérivées premières restent finies dans les limites d'intégration. Il est intéressant de remarquer que ce théorème comprend, comme cas très particulier, le théorème fondamental relatif aux fonctions $Y_n(\theta, \varphi)$ de Laplace: en effet, l'équation différentielle bien connue, à laquelle satisfont les fonctions Y_n, se ramène à la forme générale précédente par la substitution $\sin\theta \cos\gamma = \sqrt{x}$, $\sin\theta \sin\varphi = \sqrt{y}$; il comprend également, comme cas limite, certaines formules données par Hermite sur les polynômes qui naissent de la différentiation d'une exponentielle dont l'exposant est un polynôme homogène et du second degré en x et y.

Dans les recherches que nous venons d'exposer, les variables x et y sont regardées comme indépendantes. Si on les suppose exprimées en fonction d'une variable t, c'est-à-dire liées par une relation, les quatre fonctions hypergéométriques deviennent des fonctions d'une variable indépendante et vérifient, la première F_1, une équation différentielle linéaire du troisième ordre, les trois autres, F_2, F_3, F_4, des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (131). L'ordre de ces équations peut s'abaisser lorsqu'on établit certaines relations particulières entre x et y. Ainsi la fonction F_4 vérifie une équation du troisième ordre quand $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$; de même F_2 quand $x+y=1$. Ces théorèmes, qui peuvent s'étendre à des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles simultanées, semblables à celles que vérifient nos fonctions, trouvent leur application dans une question posée par Tisserand[1] au sujet d'un développement employé en Mécanique céleste.[2]

Soit $P^{(N)}(p, z)$ le polynôme de degré N en z qui forme le coefficient de Θ^N dans le développement de $(1-2\Theta z+\Theta^2)^{\frac{1-p}{2}}$ effectué suivant les puissances positives de Θ; il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynôme $P^{(N)}(p, z)$ suivant les cosinus des multiples de x et y, quand on pose $z=\mu \cos x+\nu \cos y$.

Tisserand détermine le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ de $4 \cos ix \cos jy$ dans ce développement pour les valeurs $p=2, p=3$; et de plus, il montre que, si p est de la forme $2q+3$, q entier, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$, s'exprime à l'aide d'un polynôme hypergéométrique du second ordre. En calculant directement le coefficient général, j'ai fait voir (73) que,

---

[1] *Comptes rendus*, 15 et 22 octobre 1883.

[2] Voyez aussi un Mémoire de M. RADAU: Sur le développement de l'expression (*Annales de l'Observatoire, Mémoires*, t. XVIII, 1884).

quels que soient le nombre p et les constantes μ et ν, ce coefficient s'exprime à l'aide d'une des fonctions hypergéométriques de deux variables par la formule

$$B_{i,j}^{N,p} = C\mu^i \nu^j F_4\left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right),$$

le facteur C étant une constante dont je donne la valeur; le développement de la fonction F_4 qui figure dans cette expression, s'arrête de lui-même, car le second élément est un entier négatif. Dans la séance du 19 novembre 1883, Radau a communiqué à l'Académie des Sciences de Paris une méthode permettant d'établir rapidement cette même formule. Mais, dans l'application à la Mécanique céleste, que Tisserand avait en vue, μ et ν ne sont pas indépendantes et l'on a

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2}, \qquad \nu = \sin^2\frac{J}{2}, \qquad \mu + \nu = 1.$$

Il est donc important de rechercher quelles simplifications cette relation apporte à l'expression du coefficient $B_{i,j}^{N,p}$. Dans les cas signalés par Tisserand, cette relation permet de le réduire à un polynôme hypergéométrique d'une seule variable du premier ou du second ordre, et, dans ces cas, le coefficient considéré comme fonction de J satisfait à une équation différentielle linéaire du deuxième ou du troisième ordre. Callandreau a montré (Comptes rendus séance du 26 novembre 1883) que, dans le cas général, le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ considéré comme fonction de J vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre, qu'il n'a d'ailleurs pas formée complètement. Au moment où Callandreau a publié cette Note j'étais, de mon côté, arrivé à ce même résultat: je forme (73) cette équation et j'indique les cas dans lesquels elle se réduit au second ordre ou peut être ramenée à celle de la série hypergéométrique d'ordre supérieur.

Dans toutes mes recherches sur mes fonctions hypergéométriques de deux variables, je me suis principalement placé au même point de vue qu'Euler, Gauss, Jacobi, en m'efforçant de montrer que ces fonctions constituent bien l'extension de la fonction de Gauss. Les recherches que M. E. Picard a faites postérieurement, dans une autre direction, sont venues confirmer cette manière de voir. De même que Riemann définit la fonction hypergéométrique de Gauss par ses trois points critiques et les exposants correspondants, M. E. Picard[1] s'est proposé de définir d'une

[1] *Comptes rendus*, mai 1880; *Annales de l'Ecole Normale*, octobre 1881.

façon analogue certaines fonctions de deux variables indépendantes: il retrouve ainsi une de nos fonctions hypergéométrique de deux variables, la fonction F_1. M. Goursat a montré ensuite[1] que les séries F_2 et F_3 sont susceptibles d'une définition analogue.

De nombreux mathématiciens ont généralisé les fonctions sphériques en considérant des potentiels ou des fonctions harmoniques et des formules analogues à la formule de Green, dans l'espace à q dimensions. Les polynômes $V_{m,n}$ qu'Hermite a créés comme généralisation des polynômes de Legendre et associés aux polynômes $U_{m,n}$ peuvent être rattachés à ce point de vue; ce sont de véritables fonctions sphériques sur l'hypersphère dans l'espace à q dimensions.

Les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues peuvent de même être rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace (82). Ces théories ont fait l'objet de nombreuses recherches de M. Kampé de Fériet; elles ont abouti à un ouvrage que je publie chez Gauthier-Villars en collaboration avec lui.

La littérature relative à cette théorie toute française a été exposée par M. Lambert et moi dans un supplément à l'Encyclopédie des Sciences mathématiques.

Calcul approché des intégrales doubles. — Les polynômes à deux variables analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes cos (n arc cos x) découverts par Hermite (Journal de Crelle, t. 64, et Comptes rendus, t. LX) ont conduit Didon à des résultats intéressants, d'une grande généralité, relatifs à des polynomes $U_{m,n}(x, y)$ de degrés $m+n$ tels que l'on ait

$$\iint K(x, y)\, U_{m,n}\, U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

tant que $(m-\mu)^2+(n-\nu)^2$ n'est pas nul, $K(x, y)$ étant une fonction donnée et le champ d'intégration ayant une forme déterminée. Certains de ces polynômes peuvent être rattachés aux séries hypergéométriques de deux variables. Les polynômes de Legendre interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales définies simples et les polynômes plus généraux caractérisés par les conditions

$$\int_a^b K(x)\, P_n(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (n \gtrless \nu),$$

[1] *Comptes rendus*, 13 et 27 novembre 1882.

dans le calcul approché des intégrales de la forme

$$\int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

où $K(x)$ est une fonction donnée, comme l'ont montré Christoffel, Tchebicheff et Heine.

Il y a lieu de penser que les polynômes d'Hermite et les polynômes de Didon interviendront de même dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$I = \iint K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

K étant une fonction déterminée servant à la définition des polynômes et le champ d'intégration ayant une forme donnée.

Je me suis proposé (76) de mettre ce fait en évidence dans des cas simples pouvant servir de types à une théorie générale. J'ai tout d'abord indiqué quelques propriétés nouvelles des polynômes d'Hermite généralisés par Didon, entre autres une liaison très simple entre une certaine forme quadratique et la notion de polynômes associés introduite par Hermite. Puis, arrivant à l'objet principal du Mémoire, je pose le problème comme il suit. Soient K une fonction de x et y gardant un signe constant dans le champ d'intégration et $f(x, y)$ une fonction développable, dans le champ d'intégration, en une série de puissances entières et positives de x et y; pour évaluer l'intégrale double I, je prends un polynôme $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y, contenant par conséquent un nombre $n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ de coefficients, et je détermine ces coefficients par des équations linéaires en exprimant que le polynôme φ prend la même valeur que la fonction f en n points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ situés dans le champ d'intégration et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p: la valeur approchée de l'intégrale est alors

$$J = \iint K \varphi\, dx\, dy.$$

Comme le fait Gauss dans sa méthode d'évaluation approchée des intégrales simples, il s'agit ensuite de déterminer les points (x_i, y_i), de manière à obtenir la plus grande approximation possible, au sens de Gauss. Je forme les équations qui déterminent ces points. Sans entrer dans des détails sur le cas général, je me borne ici à indiquer deux résultats particulièrement simples.

Tout d'abord, le cas le plus simple de tous est le cas de $p=0$, $n=1$. On substitue alors à la fonction $f(x, y)$ une constante égale à la valeur qu'elle prend en un point (x_1, y_1) pour le moment inconnu: il s'agit de déterminer ce point de telle façon que l'erreur commise soit la moindre possible. On trouve que le point doit être choisi au centre de gravité du champ d'intégration, la densité en chaque point étant égale à $K(x, y)$. Si l'on forme le polynôme le plus général *P du premier degré,* s'annulant en ce point on démontre que ce polynôme possède la propriété exprimée par l'équation

$$\iint K P \, dx \, dy = 0;$$

c'est donc le polynôme le plus général du premier degré remplissant les conditions des polynômes de Didon; en l'égalant à zéro, on obtient une droite arbitraire passant par le point fixe cherché.

Voici ensuite un second exemple simple. Supposons que le champ d'intégration soit un cercle de centre O et de rayon 1 et que $K=1$. Prenons trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sur un cercle concentrique, et remplaçons la fonction $f(x, y)$ par un polynôme du premier degré devenant égal à f aux trois points. Pour que l'erreur commise soit la plus petite possible, il faut que les points soient les sommets d'un triangle équilatéral quelconque inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Nous citerons, comme se rattachant à ces recherches, une Note de M. Bourguet (Comptes rendus, 1898, t. 126) et la fin de la thèse de M. Angelesco (Paris 1916).

Fonctions harmoniques de variables réelles.

Théorie générale. — J'ai cherché (120) à étendre les théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable complexe aux fonctions *harmoniques,* c'est-à-dire aux fonctions de trois variables réelles, vérifiant, là où elles existent, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

En convenant de considérer x, y, z comme les coordonnées d'un point M par rapport à trois axes rectangulaires, une fonction F vérifiant l'équation $\Delta F=0$ pourra être définie dans tout l'espace ou seulement dans une portion de l'espace en exceptant certains points, ou certaines lignes ou certaines surfaces. La théorie de ces fonctions se rapproche tout naturellement de celle des fonctions d'une variable imaginaire $u=x+iy$, si l'on se rappelle que la partie réelle d'une fonction analytique de $x+iy$ vérifie une équation aux dérivées partielles analogue, mais à deux termes seulement. Thomson et Tait ont montré qu'il existe une suite de fonctions harmoniques $V_\nu(x, y, z)$ définies pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de l'indice ν homogènes et du degré ν en x, y, z. Ces fonctions jouent, dans la présente théorie, le même rôle que la partie réelle de l'expression $(a+ib)(x+iy)^\nu$ dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Par exemple, une fonction harmonique uniforme, finie et continue dans l'intérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine, y est développable en une série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs; une fonction harmonique uniforme finie et continue entre deux sphères ayant pour centre commun l'origine, est développable dans cet espace en une double série procédant suivant les fonctions V_ν à indices positifs et négatifs; théorèmes tout semblables à ceux de Cauchy et de Laurent pour les fonctions d'une variable imaginaire. Je montre (119), en général, qu'il existe des développements en série, propres à représenter une fonction harmonique uniforme et admettant des dérivées en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques, développements qui présentent les mêmes particularités que ceux que j'ai donnés pour des fonctions analytiques d'une variable, holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercle. Je déduis ces propositions du théorème de Green.

Prenant ensuite une fonction harmonique finie, continue et uniforme dans tout l'espace, sauf en certains points singuliers, je m'occupe d'abord de classer ces points en pôles et points singuliers essentiels; ce qui se fait aisément à l'aide des fonctions V_ν; puis je définis le *résidu* de la fonction en un pôle ou en un point essentiel isolé. Les points singuliers étant ainsi classés, j'indique l'expression la plus générale d'une fonction n'ayant que des pôles: une fonction de cette nature doit être regardée comme analogue à la partie réelle d'une fonction rationnelle d'une variable imaginaire: elle est égale à une somme de fonctions de la forme $V_\nu(x-a, y-b, z-c)$ à indices positifs ou négatifs. En supposant ensuite une fonction qui possède un nombre fini de points singuliers, parmi lesquels des points singuliers essentiels, je donne l'expression générale de cette fonction sous forme d'une somme de fonctions n'ayant chacune qu'un point singulier. Je démontre enfin, pour les fonctions harmoniques uniformes, un théorème analogue à celui de Cauchy sur la somme des résidus relatifs aux pôles situés dans un contour, et un théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler fournissant l'expression d'une fonction harmonique ayant pour pôles, un nombre infini de points donnés, avec des parties principales assignées à l'avance.

Fonctions harmoniques à un, deux ou trois groupes de périodes. — Pour appliquer ces théorèmes généraux à des exemples intéressants par eux-mêmes, j'ai fait (120) une étude générale des $F(x, y, z)$ admettant trois groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''); j'entends par là que ces fonctions prennent aux points $(x+a,\ y+b,\ z+c)$, $(x+a',\ y+b',\ z+c')$, $(x+a'',\ y+b'',\ z+c'')$ les mêmes valeurs qu'au point (x, y, z). On peut représenter cette propriété par l'image géométrique suivante. Considérons les trois segments de droites partant de l'origine pour aboutir aux trois points (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') et, sur ces trois segments, construisons un parallélépipède; sur les faces de ce parallélépipède, plaçons des parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon; puis, faisons la même opération pour les nouveaux parallélépipèdes et ainsi de suite, indéfiniment, de manière à remplir tout l'espace d'un réseau de parallélépipèdes égaux et orientés de la même façon, se touchant par leurs faces égales. La fonction F possède cette propriété, qu'elle reprend les mêmes valeurs aux points placés de la même façon dans tous ces parallélépipèdes. Il suffira, d'après cela, de connaître la fonction F dans un de ces parallélépipèdes que nous appelons *parallélépipède élémentaire,* pour la connaître dans tout l'espace. On voit que ces fonctions sont semblables à la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire $u=x+iy$, qui reprend les mêmes valeurs aux points d'un plan placés de la même façon dans un réseau de parallélogrammes. Cette similitude se poursuit dans la plupart des propriétés; ainsi:

Une fonction à 3 groupes de périodes finie en tous les points d'un parallélépipède élémentaire, est une constante. Si la fonction admet dans un parallélépidède élémentaire un nombre fini de points singuliers, la somme des résidus relatifs à ces points est nulle.

Jusqu'ici ces fonctions sont conçues seulement *in abstracto* il s'agit d'avoir leurs expressions analytiques. Pour cela, je commence par construire, à l'aide d'une série, une fonction $Z(x, y, z)$ vérifiant l'équation du potentiel et présentant la plus grande analogie avec la fonction $Z(u)=\frac{H'(u)}{H(u)}$, à l'aide de laquelle on peut, comme l'a montré Hermite, représenter toutes les fonctions *elliptiques.* La fonction $Z(x, y, z)$ nous permettra, de même, de représenter toutes les fonctions à trois groupes de périodes ayant dans un parallélépipède un nombre fini de points singuliers: elle est essentiellement définie par la condition d'avoir, pour pôles du premier degré avec le résidu $+1$, *tous les sommets du réseau des parellélépipèdes.* Par l'application du théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler, j'arrive à écrire cette fonction sous forme d'une série qui converge absolument, c'est-à-dire indépendamment de l'ordre dans lequel on prend ses termes. Cette fonction n'admet pas les groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), pas plus que la fonction $Z(u)$ n'admet les deux périodes des fonctions elliptiques; elle vérifie des équations de la forme suivante

$$Z(x+a, y+b, z+c)-Z(x, y, z)=Ax+By+Cz+E,$$

les lettres A, B, C, E désignant des constantes qui dépendent des neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$; ces constantes sont liées par des relations que l'on établit *à priori* et qui permettent de les calculer dans certains cas, autrement que par des séries, par exemple dans le cas où les parallélépipèdes élémentaires sont des *cubes* (119). La fonction $Z(x, y, z)$ une fois construite, on a très simplement l'expression d'une fonction à 3 groupes de périodes n'ayant que des pôles, par une somme composée de fonctions Z et de leurs dérivées. On peut remplacer Z par une fonction à trois groupes de périodes, mais non harmonique (125). Je donne ensuite l'expression d'une fonction à trois groupes de périodes avec un nombre fini de points singuliers parmi lesquels il y a des points essentiels, puis j'étends à ces fonctions certains résultats que j'avais démontrés auparavant pour les fonctions doublement périodiques. Lorsque l'on fait croître indéfiniment une ou deux dimensions des parallélépipèdes élémentaires, on obtient des fonctions n'ayant que *deux* ou *un* groupe de périodes: parmi ces dernières se trouve une fonction qui a été employée par Chervet pour exprimer le potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles, et traversée par un flux permanent d'électricité. J'ai donné depuis d'autres applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à des questions de *Physique mathématique* du même genre (238): ces applications se trouvent analysées plus loin.

Dans la théorie des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable, les expressions de ces fonctions par des séries simples de sinus et de cosinus sont de la plus haute importance, principalement pour les applications. Je me suis proposé (121), (122), de développer, de la même façon, les fonctions vérifiant l'équation $\Delta F=0$ et admettant *un*, *deux* ou *trois groupes de périodes.* La possibilité de ces développements est certaine d'après le théorème de Fourier.

De même que, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans le plan comme $\cot u$ ou snu; dans la théorie des fonctions harmoniques de trois variables x, y, z, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes en tous les points à distance finie, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace, le mot *pôle* étant employé ici dans le sens que nous lui avons donné précédemment. Ces fonctions périodiques se présentent dans la résolution de différentes questions de Physique mathématique, ainsi qu'il résulte d'une remarque de Riemann[1], de plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences par M. M. Boussinesq[2], de Saint-Venant et Flamant[3], et Chervet[4]. Les développements en séries trigonométriques indiqués se prêtent facilement au calcul numérique; ils présentent une grande analogie avec ceux des fonctions simplement et doublement périodiques d'une variable complexe. Les fonctions dont est donné le développement sont les suivantes:

1°. D'abord une fonction C_1 ayant pour pôles les points de l'axe Ox d'abscisses ma (m entier). Cette fonction est développable en une série procédant suivant les cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$; le coefficient du terme général s'exprime à l'aide d'une intégrale définie qui se rattache aux fonctions de Bessel et qui a été employée par Riemann dans la solution d'une question de Physique mathématique: *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe*[5]. La fonction que Riemann introduit pour résoudre ce problème est une combinaison linéaire des fonctions C_1; de même la fonction introduite par Chervet[6], dans un autre problème de Physique, est une différence de deux fonctions C_1. Un autre mode de développement de cette fonction a été donné par Lerch (Journal de Jordan, fasc. IV, 1899).

2°. La seconde fonction C_2 a pour pôles les points du plan xOy de coordonnées ma et nb (m et n entiers); elle se présente dans différentes questions de Physique, notamment dans la détermination du potentiel en un point d'une masse

[1] *Schwere, Electricität und Magnetismus,* bearbeitet von HATTENDORFF, p. 84.
[2] 3, 31 janvier, 30 mai 1870.
[3] 3, 10, 24 avril 1882; 12, 19 novembre 1883.
[4] 24 septembre 1883; 11 février 1884.
[5] RIEMANN's *Gesammelte mathematische Werke,* p. 54.
[6] *Comptes rendus,* 24 septembre 1883.

fluide indéfinie, ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, traversée par un flux d'électricité (239), ou dans l'évaluation des vitesses aux différents points d'un liquide qui s'écoule par le fond d'un vase prismatique à base rectangle[1], enfin dans la détermination de la fonction de Green pour un prisme droit indéfini à base rectangle. Dans tout l'espace situé d'un même côté du plan des coordonnées xOy, par exemple pour toutes les valeurs positives de z, cette fonction et toutes ses dérivées sont développables en séries trigonométriques, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$ et $\frac{2\pi y}{b}$. Les coefficients des deux développements précédents s'obtiennent à l'aide d'une formule tirée de la théorie des fonctions Θ.

3°. Enfin la troisième fonction (240) est la fonction $Z(x, y, z)$ qui sert à former des potentiels à trois groupes de périodes, avec cette restriction que les parallélépipèdes élémentaires sont rectangles. Cette fonction intervient dans l'expression de la fonction de Green dans l'intérieur d'un parallélépipède rectangle ou du potentiel d'une masse liquide traversée par un flux permanent d'électricité et ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Je donne un développement de cette fonction en série trigonométrique, valable en tous les points de l'espace compris entre deux faces opposées d'un des parallélépipèdes élémentaires, ces faces étant prolongées indéfiniment: les coefficients de ce développement s'obtiennent, sous forme finie, par l'application des théorèmes généraux relatifs aux fonctions vérifiant l'équation $\Delta V = 0$. Ce développement, qui se rapproche de celui de $\log \Theta(x+yi)\,\Theta(x-yi)$, s'appliquera, par exemple, à l'expression de la fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, telle qu'elle a été donnée par Riemann.

Potentiels multiformes. — Les fonctions précédentes sont des fonctions harmoniques *uniformes* de trois variables réelles. A la suite d'une conversation dans laquelle le professeur M. Klein, de l'Université de Göttingen, m'avait parlé de l'intention qu'il avait d'étudier les fonctions harmoniques non uniformes, analogues aux parties réelles des fonctions algébriques d'une variable complexe, je lui communiquai (126) l'exemple suivant d'une fonction de ce genre. La partie réelle de

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a-ia')^2+(y-b-ib')^2+(z-c-ic')^2}},$$

[1] Voyez différentes Notes de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 31 janvier, 30 mai 1870).

où $x, y, z, a, b, c, a', b', c'$ sont réels, est une fonction $W(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta W = 0$ et admettant, pour ligne singulière, un cercle; lorsque le point x, y, z partant d'une position (x_0, y_0, z_0) décrit une courbe fermée C revenant en ce point, la fonction W reprend ou non sa valeur initiale, suivant que la courbe C passe un nombre pair ou impair de fois dans le cercle. On a bien là une propriété analogue à celle de la fonction algébrique $\sqrt{u-a}$ d'une variable complexe u.

Equations différentielles à une variable indépendante — Invariants.

Equations différentielles linéaires à une variable indépendante. — Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées. Ainsi Lagrange a démontré que, si l'on connaît une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire, on peut abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, de même que l'on peut diminuer d'une unité le degré d'une équation algébrique dont on connaît une racine. La théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes et celle de l'élimination ont conduit Libri, Liouville, Brassinne à des théories analogues sur les équations différentielles linéaires; et ces questions ont été reprises et complétées par Thomé et Frobenius (Journal de Crelle, t. 74 et suivants); Frobenius a introduit la notion de l'irréductibilité des équations différentielles linéaires (Journal de Crelle, t. 76) et a démontré, à ce sujet, plusieurs théorèmes importants suggérés, sans doute, par les théorèmes analogues de la théorie des équations algébriques. La décomposition des polynômes en facteurs a été l'origine de la théorie de la décomposition du premier membre d'une équation différentielle linéaire en facteurs premiers symboliques (Floquet, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, année 1879; Supplément). Le Mémoire fondamental de Fuchs (Journal de Crelle, t. 66) qui depuis a été exposé et complété par Tannery (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, année 1874) et qui a pour objet l'étude des fonctions définies par une équation différentielle linéaire, présente plus d'une analogie avec le Mémoire célèbre de Puiseux *Sur les fonctions algébriques* (Journal de Mathématiques, t. XV). Enfin, dans un autre ordre d'idées, la théorie des invariants des formes algébriques a été étendue aux équations différentielles linéaires, dans deux Notes présentées par Laguerre à l'Académie (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII, p. 116 et 224), dans une Communication de Brioschi à la Société Mathématique de France (Bulletin, t. VII) et dans le Mémoire couronné d'Halphen

Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (Journal des Savants étrangers, t. XXVIII, N° 1).

Mais il restait une partie des plus importantes de la théorie des équations algébriques qui n'avait pas encore son analogue dans la théorie des équations différentielles linéaires: je veux dire la partie qui traite des fonctions symétriques des racines d'une équation, de la transformation des équations et de l'extension des théories de Galois. C'est ce nouveau Chapitre de la théorie des équations différentielles linéaires que j'ai commencé en m'occupant de l'extension des théorèmes sur les fonctions symétriques et sur la transformation.

J'ai eu d'abord à m'occuper de chercher quelles sont les fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire qui sont analogues aux fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Soient $y_1, y_2, \ldots y_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n; les fonctions, analogues aux fonctions symétriques, sont des fonctions algébriques entières de $y_1, y_2, \ldots y_n$ et de leurs dérivées qui se reproduisent multipliées par un facteur constant différent de zéro, quand on remplace $y_1, y_2, \ldots y_n$ par les éléments $z_1, z_2, \ldots z_n$ d'un autre système fondamental. Je forme l'expression générale de ces fonctions et je démontre le théorème fondamental (97, 103) analogue au théorème sur les fonctions symétriques: *Soit*

$$\frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \cdots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre; toute fonction algébrique entière de $y_1, y_2, \ldots y_n$ *et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant quand on remplace ces fonctions par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées, multipliée par une puissance de* $e^{-\int a_1 dx}$.

Comme applications, il convient de citer: 1° une méthode d'élimination de la fonction entre deux équations différentielles linéaires, semblable à l'élimination algébrique par les fonctions symétriques (103); 2° une méthode générale de formation de certains invariants et semiinvariants des équations différentielles linéaires, à savoir ceux qu'il faut égaler à zéro pour exprimer qu'il y a, entre les éléments d'un système fondamental, une relation algébrique à coefficients constants (103); 3° une méthode générale pour la transformation des équations différentielles linéaires; 4° l'intégration de certaines équations linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique.

Ces méthodes sont applicables à une classe d'équations différentielles linéaires, à coefficients doublement périodiques, dont on peut toujours trouver l'intégrale générale.

Equations différentielles linéaires à coefficients algébriques. — Supposons que, dans une des équations de M. E. Picard à coefficients doublement périodiques, on remplace la variable indépendante par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante; on formera une équation, à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale n'aura d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques algébriques et pourra s'exprimer par des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles ayant pour exposants certaines intégrales elliptiques de première et troisième espèce. Présenté de cette façon, le théorème démontré par M. E. Picard peut être généralisé de la manière suivante (98).

Soit une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique $F(x, y)=0$ de genre p. Je suppose que l'intégrale générale n'ait d'autres points critiques que des pôles ou des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction algébrique y de x; je suppose, de plus, que ces coefficients remplissent des conditions telles que la variation éprouvée par l'intégrale générale, quand le point analytique (x, y) parcourt deux cycles successifs, soit indépendante de l'ordre de succession de ces cycles. Sous ces conditions, l'équation a, pour intégrale particulière, une exponentielle dont l'exposant est composé linéairement avec des intégrales abéliennes de première et troisième espèce, attachées à la courbe algébrique $F(x, y)=0$. Cette intégrale particulière étant déterminée, l'intégration de l'équation linéaire se ramènera à celle d'une équation d'ordre $(n-1)$ à laquelle on pourra appliquer le même théorème et qui admettra une intégrale de la même forme, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'équation soit intégrée. Mais ce résultat est purement théorique car il n'existe pas actuellement de méthode permettant de reconnaître que l'intégrale ne change pas quand on change l'ordre de succession des cycles.

En laissant de côté cette condition de permutabilité des cycles, et imposant seulement aux coefficients de l'équation différentielle des conditions telles que l'intégrale générale n'ait d'autres points singuliers que des pôles, des points critiques algébriques et des points critiques logarithmiques, on peut classer les équations différentielles remplissant ces conditions en trois espèces correspondant aux trois espèces d'intégrales abéliennes (101). Les équations de première espèce sont celles dont l'intégrale générale *reste partout finie;* la deuxième espèce comprend les équations dont l'intégrale devient infinie, mais seulement à la manière d'une fonction algébrique; enfin la troisième espèce comprend celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques. On se trouve alors en présence de ces questions, qu'on peut résoudre à l'aide des principes de Fuchs: une relation algébrique $F(x, y)=0$ étant donnée, former, parmi les équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients rationnels en x et y, les équations les plus générales de première, de seconde et troisième espèce avec des points singuliers donnés. Ces questions ont été traitées en partie par M. Suchar (Journal de Mathématiques de Jordan, 1902).

Parmi les équations linéaires à coefficients algébriques, j'ai étudié encore (104) des équations différentielles linéaires binômes de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k}=\psi(x, y)\, z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y, la variable y étant liée à x par une équation algébrique de genre p. J'indique le moyen de reconnaître si une de ces équations admet pour intégrale particulière une exponentielle dont l'exposant est une intégrale abélienne, et de trouver cette intégrale si elle existe. En appliquant la méthode générale aux cas $p=0$ ou $p=1$, j'arrive ainsi à intégrer une classe nouvelle d'équations linéaires à coefficients rationnels ou doublement périodiques, dans des cas où l'intégrale générale peut n'être pas uniforme et admettre des points singuliers essentiels. La méthode que j'emploie est basée sur les formules de décomposition en éléments simples, d'après la formule d'Hermite et la formule générale de Riemann-Roch.

Equations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes. — Les équations différentielles linéaires, à coefficients simplement ou doublement périodiques, sont caractérisées par ce fait qu'elles ne changent pas de forme, quand on augmente la variable indépendante d'une ou de deux périodes. On peut concevoir des équations différentielles linéaires possédant une propriété du même genre, mais beaucoup plus générale, et en conclure la propriété suivante d'une de leurs intégrales (108). Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n définissant u en fonction de z; je suppose qu'en changeant la fonction et la variable indépendante, c'est-à-dire en posant $z'=\varphi(z)$, $u'=u\,\psi(z)$, on puisse déterminer les deux fonctions φ et ψ de telle façon que l'équation entre u' et z' reprenne la forme primitive. Il existe alors une intégrale particulière $u=F(z)$ de l'équation proposée, qui vérifie la relation

$$F[\varphi(z)]=A\,\psi(z)\,F(z),$$

A étant une constante. Dans le cas où $n=2$, ces deux fonctions φ et ψ existent toujours, et l'on obtient des résultats déjà signalés par Kummer dans son Mémoire sur la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ et étendus depuis par divers géomètres entre autres par Brioschi. Des équations fonctionnelles de ce genre ont été étudiées par Abel, par Schroeder, Korkine et enfin par M. Koenigs[1] à qui l'on doit d'importants théorèmes sur l'existence et l'expression générale des solutions holomorphes de certaines équations fonctionnelles. Ces théorèmes permettent d'étudier et d'intégrer des équations linéaires spéciales rentrant dans le type précédent.

J'admets, avec M. Koenigs, que la fonction $\varphi(z)$ est uniforme dans l'intérieur d'une région R du plan et jouit de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1=\varphi(z)$; alors, si l'on pose généralement $z_{i+1}=\varphi(z_i)$, les points de la suite $z, z_1, z_2, \ldots z_p$, sont tous à l'intérieur de la région R: ils doivent converger régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point singulier essentiel, et qui est un zéro de la fonction $z-\varphi(z)$. Ces conditions étant remplies, je suppose que les coefficients de l'équation différentielle sont *holomorphes ou méromorphes au point limite*, hypothèse qui écarte les équations dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions fuchsiennes. Je montre (108) et (109) que toutes ces équations sont intégrables à l'aide de la fonction $B(z)$ introduite par M. Koenigs, et même qu'elles peuvent, par une substitution convenable, être ramenées à avoir leurs coefficients constants. Cette substitution est celle qu'Halphen a employée (Mémoire couronné, *Savants étrangers*, t. XXVIII) pour ramener l'équation à la forme qu'il nomme *canonique:* l'application des théorèmes de M. Koenigs montre que cette forme canonique est à *coefficients constants.*

Lorsqu'on prend le cas particulier où

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

[1] Recherches sur les substitutions uniformes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883); Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles (*Annales de l'Ecole Normale*, année 1884, supplément); Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles (ibid., novembre 1885).

les équations que l'on obtient sont celles qui ont été intégrées par Halphen (Comptes rendus, t. XCII, p. 779).

On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations non linéaires; par exemple, aux équations considérées par Abel[1], par M. R. Liouville[2], par Elliot[3], par Rivereau[4], et par nous-même (110).

Ainsi, les équations homogènes mais non linéaires par rapport à la fonction inconnue u et à ses dérivées $\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable

$$u' = u\,\psi(z), \qquad z' = \varphi(z).$$

Il pourra arriver qu'un choix convenable des fonctions φ et ψ les transforme en elles-mêmes. Si la fonction $\varphi(z)$ remplit les conditions supposées par M. Koenigs et si les coefficients de l'équation sont holomorphes ou méromorphes au point limite x, la considération des invariants permet d'étendre à ces équations une notable partie des résultats précédents.

Equations différentielles non linéaires. Equations réductibles à des équations linéaires. — Parmi les équations différentielles non linéaires, j'ai étudié une classe étendue d'équations *réductibles aux équations linéaires* (107). Ce sont les équations différentielles qui sont algébriques par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées $y', y'', \ldots y^{(n)}$, qui contiennent d'ailleurs la variable indépendante x d'une façon quelconque et dont l'intégrale générale s'obtient, en prenant l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $(n+1)$, et en établissant une relation algébrique entre les constantes arbitraires qui figurent dans cette dernière intégrale. J'indique le moyen de reconnaître si une équation différentielle donnée possède cette propriété et de l'intégrer dans le cas de l'affirmative. On a le théorème suivant:

Pour qu'une équation différentielle

$$\psi(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, x) = 0$$

[1] *Oeuvres,* t II, p. 19 et 26.

[2] *Comptes rendus,* 1886 et 1887.

[3] Ibid., 1890, premier semestre.

[4] Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 1890. Gauthier-Villars.

algebrique entière et irréductible par rapport à une fonction y de x et à ses dérivées admette une intégrale de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n+1} y_{n+1},$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ *désignent* $(n+1)$ *fonctions de x linéairement indépendantes et* $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ *des constantes liées par une relation algébrique entière, il faut et il suffit qu'il existe une fonction* λ *de x telle que l'expression*

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs dont l'un soit linéaire et homogène en $y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}$.

Ce dernier facteur, égalé à zéro, donnera une équation différentielle linéaire ayant pour intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$; l'autre facteur, qui est égal à $\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n)}}$ pourra donner des intégrales singulières.

Equations différentielles intégrables à l'aide des fonctions Θ de plusieurs variables. — Le théorème de Riemann, donnant les zéros des fonctions Θ, permet de former des équations différentielles algébriques intégrables à l'aide de ces fonctions (94). Prenons, pour simplifier, le cas d'une fonction $\Theta(x, y)$ de deux variables, formée avec les périodes normales des deux intégrales ultra-elliptiques normales de première espèce

$$\int \frac{\alpha u + \beta}{\sqrt{f(u)}} du, \qquad \int \frac{\alpha' u + \beta'}{\sqrt{f(u)}} du,$$

$f(u)$ désignant un polynôme du cinquième degré

$$f(u) = (a_1 u + b_1)(a_2 u + b_2) \cdots (a_5 u + b_5).$$

Puis, considérons l'équation

$$\Theta(x + A, y + B) = 0,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Cette équations définit y en fonction de x; si l'on veut employer un langage géométrique, on peut dire que cette équation définit, par rapport à deux axes rectangulaires, une infinité de courbes qui se transportent parallèlement à elles-mêmes quand les constantes varient. On formera l'équation différentielle du second ordre de toutes ces courbes, en éliminant A et B entre l'équation ci-dessus et ses deux premières dérivées. L'équation différentielle ainsi formée est *algébrique;* la voici:

$$(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2=\sqrt{(\alpha\,dy-\alpha'\,dx)(\lambda_1\,dy-\mu_1\,dx)\cdots(\lambda_5\,dy-\mu_5\,dx)},$$

où

$$\lambda_i=\alpha\,b_i-\beta\,a_i,\qquad \mu_i=\alpha'\,b_i-\beta'\,a_i.$$

Cette proposition peut s'étendre à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Sur une application du théorème de Poisson. — Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris et dans une Thèse »*Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe*» (Naud, 1901), M. Buhl a indiqué comme extension du théorème de Poisson, la proposition suivante:

Etant donné un système d'équations différentielles simultanées tel que

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{1}$$

où les X sont fonctions des x, il existe des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ des x, telles que, si Φ est une intégrale première du système, l'expression

$$\gamma_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\gamma_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\cdots+\gamma_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}$$

en est une autre.

Je montre (115) que ce théorème peut être déduit du théorème de Poisson, en me servant de la réduction du système (1) à la forme canonique donnée par Liouville.

Invariants des équations différentielles. — On sait que Laguerre a le premier introduit l'idée des invariants d'une équation différentielle linéaire. Il est une classe d'équations qui, à ce point de vue, se présentent tout naturellement après les équations différentielles linéaires et homogènes; c'est la classe des équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, *mais non linéaires* (110), le degré d'homogénéité étant quelconque. Ces équations partagent, avec les équations différentielles linéaires et homogènes, cette propriété, qu'elles conservent la même forme quand on prend une nouvelle variable indépendante ou qu'on multiplie la fonction inconnue par un facteur quelconque. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire les invariants de l'équation différentielle. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, commencée par Laguerre[1] et Brioschi[2] a reçu son complet développement dans le Chapitre III du Mémoire de Halphen: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.*[3] M. Roger Liouville[4] a étudié à différents points de vue les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+a_0 y^3+3\,a_1 y^2+3\,a_2 y+a_3=0.$$

L'idée générale et le fait de l'existence des invariants ont été mis en lumière par Sophus Lie dans son Ouvrage, *Theorie der Transformations-Gruppen,* par Halphen dans une Lettre à Sylvester[5] et par M. Goursat.[6]

Je me suis proposé d'abord de traiter la théorie des invariants des équations différentielles homogènes mais non linéaires, et je me suis attaché presque exclusivement aux équations du second ordre et du second degré, en donnant des méthodes qui puissent s'étendre aux ordres et degrés supérieurs. L'équation générale homogène et du second degré par rapport à une fonction y et à ses dérivées premières et secondes y', y'' est de la forme

$$a_0 y''^2+a_2 y'^2+a_4 y^2+2\,b_1 y' y''+2\,b_2 y y''+2\,b_3 y y'=0,$$

les coefficieuts $a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3$ étant des fonctions de la variable indépendante x. Au point de vue de la théorie des invariants, ces équations se divisent en trois classes, suivant la façon dont la dérivée y'' figure dans l'équation. Dans la premère classe se trouvent les équations pour lesquelles a_0 et b_1 sont nuls; dans la deuxième, celles pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro; dans la troisième se trouvent les équations dans lesquelles a_0 est différent de zéro. Cette classification se trouve justifiée par ce fait que le changement de

[1] *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

[2] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.

[3] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, N° 1.

[4] *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 283.

[5] *American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 137.

[6] *Comptes rendus*, 3 décembre 1888.

fonction et de variable transforme une équation d'une classe en une autre de la même classe. Après avoir montré que les équations de la première classe peuvent toujours être transformées en équations *linéaires* du second ordre, j'indique (112), pour les équations des deux autres classes, un moyen simple de former *tous leurs invariants*. Pour cela je réduis ces équations à une forme canonique contenant, pour la seconde classe, *deux invariants absolus*, et pour la troisième *trois*. Tous les autres invariants sont alors des fonctions rationnelles de ces invariants absolus et de leurs dérivées successives par rapport à la variable canonique. Comme application, j'indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une de ces équations soit réductible à une autre de même forme à coefficients *constants*, ou pour qu'elle admette un facteur intégrant: ces conditions s'obtiennent en égalant certains invariants à zéro. Dans les équations de la troisième classe, j'étudie en détail celles dont l'intégrale générale est un trinôme homogène du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires. On reconnaît qu'une équation possède cette propriété en vérifiant que deux invariants sont nuls; l'intégration est alors facile; à côté de l'intégrale générale, l'équation admet, dans ce cas, *deux intégrales singulières*. Ces recherches ont été étendues à d'autres équations analogues par Rivereau dans sa thèse de Doctorat (Gauthier-Villars, 1890).

Parmi les équations différentielles homogènes d'un ordre et d'un degré quelconques, les plus simples sont les équations à *coefficients constants*. Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut en trouver des solutions ayant la forme spéciale Ce^{rx}. Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières:* on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire. Je donne (113) la solution de cette question pour les équations différentielles homogènes du second ordre de degré arbitraire. Certaines de ces intégrales peuvent être *particulières*, d'autres *singulières:* j'indique un moyen simple de les distinguer les unes des autres. Il peut arriver que, dans des cas limites, les intégrales de la forme Ce^{rx} soient toutes particulières ou toutes singulières. Je traite, en particulier, à titre d'exemple, le cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré qui admet quatre solutions de la forme Ce^{rx}: lorsque deux de ces solutions sont singulières, l'intégrale générale est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires.

J'ai également étudié (112) les invariants des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \cdots + b_p y^p} \qquad (p < n),$$

qui conservent la même forme, quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et à x par les relations

$$y = \eta u + v, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu,$$

u, v et μ désignant des fonctions indéterminées de x. On obtient encore, d'une façon simple, les invariants de ces équations relatifs à ce changement de fonction et de variable, en réduisant l'équation à une forme canonique dont les coefficients sont des invariants absolus: un invariant quelconque est alors une fonction de ces invariants absolus et de leurs dérivées par rapport à la variable canonique. Comme application, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation puisse être réduite à une autre de même forme à coefficients constants, dont l'intégration se ramène immédiatement aux quadratures. Si on laisse de côté l'équation linéaire et l'équation de Riccati, l'équation la plus simple de l'espèce considérée ($n = 3, p = 0$) a déjà été étudiée par M. Roger Liouville.[1] Je montre qu'on peut la ramener à une forme canonique ne contenant qu'un invariant absolu, dont le numérateur est un invariant relatif donné par M. R. Liouville. On peut écrire les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent lier les coefficients de l'équation primitive pour qu'elle soit réductible à une forme canonique donnée: on arrive, de cette façon, à exprimer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir ces coefficients pour que l'équation soit réductible à certaines formes intégrables. On peut ramener à ce type ($n = 3, p = 0$) l'équation différentielle classique qui, pour le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, donne la vitesse v en fonction de l'angle α de la vitesse avec l'horizon (Voyez mon Traité de Mécanique, 2me édition, p. 354).

Equations aux dérivées partielles.

J'ai étudié certaines équations particulières aux dérivées partielles sans m'occuper de la théorie générale de ces équations.

---

[1] *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887.

1°. **Equations hypergéométriques à deux variables.** — Dans mes recherches sur les fonctions hypergéométriques de deux variables, j'ai été amené à m'occuper de l'équation

$$(x-x^2)\,r+(y-y^2)\,t-2\,x\,y\,s+[\gamma-(\alpha+\delta+1)\,x]\,p+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)\,y]\,q-\alpha\,\delta\,z=0,$$

qui comprend, comme cas très particulier, l'équation des fonctions Y_n de Laplace.

2°. **Equation d'Euler et de Laplace.** — A la suite d'une Note de Darboux[1], je me suis occupé (118) de l'équation

$$E(\beta,\beta') \qquad\qquad (x-y)\,r-\beta'\,p+\beta\,q=0$$

qui a été traitée par Laplace et dont un cas particulier $\beta'=\beta$ s'était déjà présenté dans les recherches d'Euler relatives à la propagation du son. C'est également à ce cas particulier que se rapportent les résultats que Darboux a indiqués et que je me suis proposé d'étendre à l'équation générale. Après avoir établi le théorème suivant

Si l'on a obtenu une solution quelconque $\varphi(x,y)$ de l'équation $E(\beta,\beta')$, on pourra en déduire la solution plus générale

$$(a\,x+b)^{-\beta}\,(a\,y+b)^{-\beta'}\,\varphi\left(\frac{c\,x+d}{a\,x+b},\ \frac{c\,y+d}{a\,y+b}\right)$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques,

j'indique des solutions particulières de l'équation exprimées par des séries hypergéométriques, la solution *entière* la plus générale et enfin une forme particulièrement simple de l'intégrale générale pour le cas où β et β' sont deux nombres entiers de même signe. Poisson a donné, dans le cas où β et β' sont égaux, une forme de l'intégrale générale qui contient deux fonctions arbitraires sous des signes d'intégration définie; j'ai étendu cette formule de Poisson au cas où β et β' sont quelconques (voir Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces* 2e vol., Chap. III et IV). L'équation $E(\beta,\beta')$ a été signalée par Lie comme le type des équations linéaires du second ordre admettant trois transformations infinitésimales. Elle se présente dans la théorie de la fonction hypergéométrique F_1.

---

[1] *Comptes rendus*, t. XCV, p. 69, 10 juillet 1882.

Equation de la propagation de la chaleur. — L'équation $\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ qui se présente dans la théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère[1], elle a été étudiée en détail par Riemann dans son ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique[2], et par Schlaefli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle.* Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale (Calcul intégral, compléments).* Citons encore M^me^ Kowalevski[3] qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, en montrant qu'il n'existe pas toujours une intégrale z qui, pour $y=0$ se réduise à une fonction donnée de x: par exemple, cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{1-x}$ pour $y=0$. Darboux[4] a rappelé cet exemple de M^me^ Kowalevski à propos d'une Note de Méray[5] sur un fait de même nature. L'équation $\delta z=0$ constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants dans le cas *parabolique*, comme on le verra dans un Mémoire de du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104).

J'ai étudié (237) cette équation au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y, z réels et en m'inspirant des méthodes de Riemann. Je traite d'abord les questions suivantes:

1°. *Chercher toutes les transformations de la forme*

$$z=\lambda(x, y)\, z', \qquad x'=\varphi(x, y), \qquad y'=\psi(x, y),$$

qui ramènent l'équation à la même forme.

On trouve que la relation entre x, y et x', y' définit une transformation homographique du plan qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel. Ce résultat a été généralisé par Lacour dans sa thèse de Doctorat et par Boulanger (Bulletin de la Société mathématique 1899).

---

[1] *Journal de l'Ecole Polytechnique,* t. X, p. 587.

[2] *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen,* p. 107, 122; 1869.

[3] *Journal de Crelle,* t. 80, p. 22.

[4] *Comptes rendus,* t. CVI, p. 651.

[5] *Ibid.,* p. 648.

2°. *Trouver tous les polynômes vérifiant l'équation.* — Ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable qu'Hermite[1] a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-u^2}.

Me servant ensuite d'une formule analogue à la formule de Green déduite de la notion d'équation adjointe due à Riemann, j'établis une importante formule qui me permet de démontrer le théorème suivant:

Une fonction uniforme $z=f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z=0$, existant dans toute la partie du plan située au-dessous d'une certaine parallèle à l'axe Ox, $y \leq b$ et restant finie ainsi que sa dérivée par rapport à x, dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y, se réduit à une constante.

On en conclut que l'équation $\delta z=0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x=a$, $y=b$, à distance finie; car une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b. Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier.

Enfin, je cherche à rendre compte de ce fait que la plupart des solutions simples de l'équation $\delta z=0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox.

Certains des théorèmes établis dans ce Mémoire s'interprètent d'une façon simple dans la théorie de la chaleur: je les reporte à la fin de cette Notice: *Théorie de la Chaleur.*

Equations simultanées aux dérivées partielles. Potentiels et fonctions harmoniques. — Dans une fonction $u+iv$ de $x+iy$ les quantités u et v vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{1}$$

d'où on déduit immédiatement que chacune de ces fonctions vérifie l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

Je me suis proposé d'étudier un système analogue à (1) pour le potentiel à trois variables (124, 125). Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z, vérifiant les relations

[1] *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

$$
(2) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial T}{\partial y} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial z} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial T}{\partial z} - \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0.
\end{cases}
$$

Si l'on en tire $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$, qu'on calcule ensuite $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ et qu'on forme la somme de ces expressions, on trouve *identiquement zéro*. On a un résultat analogue pour X, Y, Z. De sorte que les quatre fonctions X, Y, Z, T sont *harmoniques*.

Je démontre que, dans le système (2), on peut choisir arbitrairement les deux fonctions harmoniques Z et T, et obtenir ensuite les déterminations les plus générales des fonctions X et Y par des quadratures suivies de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}\right)_0 = 0$$

définissant φ comme fonction de x et y, l'indice o signifiant que, dans le dernier terme, z est remplacé par une constante z_0.

Le système (2) est un cas particulier d'un système d'équations du même genre (124) où figurent quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t qui vérifient chacune l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Equations linéaires simultanées aux dérivées partielles, dont l'intégrale générale contient des constantes arbitraires. — A propos de la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables, j'ai montré que l'on pouvait démontrer, pour certains systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, des théorèmes semblables à ceux de Fuchs pour les équations différentielles linéaires à une variable indépendante. Cette similitude nous a conduits, M. E. Picard et moi (117), à étendre, à des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, le théorème de M. E. Picard relatif aux équations différentielles à coefficients doublement périodiques. Nous considérons d'abord deux équations simultanées du second ordre

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z$$

admettant quatre intégrales communes linéairement indépendantes et ayant pour coefficients a_i, b_i des fonctions des deux variables indépendantes x et y à quatre paires de périodes. Alors, si l'intégrale générale est une fonction uniforme de x et y les équations admettent une intégrale particulière qui se reproduit, multipliée par des facteurs constants, quand on augmente x et y de couples de périodes et qui, par suite, est analogue aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Ce résultat est ensuite étendu à des systèmes plus généraux d'équations simultanées.

Il est à remarquer que, dans certains cas, notre théorème permet d'intégrer une équation différentielle linéaire ordinaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées par une relation algébrique de genre p. Je montre, en effet, que l'intégration d'une équation de cette nature peut être ramenée à celle d'un système de p équations linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les eoefficients sont des fonctions abéliennes de genre p, c'est-à-dire des fonctions uniformes de p variables à $2p$ groupes de périodes, système auquel on pourra appliquer notre théorème.

Géométrie.

Théorie des déblais et remblais (165). — J'ai entrepris l'étude du problème des déblais et remblais, proposé par Monge en 1781, pour répondre à la question posée par l'Académie, en 1884, comme sujet de prix Bordin.[1]

L'Académie demandait aux concurrents, *soit l'étude générale du problème des déblais et des remblais, soit la solution dans un cas simple choisi par l'auteur du Mémoire.*

L'étude de ce beau problème remonte à Monge qui, dans un Mémoire publié en 1781, où se trouvent développées d'une manière incidente la théorie des lignes

[1] On trouvera sur mon travail un rapport de DARBOUX dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* décembre 1866.

de courbure et les propriétés des systèmes de rayons rectilignes, s'était posé la question générale suivante:

»*Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en parcelles infiniment petites et deux à deux équivalentes, se correspondant suivant une loi telle que, si l'on multiplie le chemin parcouru par chaque parcelle, transportée sur celle qui lui correspond, par le volume de cette parcelle, la somme des produits ainsi obtenus soit un minimum.*»

Dans le cas où les volumes peuvent être assimilés à des aires planes situées dans le même plan, Monge résout complètement le problème en remarquant que les routes de transport, lorsqu'elles forment un système continu, doivent détacher dans le déblai et dans le remblai des aires égales. Dans le cas où les routes ne peuvent former un système continu, il présente quelques remarques, complétées depuis par Dupin dans un Mémoire sur le même sujet, qui fait partie des *Applications d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique.* Enfin Monge, abordant le cas le plus difficile, celui où le déblai et le remblai sont des volumes, nécessairement équivalents, fait connaître la proposition suivante, qui est la pierre angulaire de cette théorie:

Les routes de transport doivent servir chacune à une infinité de parcelles, et elles sont nécessairement normales à une famille de surfaces parallèles.

Mais il faut avouer que les raisonnements par lesquels Monge est conduit à ce beau théorème n'entraînent, en aucune manière, l'adhésion; ce point essentiel, malgré l'étude nouvelle qui en a été faite par Dupin, attendait encore une démonstration solide et appelait de nouvelles recherches.

Je me suis proposé d'étudier le problème de Monge, de démontrer le théorème général qu'il a énoncé, et de résoudre le problème au moins pour certains cas particuliers.

Tout d'abord par les méthodes de la Géométrie pure, je m'élève de la considération d'un système de points isolés à celle des masses continues. J'énonce, sous le nom de *principe de translation, principe de symétrie,* etc. un certain nombre de propositions simples, dont l'application peut rendre de grands services dans la pratique. Voici, à titre d'exemple, une de ces propositions:

Supposons que le déblai et le remblai soient décomposés en éléments de même masse et que l'on puisse associer ces éléments deux à deux de telle façon que tous les segments $R_i D_i$ allant d'un élément du remblai à l'élément correspondant du déblai et prolongés dans le sens $R_i D_i$ rencontrent une portion de surface convexe S du côté de la convexité et soient normaux à cette surface, alors le système des routes les plus avantageuses se compose précisément de ces segments $R_i D_i$.

Il en est de même, évidemment, si ce sont les prolongements de tous les segments dans le sens opposé qui sont normaux à S du côté de la convexité. En suppossant S réduit à un plan ou à un point, on obtient des cas particuliers intéressants.

Dans la deuxième partie, après avoir démontré que les routes forment un système continu ou se décomposent en plusieurs systèmes continus, j'applique la méthode des variations au problème de Monge, et j'établis le théorème fondamental, sans supposer que la densité soit constante à l'intérieur du déblai ou du remblai. Enfin, j'examine le cas où les routes se partagent en plusieurs systèmes continus et j'indique les moyens de déterminer les surfaces séparatrices, c'est-à-dire les surfaces auxquelles viennent aboutir les routes appartenant à deux systèmes différents et contigus.

Dans le cas des aires planes, nous l'avons déjà rappelé, le problème de Monge peut recevoir une solution complète où ne figurent que des quadratures. On devait se demander si, dans l'espace, l'équation aux dérivées partielles donnée par Monge n'est pas, elle aussi, intégrable dans tous les cas et d'une manière générale. Les résultats que j'ai obtenus donnent une réponse complète à cette question. Dans le cas où, par exemple, les volumes se réduisent à des aires planes situées dans des plans parallèles, l'intégration de l'équation de Monge est ramenée à celle des surfaces minima si les aires ont même densité, et à celle des surfaces à courbure constante si les densités sont différentes.

Ces exemples sont précieux, parce qu'ils prouvent que l'on doit renoncer à intégrer dans tous les cas l'équation du second ordre de Monge. Mais, même en supposant l'intégration effectuée, on se trouve en présence de nouvelles et profondes difficultés.

Ces difficultés sont de la nature de celles qui se présentent dans la théorie des surfaces minima. Si l'on considère toutes les surfaces formant une nappe continue passant par une courbe fermée, le calcul des variations apprend que la surface d'aire minimum aura, en chaque point, ses rayons de courbure égaux et de signes contraires. L'équation aux dérivées partielles de cette surface une fois intégrée, la condition à laquelle elle est assujettie, de passer par la courbe, ne permet pas de déterminer complètement les deux fonctions arbitraires dont elle dépend. Il existe une infinité de surfaces minima contenant la courbe; mais ces surfaces ne satisfont pas toutes, on le sait, à la condition, supposée cependant par le calcul des variations, de former une nappe continue reliant les uns aux autres tous les points de la courbe. On ne peut déterminer les deux fonctions arbitraires qu'en employant des considérations tout à fait indépendantes de la méthode des variations, puisque la condition à laquelle il s'agit de satisfaire est supposée remplie au moment même où commence l'application de cette méthode. Le problème auquel on est ainsi conduit arrête aujourd'hui encore les efforts des géomètres et n'a pu être résolu que dans quelques cas particuliers.[1]

La solution du problème de Monge présente des difficultés analogues et peut-être plus grandes. Les fonctions arbitraires d'une variable, qui entrent dans les équations du système des routes, doivent être déterminées par la condition que les routes forment un système continu, permettant de transporter dans l'ensemble du remblai la totalité des parcelles qui composent le déblai. La condition, évidente *a priori*, que les routes limites soient tangentes à la fois à la surface du déblai et à celle du remblai, ne fait connaître qu'une de ces deux fonctions et il n'existe, comme dans la théorie des surfaces minima, aucune règle fixe et précise conduisant à la solution complète de la question proposée.

Pour éclaircir cette discussion, je traite quelques exemples, parmi lesquels je citerai les suivants qui me paraissent mériter quelque attention. En supposant que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées dans deux plans rectangulaires, on trouve que les routes servant au transport sont normales à une surface satisfaisant à une équation aux dérivées partielles qui se transforme en elle-même par la transformation remarquable que Bonnet a indiquée à la page 486 du tome XLII des Comptes rendus. En supposant ensuite que le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes situées sur la surface d'une sphère, je démontre que les routes servant au transport sont normales à une surface possédant cette propriété que *la projection du centre de la sphère sur chaque normale se trouve au milieu des deux centres de courbure principaux.* L'emploi du système de coordonnées tangentielles dû à Bonnet me permet d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre définissant ces surfaces; je suis revenu depuis (144) sur l'étude de ces surfaces, en donnant sous une forme simple les expressions des coordonnées d'un de leurs points en fonction de deux paramètres et en indiquant les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques dont les premières peuvent être intégrées dans une infinité de cas comprenant une infinité de surfaces algébriques. J'ai montré en outre que ces surfaces se rattachent d'une façon simple aux surfaces minima et aux surfaces étudiées par Bonnet (Comptes rendus, t. XLII, p. 486); on a par

[1] Darboux, *Rapport*, loc. cit.

exemple la construction suivante: *Etant donnée une surface S de Bonnet, on mène en un point M de cette surface le plan tangent P et la normale MN jusqu'au plan xOy: le plan Π parallèle à P et situé à une distance de l'origine égale à la normale MN enveloppe une de nos surfaces.* Cette correspondance entre nos surfaces et celles de Bonnet montre que:

De tout système de routes servant à déblayer une aire plane homogène sur une aire équivalente située dans un plan parallèle, on peut déduire un système de routes servant à déblayer une aire sphérique homogène sur une aire équivalente située sur la même sphère.

Les routes servant au premier déblai seront normales à une surface de Bonnet, les routes servant au second déblai normales à une de nos surfaces. M. Goursat[1] a étudié depuis une classe étendue de surfaces comprenant les précédentes comme cas particulier.

Le problème des *déblais et remblais* a également été traité par A. de Saint-Germain, à l'aide d'une méthode géométrique élégante (Etude sur le problème des déblais et des remblais par A. de Saint-Germain, Imprimerie Le Blanc-Hardel, Caen, 1886).

Involutions d'ordre supérieur. — Les beaux travaux de Chasles, concernant les courbes et les surfaces du second ordre, sont basés en grande partie sur la notion d'involution et d'homographie entre deux éléments géométriques dépendant rationnellement d'un paramètre (points sur une droite, sur une conique, etc. droites passant par un point, tangentes à une conique, . . .).

L'involution de Chasles est définie analytiquement par une relation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1+\lambda_2) + C = 0$$

entre les deux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre variable qui correspondent aux deux éléments géométriques considérés. Je me suis proposé d'étudier les propriétés des courbes unicursales, planes ou gauches, de degrés supérieurs, en prenant pour point de départ la notion d'involution d'ordre supérieur entre trois ou plusieurs éléments géométriques dépendant rationnellement d'un paramètre (points sur une courbe unicursale, tangentes, planes osculateurs à une courbe unicursale, etc.). En premier lieu (141, 145), j'ai étudié le cas le plus simple, en prenant une involution du troisième ordre définie par une relation de la forme

[1] *American Journal*, 1888.

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3+B(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)+C(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+D=0$$

qui est l'extension naturelle de la relation de Chasles rappelée ci-dessus; de même que, dans l'involution de Chasles, il y a deux éléments doubles, il y a, dans l'involution du troisième ordre, trois éléments triples obtenus en supposant les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ égales entre elles. L'emploi de cette relation involutive permet de traiter, avec une grande facilité, la théorie des cubiques gauches, dont l'analogie avec les coniques se trouve ainsi mise en évidence à un nouveau point de vue. On a, par exemple, les théorèmes suivants: Une droite qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une conique des groupes de deux points en involution: les points doubles sont les points de contact des tangentes issues du point. De même: Un plan qui tourne autour d'un point fixe détermine sur une cubique gauche des groupes de trois points en involution; les points triples sont les points de contact des plans osculateurs issus du point. Les réciproques sont vraies. Une propriété de l'involution du troisième ordre est que les éléments triples sont trois éléments homologues de l'involution: c'est de ce fait simple que résultent immédiatement plusieurs théorèmes importants dont le type est ce théorème bien connu: Les points d'inflexion d'une cubique plane unicursale sont en ligne droite. D'une façon générale, toutes les involutions d'ordre impair $2n+1$ possèdent la même propriété que l'involution du troisième ordre: les éléments $(2n+1)$-uples forment un groupe d'éléments homologues; de là ce théorème général (148):

Soit une courbe unicursale fixe et un faisceau de courbes algébriques tel qu'une des courbes du faisceau soit déterminée par $2n$ points et coupe la courbe unicursale en $2n+1$ points variables; il existe $2n+1$ courbes du faisceau, osculatrices à la proposée, et les $2n+1$ points d'osculation sont sur une courbe du faisceau.

Ce théorème s'étend à des courbes unicursales gauches, coupées par des faisceaux de surfaces algébriques.

Une notion qui ne se présente pas dans l'involution de Chasles et qui joue un rôle important dans les involutions d'ordre supérieur est celle des groupes d'*éléments singuliers*. Si l'involution est d'ordre n, il existe des systèmes de valeurs de $(n-1)$ des éléments tels que le $n^{\text{ième}}$ est *indéterminé;* ces systèmes de valeurs forment les groupes d'éléments singuliers; ils sont définis par deux relations involutives simultanées. Par exemple, pour l'involution du troisième ordre, il existe deux éléments singuliers qui sont imaginaires, quand les trois éléments triples sont réels, et réels, quand deux des éléments triples sont imaginaires.

Après avoir appliqué l'involution du troisième ordre à l'étude des cubiques gauches, j'ai étudié les courbes gauches unicursales du quatrième ordre, en prenant comme point de départ une relation involutive entre quatre éléments, relation qui me conduit à la classification et aux principales propriétés de ces courbes (146, 147).

Ces méthodes peuvent être appliquées à l'étude de toutes les courbes unicursales ou, plus généralement, de tous les systèmes dont les éléments dépendent rationnellement d'un paramètre variable. Mais il est bien intéressant de remarquer que la relation involutive de Chasles, ainsi que les relations involutives d'ordre supérieur dont nous venons de parler, ne sont que des cas particuliers du célèbre théorème d'Abel, sur les intégrales algébriques, appliqué aux courbes unicursales. Les beaux résultats, que Clebsch a obtenus en appliquant le théorème d'Abel à l'étude de la Géométrie sur une courbe[1] se présentent donc à nous comme donnant la généralisation la plus naturelle et la plus profonde de l'idée élémentaire d'involution.

A un point de vue algébrique une relation involutive entre n éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ permet de donner des interprétations intéressantes de l'évanouissement des invariants de la forme obtenue en faisant $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$.

Homographie. — La notion d'homographie entre deux éléments (divisions homographiques, faisceaux homographiques), due à Chasles, peut être aussi étendue utilement à plusieurs éléments. C'est ce que j'ai montré, pour un cas particulier (relation homographique entre trois éléments, avec application aux surfaces du troisième ordre), dans une Communication faite à la Société philomathique en 1879.

Complexes. — On sait que Chasles a démontré l'identité des propriétés des pôles et plans polaires par rapport à une cubique gauche, avec les propriétés des plans et de leurs foyers dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide. J'ai donné (141) de cette importante proposition, une démonstration nouvelle fondée sur la considération de l'involution du troisième ordre. Si l'on se place dans les idées de Plücker, qui prend pour élément de l'espace la ligne droite au lieu du point ou du plan, on peut dire aussi que les tangentes d'une cubique gauche font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Il y avait alors deux problèmes à résoudre: 1° Une cubique gauche étant donnée, trouver les

[1] Voyez *Leçons de Géométrie,* publiées par LINDEMANN, traduites par BENOIST, t. III.

éléments du mouvement hélicoïdal ou du complexe correspondant; 2° un complexe de droites de premier ordre étant donné, trouver les cubiques gauches dont les tangentes appartiennent au complexe. Je résous ces deux problèmes en donnant, pour le second, le théorème suivant, qui a été étendu par M. E. Picard[1] aux courbes unicursales d'ordre supérieur: *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une courbe unicursale du troisième ordre, située dans un plan, puisse être considérée comme la projection sur ce plan d'une cubique gauche ayant son axe perpendiculaire au plan, est que la courbe ait ses trois points d'inflexion à l'infini.*

Passant ensuite aux courbes gauches unicursales du quatrième ordre, je donne (146) les conditions nécessaires et suffisantes pour que les tangentes à l'une de ces courbes appartiennent à un complexe de droites du premier ordre dont je forme l'équation: il existe alors un deuxième complexe qui a des relations simples avec le premier et avec la courbe. Pour obtenir les conditions cherchées, je me sers de ce théorème général (149) que, pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe du premier ordre, le déterminant bien connu qui, par son évanouissement, donne les points où le plan osculateur est stationnaire, est un carré parfait. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation du quatrième degré donnant ces points soit un carré parfait. Ces conditions nécessaires sont suffisantes, comme il résulte de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Alors les quatre points de la courbe, où le plan osculateur est stationnaire, sont confondus deux à deux avec des points simples en chacun desquels la tangente a trois points communs avec la courbe.

Sur la propriété caractéristique du cylindroïde. — On sait que le conoïde du troisième ordre de Plücker, appelé cylindroïde par Cayley, possède cette propriété signalée par Ball que *le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices rectilignes de la surface est une courbe plane.* — J'ai démontré (164) que le cylindroïde est, en dehors des cylindres, la seule surface réglée possédant cette propriété. Le même théorème a été démontré ensuite par M. Bricard, puis par M. Demoulin (Bulletin de la Société mathématique, t. XXIX).

Lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu. — Extension des théorèmes sur les tourbillons. — Imaginons une transformation ponctuelle uniforme continue et reversible

$$x=f(a, b, c), \quad y=f_1(a, b, c), \quad z=f_2(a, b, c)$$

[1] *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* 1877.

faisant correspondre à chaque point $P_0(a, b, c)$ d'une région de l'espace R_0 un point $P(x, y, z)$ d'une région R, et inversement. Après avoir écrit (90) les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux systèmes de lignes

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

$$\frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}$$

se correspondent dans les deux milieux, je donne quelques propriétés de ces lignes correspondantes, propriétés qui généralisent les propriétés des lignes et surfaces de tourbillons indiquées par Helmholtz dans le mouvement des fluides.

Divers. — Je cite rapidement, pour terminer, quelques notes de Géométrie: l'une (152) donnant tous les systèmes de deux familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques; l'autre, démontrant cette propriété que les hélices sont les seules courbes gauches pour lesquelles une droite, invariablement liée au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, puisse engendrer une surface développable; la troisième (154) contenant l'étude de certaines courbes qui dépendent d'un paramètre et dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, et la quatrième (155) déterminant les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée, par une méthode qui rappelle celle de Moutard pour la détermination des courbes *anallagmatiques*.

Mécanique.

On trouvera ci-dessous des renseignements sur des travaux particuliers de Mécanique; mais parmi ces travaux je demande la permission de parler d'abord de ceux qui se rapportent à une nouvelle forme des équations de la dynamique, s'appliquant à tous les systèmes, que les liaisons s'expriment par des relations sous forme finie (systèmes *holonômes* d'après Hertz) ou que les liaisons s'expriment sous forme différentielle *non* intégrable (systèmes *non holonômes*). On sait que les équations de Lagrange s'appliquent aux systèmes holonômes; ces équations montrent que le mouvement du système est défini dès que l'on connaît la demi force vive ou énergie cinétique T en fonction des coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots q_k$, et de leurs dérivées par rapport au temps. Si les liaisons ne sont pas holonômes, le déplacement infiniment petit du système à partir d'une certaine position dépend des variations arbitraires de k paramètres $q_1, q_2, \dots q_k$: le mouvement du système n'est plus caractérisé par la conaissance de la seule force vive (195); les équations de Lagrange ne sont plus applicables. Divers géomètres dont le premier paraît avoir été M. Vito Volterra ont donné des équations généralisant celles de Lagrange en restant dans le premier ordre de dérivation. En allant jusqu'au second ordre de dérivation par rapport au temps, on peut avoir des équations toujours applicables: dans ces équations q_i'' désigne la dérivée seconde de q_i par rapport à t. Les nouvelles équations se rattachent au principe de la *moindre contrainte de Gauss*. Formons l'énergie d'accélération du système

$$S = \frac{1}{2} \Sigma m J^2,$$

où J désigne l'accélération du point de masse m; cette expression est du second degré en $q_1'', q_2'', \dots q_k''$; d'autre part, pour un déplacement quelconque compatible avec les liaisons, on a

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_k \delta q_k.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k''} = Q_k.$$

Ces équations peuvent d'ailleurs être appliquées à des cas où les liaisons ne sont plus linéaires (228). M. Beghin s'en est servi dans sa Thèse (Paris 1923) pour exposer la théorie de l'asservissement. Je crois qu'elles ont une portée philosophique très grande: nous ne savons pas quelles sont les liaisons qui produisent les phénomènes physiques; nous ignorons si elles sont holonômes ou non. Il est probable qu'elles ne le sont pas: dès lors les équations précédentes, s'appliquent. Dans cet ordre d'idées, j'ai publié une Note dans les Comptes Rendus (245) en m'appuyant sur certains résultats relatifs à l'électricité donnés par M. Carvallo dans la collection Scientia; le même ordre d'idées a été développé par M. Guillaume dans un article postérieur des Comptes Rendus. J'ai exposé la théorie de ces équations dans le tome III de mon Traité de Mécanique rationnelle et dans le premier fascicule du Mémorial.

La fonction T caractérise un système holonôme, en ce sens que deux systèmes qui, pour un choix convenable des paramètres, ont même fonction T prennent le même mouvement quand les forces appliquées sont telles que $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$ aient les mêmes expressions dans les deux systèmes. Au contraire, on ne peut pas affirmer d'une manière générale, que l'expression de l'énergie cinétique T caractérise un système, car deux systèmes différents peuvent avoir la même expression de T, les mêmes expressions pour $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$, et prendre cependant des mouvements différents (195). La forme précédente des équations paraît donc la plus simple qui soit applicable à tous les genres de liaisons et de variables. Cette forme se rattache au principe de la moindre contrainte de Gauss (82); on peut en effet énoncer les équations (E) en disant que les dérivées secondes q_i'' des paramètres indépendants ont à chaque instant les déterminations rendant minimum la fonction du second degré

$$S-(Q_1 q_1''+Q_2 q_2''+\cdots+Q_k q_k'');$$

cet énoncé se ramène à son tour au principe de Gauss (193). La fonction S ne peut pas être choisie arbitrairement: elle est assujettie à remplir certaines conditions (196) qu'il serait trop long d'indiquer ici.

J'applique cette forme générale au mouvement d'un corps solide (194), en particulier au mouvement d'un solide pesant de révolution assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal. Pour le problème du cerceau que j'avais traité antérieurement (210) par une méthode directe, je me suis rencontré avec M. Korteweg pour montrer que l'intégration des équations du mouvement peut être ramené à des quadratures, quand on emploie, comme élément analytique, la fonction hypergéométrique de Gauss.

Une autre question de mécanique sur laquelle j'attire l'attention est la *Tendance des systèmes à échapper au frottement* que j'ai expliquée dans un mémoire du Journal de Crelle. On a ainsi la raison mathématique de faits d'observation journalière: par exemple quand le vent pousse les feuilles sur une route, elles glissent fort rarement et le plus souvent, dès que la chose est possible, se mettent à rouler.

Enfin je citerai certaines publications relatives aux principes mêmes de la Mécanique. Autrefois on concevait *a priori* un mouvement absolu: j'ai essayé de montrer comment on peut rattacher au mouvement d'un système la notion d'axes fixes (235); j'ai aussi cherché à voir comment il conviendrait de modifier les principes de la mécanique suivant le système d'axes considéré comme fixe (254).

Je citerai également les recherches relatives à une équation fonctionnelle (246) pour l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'attraction newtonienne de ses parties et animée d'une rotation uniforme, puis les recherches relatives aux figures d'équilibre des fils dont les éléments se repoussent deux à deux (242); pour ce dernier problème, M. Bratu, professeur à l'Université de Cluj en Roumanie, a traité dans sa thèse (Paris, 1914) le cas où la répulsion est proportionnelle à la distance, cas où on peut remplacer le fil par son centre de gravité.

Enfin, je signalerai une étude du mouvement aérien de sphères légères, étude qui explique certains faits d'expérience par l'introduction d'une résistance de milieu due à la rotation (233) et des recherches sur le mouvement d'ensemble d'une masse fluide soumise à des attractions newtoniennes intérieures et extérieures (256), (257) et (255).

Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps dans les problèmes de Mécanique. — On sait que les fonctions elliptiques donnent la solution complète du problème du pendule simple, en permettant d'exprimer le sinus et le cosinus de l'angle d'écart par des fonctions uniformes du temps, aisées à calculer numériquement. Ces fonctions admettent une période réelle T qui est la durée de l'oscillation et une période imaginaire de la forme $i\,T'$ qui, au premier moment, ne paraît pas avoir de signification mécanique. Or cette période imaginaire s'interprète de la façon la plus simple (171): si le pendule était placé dans la même position initiale et la pesanteur changée de sens, c'est-à-dire dirigée vers le haut, le pendule oscillait sur l'arc supérieur de la circonférence qu'il décrit, et la durée de l'oscillation serait précisément T'. Cette interprétation résulte du théorème général suivant:

Etant donné un système de points matériels assujettis à des liaisons indépendantes du temps t et soumis à des forces qui ne dépendent que des positions des différents points, les intégrales des équations différentielles du mouvement de ce système restent réelles si l'on y remplace t par $t\sqrt{-1}$ *et les projections des vitesses initiales* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ *par* $-\alpha_k\sqrt{-1}, -\beta_k\sqrt{-1}, -\gamma_k\sqrt{-1}$. *Les expressions ainsi obtenues sont les équations du nouveau mouvement que prendraient les mêmes points matériels si, placés dans les mêmes conditions initiales, ils étaient sollicités par des forces respectivement égales et opposées à celles qui produisaient le premier mouvement.*

Cette méthode ne donne rien quand le mouvement a lieu sans l'intervention de forces autres que les forces de liaison, c'est-à-dire quand le monvement est géodésique: en particulier elle ne donne rien pour le mouvement à la Poinsot: pour ce dernier mouvement j'ai indiqué une méthode spéciale (209), pour interpréter la période imaginaire des fonctions elliptiques qui figurent dans la solution analytique de Jacobi.

Le théorème général peut se rattacher aussi aux équations d'homogénéité en mécanique.

Chaînette sphérique. — L'analogie entre les propriétés de l'équilibre des fils et celles du mouvement d'un point matériel se retrouve jusque dans certains faits très particuliers. C'est ainsi que la recherche de la figure d'équilibre d'une chaînette homogène pesante sur une sphère peut être effectuée par une méthode toute semblable à celle qu'Hermite a employée, en intégrant une équation de Lamé, pour exprimer, en fonction uniforme du temps, les coordonnées d'un point pesant mobile sur une sphère (Journal de Crelle, t. 85). On trouve (173) que les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique et l'arc de cette courbe peuvent être exprimés en fonction uniforme d'un paramètre, à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi; en faisant les calculs, on rencontre et l'on intègre une équation différentielle linéaire, analogue à celle de Lamé.

Mouvement d'un fil dans un plan fixe. — Parmi les systèmes matériels non rigides formés d'une infinité d'éléments, le plus simple est un fil ou une chaîne mobile dans un plan fixe sous l'action de forces données. Si on laisse de côté le problème des cordes vibrantes et, en général, la théorie des oscillations infiniment petites, le problème du mouvement d'une chaîne dans un plan a été peu étudié. Les résultats les plus importants et les plus simples sur ce sujet sont dus à Résal (Traité de Mécanique générale, t. I, p. 321 et suiv.). Résal forme deux équations simultanées aux dérivées partielles, de l'intégration desquelles dépend la solution du problème; puis il ajoute que l'élimination de la tension entre ces deux équations conduit à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre*. En employant un système de coordonnées tangentielles, j'arrive (183) à ramener la solution du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre* seulement. Voici une analyse rapide de la méthode suivie. A l'instant t la chaîne est disposée suivant une certaine courbe; appelons α l'angle que fait la tangente à cette courbe, en un point, avec l'axe Ox et δ la distance de cette tangente à l'origine des coordonnées; cette distance δ sera une fonction des deux variables indépendantes α et t; je prends alors, pour fonction inconnue p, une fonction dont la dérivée partielle par rapport à α est δ. C'est cette fonction p des deux variables α et t qui vérifie une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; une fois p connu, les expressions des coordonnées d'un point de la courbe, de l'arc et de la tension s'obtiennent très aisément.

A toute intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles, correspond un mouvement possible du fil, à condition que la tension soit positive. Par exemple, en supposant que la force extérieure dépende uniquement de la position de l'élément du fil, on retrouve, pour les courbes planes, le résultat de Léauté[1] relatif à la figure de repos apparent d'une corde en mouvement dans l'espace. Il suffit, pour cela, de chercher à vérifier l'équation par une intégrale particulière de la forme $\varphi(\alpha)+\psi(t)$; on trouve ainsi que le glissement du fil est uniformément accéléré, et que la figure de repos apparent est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante tangentielle de la force était augmentée d'une constante. Léauté, se plaçant au point de vue pratique, n'a considéré que le cas où le glissement est *uniforme*. Je résous le même problème, en supposant le fil hétérogène, puis je trouve les mouvements qui peuvent être représentés par un glissement le long d'une courbe animée d'un mouvement de translation ou de rotation, ou restant homothétique d'elle-même, etc. . . Toutes ces questions sont traitées par un procédé uniforme et ramenées à un même problème d'Analyse. Enfin ma méthode se prête facilement à l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable. Cette méthode a été étendue au mouvement dans l'espace par Floquet, de l'Université de Nancy.

De l'homographie en Mécanique. — »La découverte des *principes de projection centrale* marque incontestablement une époque importante dans l'histoire de la Géométrie moderne. Les méthodes fondées sur ces principes possèdent un caractère à la fois intuitif et systématique, qui les rend également propres à découvrir de nouvelles propriétés des figures et à rattacher tout un ensemble de propositions à une même vérité générale.»[2] Il m'a paru intéressant de montrer que ces mêmes principes peuvent être appliqués, en Mécanique, au mouvement d'un ou de plusieurs points libres sollicités par des forces qui ne dépendent que des positions des points. On peut, par exemple, à l'aide de la transformation homographique, rattacher les unes aux autres des questions de Mécanique en apparence différentes, comme le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance et le mouvement d'un point attiré par un plan

[1] *Comptes rendus*, 10 novembre 1879; *Bulletin de la Société philomatique*, 18 novembre 1879.

[2] MOUTARD, *Applications d'Analyse et de Géométrie de Poncelet*, t. I, p. 509.

fixe en raison inverse du cube de la distance. Voici l'exposé de la transformation pour le cas le plus simple possible, c'est-à-dire pour le mouvement d'un point matériel M, dans un plan fixe, sous l'action d'une force F *dépendant seulement de la position du mobile.* Si l'on fait, sur les coordonnées x et y du point M, une transformation homographique par les formules connues

$$x_1 = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \quad y_1 = \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$$

en remplaçant le temps t par une autre variable t_1 liée à t par la relation

$$k\,dt_1 = \frac{dt}{(a''x+b''y+c'')^2} \qquad (k \text{ constant}),$$

on trouve (175) que le point M_1 de coordonnées x_1 et y_1 se meut, dans le temps t_1, comme un point matériel sollicité par une force F_1 dépendant uniquement *de la position du mobile:* la trajectoire du second point M_1 est la *transformée homographique* de celle du premier M; la force F_1 se déduit de F d'une manière simple, sa direction est la *transformée homographique* de la direction de la force F. Il résulte de cette dernière propriété que, si la force F est centrale ou parallèle à une direction fixe, la force F_1 passe aussi par un point fixe à distance finie ou infinie. Notre transformation comprend, comme cas particulier, deux transformations qu'Halphen a indiquées[1] pour conclure des lois de force bien connues (attraction proportionnelle à la distance ou inversement proportionnelle au carré de la distance), les lois de force signalées par Darboux et Halphen, comme étant les plus générales qui font décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. On doit se demander maintenant s'il existe, en Mécanique comme en Géométrie, des transformations plus générales que la transformation homographique qui seraient obtenues en remplaçant les fonctions linéaires figurant dans les formules précédentes par d'autres fonctions des coordonnées x et y. On arrive par un calcul un peu long, à la conclusion suivante: *Si la nouvelle force F_1 doit dépendre uniquement de la position du mobile M_1, quelle que soit la force F, la seule transformation réalisant cette condition est la transformation homographique.* Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation

[1] *Bulletin de la Société philomathique,* 7me série, t. I, p. 89.

homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points. Comme application de ces méthodes, j'indique un moyen de trouver les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales. Ces lois de forces ont été déterminées simultanément par Halphen et Darboux, à la suite d'une question posée par J. Bertrand. Je simplifie (208) notablement le calcul d'Halphen en employant la transformation homographique pour ramener le cas des forces centrales à celui des forces parallèles.

Sur des transformations de mouvements. — A la suite d'une remarque de M. Goursat, j'ai généralisé la théorie de l'homographie en Mécanique (171) de la façon suivante.

Soit un système matériel holonôme dont les liaisons sont indépendantes du temps et dont la position est définie par n paramètres $p_1, p_2, \dots p_n$. Si ce système est sollicité par des forces dépendant des positions et des vitesses des points d'application, les équations du mouvement sont, d'après Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p_\alpha'}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_\alpha} = P_\alpha, \quad p_\alpha' = \frac{d p_\alpha}{dt} \tag{1}$$

S désignant la demi-force vive du système. Les quantités P_α sont des fonctions de $p_1, p_2, \dots p_n, p_1', p_2', \dots p_n'$; dans le cas particulier où les forces ne dépendent que de la position du système, les P_α ne contiennent pas de dérivées p_α'.

A côté de ce premier système qui se meut dans le temps t, considérons un deuxième système dont la configuration dépend de n paramètres $q_1, q_2, \dots q_n$ et qui se meut dans le temps t_1, sous l'action de forces quelconques. Les équations du mouvement de ce système sont

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad q_\alpha' = \frac{d q_\alpha}{dt_1}, \tag{2}$$

les quantités Q_α dépendant des q_α et de leurs dérivées q_α'. On devra considérer les deux problèmes de Mécanique comme *équivalents*, s'il existe une transformation de la forme

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \varphi_\alpha(p_1, p_2, \dots p_n) \\ dt &= \lambda(p_1, p_2, \dots p_n)\, dt_1 \end{aligned} \tag{3}$$

transformant le système des équations (2) dans le système (1).

Je démontre (177) que, si l'on n'impose aucune condition aux forces, on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre à tout mouvement de l'un des systèmes, sous l'action de forces dépendant des positions et des vitesses, un mouvement analogue de l'autre.

Je particularise ensuite le problème en cherchant si, à tout mouvement du premier système, sous l'action de forces *ne dépendant que de la position* du système, on peut faire correspondre un mouvement analogue du second. J'établis que la transformation n'est possible que si certaines relations de condition ont lieu entre les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des deux formes S et T. De plus, *si la transformation existe, elle doit faire correspondre à un mouvement du premier système, quand aucune force n'agit sur lui, un mouvement analogue du deuxième.* En un mot, la transformation doit conserver les mouvements *géodésiques.* On se trouve ainsi amené à une question qui a été étudiée par Beltrami, Lipschitz, Dini, dans leurs travaux sur les formes quadratiques de différentielles, et par S. Lie.

M. Painlevé (Comptes rendus, 1892) a donné sur ce genre de transformations d'importants théorèmes qu'il faut rapprocher de plusieurs Notes de M. R. Liouville (Comptes rendus, 1892).

Il est évident que l'on peut toujours, pour un système quelconque, employer la transformation $dt = C dt_1$, C étant une constante réelle ou purement imaginaire (voyez Stäckel, Crelle, t. 107); mais, pour des systèmes spéciaux, il en existe d'autres. Par exemple, pour des points matériels libres, on peut employer une transformation homographique (177); pour un point mobile sur une sphère, on peut employer une transformation par projection centrale sur un plan. Enfin, comme l'a montré M. Dautheville (Comptes rendus et Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. VII, 1890) on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface à courbure totale constante en un mouvement plan (ce qui correspond à un théorème de J. Beltrami), et, plus généralement, on peut transformer le mouvement d'un point sur une surface en un mouvement d'un point sur une autre surface (non applicable), si la première surface satisfait aux conditions trouvées par Dini, pour que les lignes géodésiques se correspondent.

Extension des équations de Lagrange au cas du frottement. — En combinant le principe des vitesses virtuelles et le principe de d'Alembert, Lagrange a réduit à un procédé uniforme la mise en équations de tous les problèmes de Mécanique. Lorsque certains points du système glissent *avec frottement* sur des surfaces, on peut évidemment employer encore la méthode de Lagrange, mais à condition d'ajouter aux forces directement appliquées les forces de frottement dont les grandeurs sont inconnues, puis-qu'elles sont proportionnelles aux réactions normales des surfaces; il faut ensuite éliminer ces grandeurs inconnues. J'ai modifié (198) la méthode de Lagrange de manière à obtenir des équations du mouvement ne contenant ni les forces de liaison, ni les forces de frottement. La méthode que j'emploie consiste à appliquer le principe de d'Alembert, en imprimant au système un déplacement virtuel qui est compatible avec les liaisons sans frottement et dans lequel chaque point frottant se déplace normalement à la réaction totale de la surface sur laquelle il glisse. Cette méthode permet d'appliquer au cas du frottement les équations données par Lagrange.

Du tautochronisme dans un système matériel. — Le tautochronisme dans le mouvement d'un point a été l'objet de nombreuses recherches; il ne semble pas que l'on se soit occupé du tautochronisme des systèmes. J'ai traité cette question (186) en posant le problème comme il suit: *Imaginons un système à liaisons indépendantes du temps, possédant k degrés de liberté, sollicité par des forces connues ne dépendant que de la configuration du système; quelles nouvelles liaisons, au nombre de $k-1$, faut-il imposer au système pour que le système à liaisons complètes ainsi obtenu soit tautochrone, c'est-à-dire mette le même temps à revenir à une position déterminée, quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse?*

Je montre que la résolution du problème dépend de l'intégration de deux équations simultanées; si donc k est supérieur à 2, il y a indétermination: la question comporte une infinité de solutions. Pour déterminer le problème, on peut s'imposer $k-2$ conditions nouvelles, par exemple, assujettir le système final à liaisons complètes, à posséder la propriété du tautochronisme, non seulement à l'égard des forces données, mais encore à l'égard de $k-2$ autres systèmes de forces. Ainsi, pour un point matériel libre, on obtient un problème déterminé en cherchant sur quelle courbe il faut le faire glisser, pour qu'il y ait tautochronisme à la fois pour la pesanteur et pour une attraction issue d'un point fixe et fonction de la distance.

Propriétés d'une position d'équilibre d'un système. — Lorsqu'un système holonôme dont les liaisons sont indépendantes du temps est sollicité par des forces dérivant d'une fonction de forces U, la recherche des positions d'équilibre du système se trouve ramenée à la recherche des maxima et minima de cette fonction U regardée comme fonction des paramètres indépendants qui servent à définir la configuration géométrique du système.

En partant de cette propriété bien connue qui est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles, on peut, même pour un système sollicité par des forces ne dérivant pas d'une fonction de forces, assigner une infinité de fonctions devenant maxima ou minima *dans une position d'équilibre donnée du système.* On obtient ainsi (181) des théorèmes donnant des propriétés de la position d'équilibre considérée mais ne permettant pas, en général, de trouver cette position, car l'énoncé de ces propriétés suppose connue la position d'équilibre. Je rattache à ce point de vue des théorèmes de Lagrange (principe de Torricelli) et de Möbius (principe du minimum de la somme des carrés des distances).

Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. — Dans le *Messenger of Mathematics* (t. IV, 1867), Niven a montré comment les équations de Lagrange peuvent être employées utilement pour l'étude des percussions: la même question a été traitée par Routh (*Rigid Dynamics,* Ier volume). Mais la méthode suivie par ces auteurs peut être perfectionnée, car les équations qu'ils donnent contiennent encore des percussions de liaison provenant des liaisons nouvelles introduites brusquement au moment du choc. Ces équations ne répondent donc pas entièrement au but poursuivi par Lagrange, qui est d'obtenir des équations ne contenant pas les forces de liaison. Je montre comment on peut atteindre ce but (202) et (203).

Imaginons un système en mouvement dans lequel les liaisons ont lieu *sans frottement.* La manière la plus générale de concevoir un choc ou une percussion sur ce système paraît être la suivante: à un instant donné t_0, on introduit brusquement de nouvelles liaisons dans le système et, en même temps, on supprime brusquement certaines liaisons anciennes. Le mouvement du système est alors troublé: il se produit des percussions entre ses différentes parties et, dans un intervalle de temps très court t_1-t_0 les vitesses des différents points du système subissent des variations finies, sans que le système change sensiblement de position; en outre, l'action des forces ordinaires, telles que la pesanteur, peut être regardée comme négligeable pendant l'intervalle de temps t_1-t_0, de sorte que les changements brusques de vitesses survenus dans cet intervalle sont dus uniquement aux percussions qui se produisent sur les différentes parties du système, en vertu des liaisons imposées à ces parties. Je ne m'occupe que de la première approximation qui consiste à regarder le système comme immobile pendant le temps très court $t_1 - t_0$ et à regarder comme nulles les actions des forces ordinaires, autres que celles qui produisent les percussions.

Tout d'abord, je fais une classification des liaisons qui existent au moment t_0 où le choc se produit. Il est entendu que le choc est terminé et a produit tous ses effets à l'instant t_1, extrêmement rapproché de t_0.

Les liaisons qui existent au moment du choc peuvent être de deux espèces: les unes sont persistantes, les autres ne le sont pas. Nous appelons *persistantes* les liaisons qui, existant au moment du choc, existent encore après, de telle sorte que le déplacement réel qui suit immédiatement le choc soit compatible avec ces liaisons. Au contraire, les liaisons *non persistantes* sont celles qui, existant au moment du choc, n'existent pas après; le déplacement réel qui suit immédiatement le choc n'est pas compatible avec ces liaisons.

D'après cela, les liaisons existant au moment du choc peuvent être classées dans les catégories suivantes, qui s'excluent:

1°. Liaisons existant avant, pendant et après le choc;

2°. Liaisons existant pendant et après, mais non avant;

3°. Liaisons existant avant et pendant, mais non après;

4°. Liaisons existant seulement pendant le choc, mais n'existant ni avant ni après.

Les deux premières catégories contiennent des liaisons persistantes, les deux autres des liaisons non persistantes.

Par exemple, dans le pendule balistique, le pendule est mobile autour d'un axe fixe; cette liaison existe avant, pendant et après la percussion; le boulet, primitivement indépendant du pendule, vient brusquement faire corps avec lui; on a ainsi une nouvelle liaison dont la brusque réalisation produit le choc et qui existe pendant et après le choc, mais non avant. Quand deux corps élastiques se choquent, une liaison est brusquement introduite dans le système des deux corps, car leurs surfaces sont venues en contact; les deux corps se séparent ensuite; on a ainsi une liaison existant pendant la percussion, mais n'existant ni avant, ni après. Enfin imaginons deux points reliés par un fil inextensible et lancés en l'air: supposons qu'on saisisse brusquement l'un des deux points et qu'à ce moment le fil se rompe, alors on voit qu'une liaison a été brusquement introduite d'une façon persistante, car un des points devient et reste fixe; en même temps une liaison, existant avant le choc, n'existe plus après, car le fil s'est rompu; cette liaison rentre dans la troisième catégorie.

En vertu des liaisons de la première catégorie, la configuration du système dépend de k paramètres $q_1, q_2, \dots q_k$ et la demi force vive T est une fonction du deuxième degré des dérivées $q'_1, q'_2, \dots q'_k$ par rapport au temps. On peut toujours choisir ces paramètres de façon que les liaisons des deuxième, troisième, quatrième catégories s'expriment par des relations de la forme

$$q_1 = 0, \; q_2 = 0, \; \dots, \; q_c = 0, \qquad (c < k).$$

Les vitesses finales du système possèdent alors la propriété suivante:

Les dérivées partielles de T, par rapport aux dérivées de ceux des paramètres qui ne sont pas assujettis à s'annuler au moment du choc, ont les mêmes valeurs avant et après le choc.

Le nombre des inconnues est en général supérieur à celui des équations. Pour achever de déterminer le problème, il faut faire des hypothèses particulières, tirées de considérations d'élasticité par exemple, sur ce qui se passe après le choc. On a, de ce fait, un exemple élémentaire, en prenant le choc direct de deux corps sphériques et en écartant le cas où les corps sont parfaitement mous; alors la liaison brusquement introduite ne persiste pas après le choc, car les deux sphères se séparent. La Mécanique rationnelle fournit, entre les vitesses des deux sphères après le choc, *une seule équation* exprimant que la vitesse du centre de gravité commun n'a pas changé. On obtient la seconde équation par des considérations d'élasticité: ainsi en supposant les sphères parfaitement élastiques, on écrit que la force vive totale est la même après et avant le choc. Le problème est complètement résolu par la règle énoncée toutes les fois que les liaisons des troisième et quatrième catégories n'existent pas, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que les liaisons existant au moment du choc sont toutes *persistantes*.

Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. — Guyou a publié, sur l'équilibre d'un vaisseau avec un chargement liquide, d'importants travaux[1] qui se trouvent résumés dans l'Ouvrage intitulé: *Théorie du Navire*. Le même sujet a été traité par Duhem, qui a donné des formules générales renfermant la solution du problème.[2] D'un autre côté, Greenhill[3] a fait l'exposé des recherches des géomètres anglais sur cette question dans son *Traité d'Hydrostatique*.

[1] Guyou: 1°. *Cours autographié de l'Ecole Navale* (1881);
2°. *Théorie de la variation de la stabilité ou variation différentielle* (*Revue maritime*, 1879);
3°. *Théorie du Navire* (librairie Berger-Levrault, I^{re} édition 1887, 2^{me} édition 1894).

[2] M. Duhem a donné un résumé succinct de ses recherches dans une *Note des Comptes rendus*, t. cxxix, p. 879 (27 novembre 1899).

[3] Greenhill, *A treatise on Hydrostatics*.

J'ai indiqué, pour ce problème (221—224), une solution géométrique qui se rattache directement à la belle méthode que Guyou a donnée pour l'équilibre d'un flotteur sans liquides intérieurs.

Cette solution peut être résumée comme il suit:

Soit B le centre du système des forces parallèles constitué: 1° par les poids $p_1, p_2, \dots p_n$ appliqués aux centres $C_1, C_2, \dots, C_n$ des liquides intérieurs; 2° par la poussée $p+p'$ appliquée au centre C de la carène. Quand on oriente le flotteur de toutes les manières possibles, le point B décrit, par rapport au flotteur, une surface (B) et, à chaque instant, le plan tangent à cette surface au point B est horizontal.

Pour que le flotteur soit dans une position d'équilibre stable, il faut et il suffit que la distance du centre de gravité du flotteur seul (sans les liquides) au plan tangent à la surface (B) au point B soit un minimum.

Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons. — Ce travail a surtout un but historique et pédagogique. J'y montre, comme l'avait déjà remarqué Maurice Lévy[1], que des équations renfermant tous les éléments de la théorie des tourbillons et analogues, parfois même identiques à celles de Kirchhoff, se trouvent dans un Mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé: *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* est reproduit dans le premier volume (I^re^ série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882, et les équations dont il est question se trouvent dans la deuxième Partie, section première.

En me plaçant surtout au point de vue de l'enseignement, j'indique ensuite une interprétation simple et immédiate des équations de Cauchy, donnant les théorèmes fondamentaux de la théorie des tourbillons et conduisant en même temps aux équations de Weber.

Questions diverses. — Je cite sommairement quelques articles de Mécanique, l'un (207) donnant une forme générale de la fonction des forces pour laquelle on peut intégrer les equations du mouvement d'un point dans l'espace en coordon-

[1] Voyez un important article de MAURICE LÉVY: *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (Revue générale des Sciences pures et appliquées, 15 décembre 1890). Voyez également un excellent Travail historique de M. BRILLOUIN, publié dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse en 1885.

nées elliptiques; l'autre (185) montrant que, grâce à une proposition de Tait et Thomson, on peut étendre aux courbes brachistochrones la théorie des *développées* des *lignes de courbure*, etc. en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle; le troisième (217) relatif aux expériences du Commandant Hartmann; le quatrième (216) montrant que dans la déformation infiniment petite d'un milieu élastique isotrope la surface des dilatations et la surface directrice des efforts ont mêmes plans cycliques, et le dernier (219, 220) sur les fonctions et vecteurs de points dans le mouvement d'un fluide.

Théorie de la chaleur. — Mon étude sur l'équation différentielle $r-q=0$ (237) a été entreprise principalement pour répondre à la question suivante, qui m'a été posée par M. Boussinesq, sur la théorie de la chaleur. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x. Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x, $u=f(x)$, à l'instant initial $t=0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant *postérieur* quelconque $t>0$. Mais on demande: 1° *si l'état initial donné pour u, provient lui-même d'un état antérieur $t<0$*; 2° *lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique et comment on peut le trouver.* Voici la réponse à ces deux questions: l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. On reconnaît que l'état antérieur existe en s'assurant de la convergence de certaines séries. On peut indiquer, à ce sujet, la condition analytique suivante: pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière, c'est-à-dire une fonction développable en série procédant suivant les puissances entières positives de x. Le fait que cette condition n'est pas suffisante résulte d'un exemple que j'indique pour le cas de l'armille, d'après Fourier.

Potentiel. — L'étude que j'ai faite des fonctions vérifiant l'équation du potentiel m'a permis de résoudre quelques problèmes de Physique mathématique. J'ai d'abord (239) résolu (en commun avec Chervet), le problème de la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini, dans l'hypothèse que les électrodes d'une pile se trouvent en deux points du liquide et qu'un régime permanent soit établi. L'expression de ce potentiel s'obtient aisément, au moyen de l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions vérifiant l'équation différentielle du potentiel (238). J'ai reconnu ensuite que l'on peut appliquer la même méthode au cas où la masse liquide aurait la forme d'un parallélépipède rectangle, les électrodes se trouvant en des points quelconques de la masse. Ces résultats sont susceptibles d'une grande extension (231) et fournissent ainsi une application, à la *Physique mathématique*, des propositions que j'avais obtenues en poursuivant l'analogie entre les fonctions qui vérifient l'équation différentielle du potentiel et les fonctions d'une variable imaginaire. Ces applications comprennent, entre autres, la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle d'après Riemann, le calcul des vitesses dans l'écoulement d'un liquide par le fond d'un vase prismatique, tel que l'ont donné M. M. Boussinesq, de Saint-Venant et Flamant. J'arrive à résoudre ces mêmes problèmes pour tous les volumes limités par un polyèdre possédant la propriété suivante: si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus *ne pénètrent pas les uns dans les autres*. Dans toutes ces applications, le seul élément analytique nouveau qu'il soit nécessaire d'introduire est la fonction que j'ai appelée $Z(x, y, z)$, ou les fonctions plus simples auxquelles elle se réduit, quand un ou deux groupes de périodes deviennent infinis.

Bibliographie.

Ouvrages.

a. NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE M. PAUL APPELL.

Rédigée par lui-même à l'appui de sa candidature comme membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie.

Paris, G.-V., in-4: 1^re^ éd. 1884, 39 p.; 2^e^ éd. 1889, 83 p.; 3^e^ ed. 1892, in-4, 112 p.

b. THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE LEURS INTÉGRALES, par PAUL APPELL ET ÉDOUARD GOURSAT.

Étude des Fonctions analytiques sur une surface de Riemann.

Paris, G.-V., 1895, gr. in-8, x-530 p.

Préface de CH. HERMITE: p. *a-g*.

Présentation par M. P. APPELL à l'Académie des Sciences: CR, t. 120, 18 fév. 1895, p. 362—363.

c. PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET APPLICATIONS, par P. APPELL ET É. LACOUR.

Paris, G.-V., 1897, gr. in-8, IX-421 p.

Présentation par M. P. APPELL des fasc. I et II à l'Académie des Sciences: CR, t. 122, 29 juin 1896, p. 1523—1524; — t. 123, 30 novembre 1896, p. 932.

Deuxième édition 1923. Avec la collaboration d. M. GARNIER.

d. ELÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, à l'usage des Ingénieurs, des physiciens et des candidats au certificat de mathématiques générales. G.-V.

e. SUR LES FONCTIONS SPHÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Paris, G.-V., 1925, en collaboration avec M. KAMPÉ DE FÉRIET.

f. COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Professé par M. P. APPELL à la Faculté des sciences de Paris, rédigé par M. M. ABRAHAM et DELASSUS, Paris, Hn, 1888, in-4, lithographié.

g. LEÇONS SUR L'ATTRACTION ET LA FONCTION POTENTIELLE.

Professées à la Faculté des Sciences de Paris, redigées par M. CHARLIAT. Paris, G. C., 1892, gr. in-8.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

h. Tome I. Statique. — Dynamique du point.

i. Tome II. Dynamique des systèmes; Mécanique analytique.

j. Tome III. Equilibre et mouvement des milieux continus.

k. Tome IV. Figures d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation uniforme soumise a l'attraction newtonienne de ses particules.
Analyse B. S. M. Thiry 1921, t. XLV, p. 281. — G. V.

l. PRÉCIS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PAR P. APPELL ET S. DAUTHEVILLE.
Introduction à l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée.
A l'usage des Candidats aux Certificats de Licence et des élèves des Écoles techniques supérieures.
Paris, G.-V., 1910, gr. in-8, VI-729 p.

m. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS à l'usage des classes de mathématiques A et B.
1re partie. Notions géometriques. Cinématique.
2me partie. Dynamique et Statique du point. Statique des corps solides. Machines simples.
Paris G. V.

n. LA SCIENCE FRANÇAISE.
Paris, LR, 1917.

o. LES MOUVEMENTS DE ROULEMENT EN DYNAMIQUE.
Paris, G. V., collection Scientia.

p. THÉORIE DES VECTEURS ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.
Paris, Py., 1920.

q. EDUCATION ET ENSEIGNEMENT.
Paris, F. A., 1922.

r. SOUVENIRS D'UN ALSACIEN 1858—1922.
Paris, Py., 1923.

s. HENRI POINCARÉ.
(Collection »Nobles Vies et Grandes Oeuvres.) Pl., 1925.

t. SUR UNE FORME GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE.
(Mémorial, G. V., 1925.)

u. SUR LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES ET LES POLYNÔMES HYPERSPHÉRIQUES.
(Mémorial, G. V., 1925.)

Analyse pure.

1° Fonctions d'un point analytique.

1. *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.*

Ce Mémoire a obtenu, le 21 janvier 1889, la Médaille d'Or accordée par S. M. le Roi de Suède et de Norvège, OSCAR II, à l'occasion du 60[e] anniversaire de sa naissance.

AM, t. 13, 1890, 174 p.

Rapport de CH. HERMITE: AM, t. 13, 1890, p. VII—XII.

2. 3. *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique* (x, y).

CR, t. 94, 13 mars 1882, p. 700—703, 2 sept. 1882, p. 109—131, 132—144. AM, t. 1, 1882—1883.

4. *Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique.*

CR, t. 95, 9 oct. 1882, p. 624—626.

5. *Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce.*

CR, t. 92, 18 avr. 1881, p. 960—962.

6. *Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique* (x, y) *qui se reproduit, multipliée par une constante, quand le point* (x, y) *décrit un cycle.*

CR, t. 95, 23 oct. 1882, p. 914—919.

7. *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

JL, 3[e] s., t. 9, janv. 1883, p. 5—24.

Analyse: BSM, 2[e] s., t. 9, 2[e] p., janv. 1885, p. 20—21.

2° Séries. Intégrales définies. Généralités sur les fonctions d'une variable.

8. *Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable.*

Je donne des exemples de cas où l'on peut reconnaître l'existence d'un pôle ou d'un point critique pour une fonction définie par une série entière, et déterminer la partie principale.

CR, t. 87, 28 oct. 1878, p. 689—692.

9. *Évaluation d'une intégrale définie.*

Je donne la valeur d'une intégrale définie portant sur des fonctions hypergéométriques.

CR, t. 87, 2 déc. 1878, p. 874—876.

10. *Sur la série hypergéométrique et les polynômes de Jacobi.*

J'indique quelques applications de l'intégrale définie dont j'ai donné l'expression dans la Note n° 9.

CR, t. 89, 7 juil. 1879, p. 31—38.

11. *Sur les séries divergentes à termes positifs.*

Je donne divers théorèmes sur les séries divergentes numériques et notamment sur les séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable.

AMPG, 64. Teil, 16 sept. 1879, S. 387—392.

12. *Développement en série entière de* $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$.

AMPG, 65. Teil, 6 janv. 1880, S. 171—175.

13. *Développement en séries trigonométriques des polynômes de M. Léauté.*

NAM, 3ᵉ s., t. 16, juin 1897, p. 265—268.

14. *Sur une classe de polynômes.*

J'étudie des polynômes $P_n(x)$ de degré n tels que

$$\frac{dP_n}{dx}=nP_{n-1}.$$

Ces polynômes forment une classe spéciale comprenant les polynômes que Ch. Hermite a déduits de la différentiation de e^{-x^2} et les polynômes introduits par Léauté pour le développement d'une fonction dont on connaît les valeurs moyennes des dérivées dans un intervalle. Je définis en même temps une opération fonctionnelle qui consiste à former le polynôme $(PQ)_n$ obtenu en remplaçant, dans P_n, chaque puissance x^k par un polynôme $Q_k(x)$. Ces polynômes ont été rencontrés par M. Pincherle dans diverses recherches (AMB, s. 2, t. 12, 1888, p. 126). Ils se rencontrent dans certaines intégrales qui se rattachent à la constante C d'Euler (CR, 1923, t. 177, p. 1165—1166, et 1924, t. 178, p. 157—158).

ASEN, 2ᵉ s., t. 9, avr. 1880, p. 119—144.

15. 16. *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle.*

CR, t. 94, 1ᵉʳ mai 1882, p. 1238—1240.

MA, Bd 21, 1883, 23 sept. 1882, S. 118—124.

17. *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle.*

AM, t. 1, 1882—1883, p. 145—152.

18. *Sur certains développements en série de puissances.*

Je présente des remarques sur le degré d'indétermination des coefficients dans les développements donnés dans les Notes Nos 15, 16, 17.

BSMF, t. 11, 1882—1883, 18 fév. 1883, p. 65—71.

19. *Définition d'une opération sur les fonctions.*

Cette Note contient la définition d'une opération itérative d'ordre fractionnaire.

BSP, 7e s., t. 3, 1878—1879, 12 avr. 1879, p. 166.

20. *Développements en série procédant suivant les inverses de polynômes donnés.*

CR, t. 157, 1913.
BSM, t. 37, 1913.
CR, t. 157, 1913.
BSMF, t. 48, 1920.

21. *La dérivée de la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, quand x est commensurable.*

CR, 1924, t. 178, p. 1229—1230.

22. *Sur l'intégrale* $\int \log(z-a)\, d \log(z-b)$.

AM, 1923, t. 44, p. 217—218.

23. *Sur les intégrales définies de la forme* $\int \varphi(x)\, d\varphi(y)$.

AM, 1923, t. 44, p. 213—215.

3° Fonctions périodiques et doublement périodiques d'une variable. Périodicité générale.

24. *Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en séries trigonométriques des fonctions elliptiques.*

BSMF, t. 13, 1884—1885, 6 déc. 1884, p. 13—18.

Remarque de H. Poincaré: BSMF, t. 13, 1884—1885, 20 déc. 1884, p. 19—27.

25. *Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques.*

BSMF, 2e s., t. 10, 1re p., mai 1886, p. 109—114.

26. *Sur les fonctions elliptiques.*

Je définis les fonctions elliptiques *in abstracto* et j'expose leur réduction aux fonctions Θ. Cette méthode peut être étendue aux fonctions de deux variables (Voir n^{os} 58 et 59).

CR, t. 110, 6 janv. 1890, p. 32—34.

27. *Sur une expression nouvelle des fonctions elliptiques par le quotient de deux séries.*

AJM, v. 14, n° 1, 1892, p. 9—14.

28. *Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

CR, t. 97, 17 déc. 1883, p. 1419—1422.

29 à 31. *Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

Dans le Mémoire n° 29, j'étudie la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et je présente des remarques sur certaines fonctions d'un point analytique (x, y). Les principaux résultats que je démontre se trouvent dans la Note n° 30.

ASEN, 3^e s., t. 1, avril, mai 1884, p. 135—164.

CR, t. 101, 28 déc. 1885, p. 1478—1480.

ASEN, 3^e s., t. 3, janv., fév. 1886, p. 9—42.

32. *Développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

ASEN, 3^e s., t. 2, janv. 1885, p. 9—36.

33. *Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

Dans ce Mémoire, je donne, du théorème de M. Mittag-Leffler, une application dans laquelle les degrés des polynômes qu'on retranche de la partie principale croissent indéfiniment.

ASEN, 3^e s., t. 2, févr., mars 1885, p. 67—74.

34. *Quelques exemples de séries doublement périodiques.*

NAM, 3^e s., t. 15, mars 1896, p. 126—129.

35. *Formations d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété*

$$F[\varphi(x)] = F(x).$$

Je généralise le mode de représentation analytique des fonctions périodiques et j'applique à plusieurs exemples la formule obtenue.

CR, t. 88, 21 avr. 1879, p. 807—810.

36. *Sur les fonctions telles que* $F\left(\sin \frac{\pi}{2} x\right) = F(x)$.

J'applique la méthode exposée dans la Note n° 35, en lui faisant subir quelques légères modifications pour simplifier le calcul.

CR, t. 88, 19 mai 1879, p. 1022—1024.

37. *Sur quelques applications de la fonction* $\Gamma(x)$ *et d'une autre fonction transcendante.*

CR, t. 86, 15 avr. 1878, p. 953—956.

38. *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes étudiées par M. Heine.*

CR, t. 89, 17 nov. 1879, p. 841—844.

39. *Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. Heine.*

CR, t. 89, 15 déc. 1879, p. 1031—1032.

40. *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes.*

Dans ce Mémoire, je développe les considérations que j'ai présentées dans les Notes n^{os} 37 à 39. J'étudie en particulier des relations fonctionnelles, renfermant des fonctions Θ, ou des fonctions elliptiques, dans lesquelles interviennent *trois* périodes.

MA, Bd. 19, 1882, août 1881, S. 84—102.

41. *Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.*

CR, t. 94, 3 avr. 1882, p. 936—938.

42. *Sur des intégrales définies se rattachant au logarithme intégral.*

BSM, t. XXXVII, 1914, p. 327—328.

43. *Sur l'élément simple de la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.*

AM, t. 42, 1920, p. 341—347.

44—44$^{\text{bis}}$. *Intégrales définies se rattachant à la constante C d'Euler.*

CR, 1923 et 1924, t. 177 et t. 178.

4° Fonctions de plusieurs variables. Fonctions abéliennes; fonctions de deux variables à deux, trois ou quatre paires de périodes. Fonctions hypergéométriques de deux variables. Polynômes d'Hermite à deux variables. Inversion des intégrales multiples.

45. *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes.*

Dans ce Mémoire, j'étends à une classe particulière de fonctions de deux variables indépendantes x et y les théorèmes de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions d'une seule variable. J'applique ensuite les théorèmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables.

AM, t. 2, 15 mars 1883, p. 71—80.

46. *Propositions d'Algèbre et de Géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité.*

J'obtiens des fonctions de deux variables à deux paires de périodes liées par une certaine relation algébrique et une infinité de systèmes de surfaces jouissant de propriétés remarquables.

CR, t. 84, 19 mars 1877, p. 540—543.

47. *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires.*

Je fais l'étude de $n+1$ fonctions de n variables, à n groupes de périodes, definies par un système d'équations aux différentielles totales et généralisant celles de la Note n° 46.

CR, t. 84, 11 juin 1877, p. 1378—1380.

48. *Sur les fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissés invariables par une infinité de transformations rationnelles.*

CR, t. 96, 4 juin 1883, p. 1643—1646.

49. *Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions Θ d'une variable.*

CR, t. 94, 13 fév. 1882, p. 421—424.

50. *Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables.*

BSMF, t. 10, 1881—1882, 3 mars 1882, p. 59—67.

51. *Sur une fonction analogue à la fonction Θ.*

Dans cette Note, il s'agit d'une fonction définie par une série simple d'exponentielles dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré en n. Cette fonction a été étudiée ensuite par M. Rivereau (AFSMa, t. 2, 1892, p. 59). (Voir N^{os} 52, 82, 83, 84, 85, 86, 87.)

AFSMa, t. 1, 1891, p. 47—52.

52. *Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.*

BSMF, t. 19, 1890—1891, 18 nov. 1891, p. 125—127.

53. *Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables.*

Extrait d'une Lettre adressée à Martin Krause.

AMPG, d. R., 4 Bd., 9 oct. 1903, S. 292—293.

54. *Sur des fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes.*

CR, t. 90, 26 janv. 1880, p. 174—176.

55. *Sur certaines expressions quadruplement périodiques.*

CR, t. 108, 25 mars 1889, p. 607—609.

56. *Sur les fonctions de deux variables à plusieurs paires de périodes.*

CR, t. 110, 27 janv. 1890, p. 181—183.

57. *Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.*

ASEN, 2e s., t. 7, mai 1890, p. 143—154.

58. 59. *Sur les fonctions périodiques de deux variables.*

L'objet de ce travail est l'étude des fonctions méromorphes de deux variables à quatre (ou à trois) paires de périodes. La méthode suivie peut être étendue d'elle-même aux fonctions de n variables à $2n$ groupes de périodes.

CR, t. 111, 3 nov. 1890, p. 636—638.

JL, 4e s., t. 7, f. 2, 1891, p. 157—219.

60. 61. *Sur les fonctions abéliennes.*

CR, t. 94, 26 juin 1882, p. 1702—1704.

CR, t. 103, 20 déc. 1886, p. 1246—1248.

62. 63. *Sur l'inversion des intégrales abéliennes.*

CR, t. 99, 8 déc. 1884, p. 1010—1011.

JL, 4e s., t. 1, f. 3, 1885, p. 245—279.

64. *Formes des intégrales abéliennes des diverses espèces.*

AFST, t. 7, 1893, p. A. 5—A. 8.

65. *Sur les fonctions abéliennes considérées comme fonctions algébriques de fonctions d'une variable.*

Ce Mémoire est inséré dans le premier des deux Tomes des *Acta Mathematica* imprimés Niels Henrick Abel *in Memoriam.*

AM, t. 26, 8 juil. 1902, p. 249—253.

66. 67. *Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.*

Je définis quatre séries ordonnées suivant les puissances positives croissantes de deux variables, qui se rattachent à la célèbre série de Gauss, comme les fonctions Θ de deux variables de Göpel et de Rosenhain se rattachent aux fonctions Θ d'une variable d'Abel et de Jacobi.

CR, t. 90, 16 févr. et 20 mars 1880, p. 296—298, et p. 731—733.

68. *Sur la série* $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$.

Cette série, qui a été définie dans la Note n° 66, peut être représentée par une intégrale définie semblable à celle dont JACOBI s'est occupé dans le t. 56 du JC, 1859, s. 149.

CR, t. 90, 26 avr. 1880, p. 977—979.

69. *Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables.*

CR, t. 91, 16 août 1880, p. 364—368.

70. *Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi.*

AMPG, 66. Teil, 1881, 26 oct. 1880, S. 238—245.

71. *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables.*

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie dans la séance du 29 mars 1880; je lui ai fait subir quelques modifications, afin d'y faire rentrer les résultats que j'ai obtenus depuis et qui ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie les 26 avril et 16 août 1880.

JL, 3e s., t. 8, mai, juin 1882, p. 173—216.

72. *Sur certaines formules de Hansen et de Tisserand.*

Je trouve qu'un certain coefficient introduit par TISSERAND est exprimé par un polynôme hypergéométrique de deux variables.

CR, t. 97, 12 nov. 1883, p. 1036—1039.

73. *Sur une formule de Tisserand et sur les séries hypergéométriques de deux variables.*

J'applique, à des questions étudiées par TISSERAND, RADAU et CALLANDREAU, les résultats que j'ai donnés dans le Mémoire n° 71 et dans la Note n° 72.

JL, 3e s., t. 10, déc. 1884, p. 407—428.

Analyse: BSM, 2e s., t. 10, 2e p., nov. 1886, p. 225—226.

74. *Les polynômes d'Hermite rattachés aux polynômes de Legendre.*

ASAPP, v. 5, n° 2°, 1910, p. 65—68.

75. *Quelques propriétés des polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et des polynômes X_n de Legendre.*

ASAPP, v. 5, n° 4°, 1910, p. 209—212.

76. *Sur une classe de polynômes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles.*

J'étends aux intégrales doubles la méthode que Gauss a fondée sur les propriétés des polynômes de Legendre pour le calcul approché des intégrales simples. Cette méthode est exposé par M. Angelesco dans sa thèse (Paris 1916). Citons aussi une Note de H. Bourget, CR, 1898.

AFST, t. 4, 1890, p. H. 1—H. 20.

77. 78. *Sur un mode d'inversion des intégrales multiples.*

BSMF, t. 25, 20 janv. 1897, p. 10.

CR, t. 124, 1er fév. 1897, p. 213—214.

79. *Exemples d'inversion d'intégrales doubles.*

AJM, v. 19, n° 4, 1897, p. 377—380.

80. *Le théorème du dernier multiplicateur de Jacobi rattaché à la formule dite d'Ostrogradsky ou de Green.*

CR, 1912, t. 155, p. 878—881.

81. *Les polynômes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.*

CR, 1913, t. 156, p. 1423—1425.

82. *Les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace.*

CR, 1912, t. 156, p. 1582—1585.

83. *Les polynômes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables.*

RCMP, t. XXXVI, 1913.

84. *Sur la convergence des séries procédant suivant les polynômes d'Hermite ou les polynômes analogues plus généraux.* (En collaboration avec M. Kampé de Fériet.)

CR, 1914, t. 158, p. 381—385. Il s'agit dans cette Note de polynômes à plusieurs variables.

85. *Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Kepler et des fonctions de Bessel.*

CR, 1915, t. 160, p. 419—423.

Cette Note contient la définition des fonctions de Bessel à plusieurs variables.

86. *Sur les fonctions Θ de degrés supérieurs.*

CR, t. 153, 1911, p. 584—587.

Sur les fonctions Θ du quatrième degré.

CR, t. 153, 1911, p. 617—618.

87. *Sur des fonctions se rattachant aux fonctions Θ du quatrième degré.*

RCMP, t. XXXIII, 1911.

88. *Sur une transformation de certaines fonctions déduites des fonctions Θ de degré supérieur.*

CR, t. 159, 1914, p. 474—476.

Contribution à l'étude des fonctions Θ de degré supérieur.

CR, t. 161, 1915, p. 161—165.

89. *Sur une deuxième forme des fonctions Θ de degré supérieur.*

CR, t. 161, 1915, p. 370—373.

90. 91. *Essai sur les fonctions Θ du quatrième degré.*

AM, t. 40, p. 291—309.
t. 41, p. 285—303.

5° Equations différentielles ordinaires. Invariants.

92. *Sur des polynômes satisfaisant à une équation différentielle du troisième ordre.*

J'applique, dans cette Communication, un théorème antérieur.
AFAS, 8^{me} session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 257—260.

93. *Sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable.*

AFAS, 8^{me} session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 253—257.

94. *Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ.*

Cette intégration résulte du théorème de Riemann sur les zéros des fonctions Θ de plusieurs variables.
CR, t. 90, 24 mai 1880, p. 1207—1210.

95. *Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante.*
CR, t. 90, 21 juin 1880, p. 1477—1479.

96. *Sur la transformation des équations différentielles linéaires.*
CR, t. 90, 26 juil. 1880, p. 211—214.

97. *Sur les équations différentielles linéaires.*
Je signale, pour les équations différentielles linéaires, des propriétés analogues à celles des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et à la transformation des équations algébriques; je donne des applications.
CR, t. 91, 26 oct. 1880, p. 684—685.

98. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.*
Je généralise les recherches de Ch. Hermite sur l'équation de Lamé (CR, t. 86, 1878, p. 850), celles de M. M. E. Picard et Mittag-Leffler sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (CR, t. 90, 1880, p. 292—299) et celles de Fuchs sur certaines équations différentielles linéaires JL, t. 4, 1878, p. 125, en considérant des équations différentielles dont l'intégrale générale n'a que des pôles sur la surface de Riemann et dont les substitutions fondamentales sont permutables.
CR, t. 91, 13 déc. 1880, p. 972—974.

99. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante.*
Je résume un Mémoire où se trouvent développées des propositions du N° 98.
CR, t. 92, 10 janv. 1881, p. 61—63.

100. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.*
CR, t. 92, 25 avril 1881, p. 1005—1008.

101. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.*
Ces équations sont celles dont l'intégrale générale n'admet sur une surface de Riemann, d'autres singularités que des pôles et des points critiques logarithmiques. Je les classe en équations de 1re, 2me, 3me espèce d'après des caractères analogues à ceux qui servent à classer les trois espèces d'intégrales abéliennes.
AM, t. 13; 1890, 21 janv. 1889, p. 163—174.

102. *Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme* $F[\varphi(x)] = \psi(x) F(x)$.

Ces fonctions se présentent dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires, et en particulier dans l'intégration des équations du second ordre.

CR, t. 93, 7 nov. 1881, p. 699—701.

103. *Mémoire sur les équations différentielles linéaires.*

Le résumé de ce Mémoire se trouve dans la Note N° 97.

ASEN, 2° s., t. 10, nov., déc. 1881, p. 391—424.

104. *Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques.*

CR, t. 94, 30 janv. 1882, p. 203—205.

ASEN, 2° s., t. 12; janv., fév. 1883, p. 9—46.

105. *Sur les fonctions uniformes affectées de coupures et sur une classe d'équations différentielles linéaires.*

CR, t. 96, 9 avril 1883, p. 1010—1020.

106. *Sur des équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction* $\chi_m(x, y)$.

ASEN, 3° s., t. 5, juin—juil. 1888, p. 211—218.

107. *Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires.*

CR, t. 107, 12 nov. 1888, p. 776—778.

108. 109. *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable.*

CR, t. 112, 5 janv. 1891, p. 34—37, 28 sept.—5 oct. 1891, p. 281—315.

AM, t. 15, 1891.

110. *Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.*

J'indique la possibilité d'étendre la théorie des invariants des équations différentielles linéaires et homogènes aux équations *homogènes* mais non *linéaires*.

CR, t. 104, 20 juin 1887, p. 1776—1779.

111. *Sur les invariants des équations différentielles.*

CR, t. 105, 4 juil. 1887, p. 55—58.

112. *Sur les invariants de quelques équations différentielles.*

J'étudie les invariants et certains cas d'intégrabilité:

1° des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n}{b_0+b_1y+\cdots+b_py^p}, \qquad p<n,$$

qui conservent cette forme quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y=\eta u(x)+v(x), \quad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x).$$

2° des équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue y et à ses dérivées, ces équations conservant la même forme quand on y fait

$$y=\eta u(x), \quad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x).$$

JL, 4° s., t. 5, f. 4, 1889, p. 361—423.

113. *Sur les équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants.*

AFST, t. 3, 1889, p. K—I, K—12.

114. *Observations sur une Communication de M. C. Bourlet. Intitulée: Sur certaines équations analogues aux équations différentielles.*

CR, t. 124, 21 juin 1897, p. 1433—1434.

115. *Sur le théorème de Poisson et un théorème récent de M. A. Buhl.*

Dans une Note (CR, t. 132, 1901, p. 313), M. A. Buhl donne une proposition générale dont il déduit, comme cas particulier, ce théorème de Poisson: La forme aux dérivées partielles représentée symboliquement par (α, β) est une intégrale d'un système d'équations canoniques si α et β sont deux intégrales de ce système. Je montre que, inversement, la proposition de M. A. Buhl peut être considérée comme une conséquence du théorème de Poisson.

CR, t. 133, 5 août 1901, p. 317—319.

6° Equations aux dérivées partielles. Potentiels triplement périodiques. Potentiels multiformes.

116. *Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles.*

Dans cette Note, qui se rattache aux Notes 66 et 67, p. 29, j'étends les théorèmes de Riemann et de Fuchs, sur les intégrales des équations différentielles linéaires à une variable, à des équations simultanées définissant r et t en fonctions linéaires de s, p, q, z.

CR, t. 90, 29 mars 1880, p. 731—734.

117. *Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles* (En commun avec M. E. PICARD).

Cette Note contient une extension d'un théorème donné par M. E. PICARD pour les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (CR, t. 90, 1880, p. 293).

CR, t. 92, 21 mars 1881, p. 692—695.

118. *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.*

Je montre que l'une des équations rencontré dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables, contient, comme cas particulier, une équation différentielle linéaire étudiée par G. DARBOUX (CR, t. 95, 1882; p. 69); j'étends à cette équation les principales propriétés indiquées par ce géomètre.

BSM, 2° s., t. 6, I° p., déc. 1882, p. 314—318.

119. *Sur les fonctions satisfaisant à l'équation* $\Delta F=0$.

Je considère une fonction $F(x, y, z)$ de trois variables réelles représentant les coordonnées rectangulaires d'un point M. Je suppose que la fonction F est uniforme, continue, qu'elle admet des dérivées premières et secondes et qu'elle vérifie l'équation du potentiel en tous les points M situés à l'intérieur d'une surface fermée S, excepté en certains points isolés, que j'appelle *points singuliers.* Ces points peuvent se classer en pôles et points essentiels.

CR, t. 96, 5 fév. 1883, p. 368—371.

120. *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F=0$.

Je fais l'étude générale des fonctions qui satisfont à l'équation $\Delta F=0$. La première partie contient une extension d'un théorème dû à M. MITTAG-LEFFLER et plusieurs applications d'un théorème de GREEN; j'étudie ensuite celles de ces fonctions qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes et qui possèdent des propriétés semblables à celles de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Ces fonctions s'expriment à l'aide d'un élément simple Z analogue à la fonction $\frac{H'}{H}$ introduite par HERMITE dans la théorie des fonctions elliptiques.

AM, t. 4, 22 janv.—3 mars 1884, p. 313—374.

121\. 122. *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel* $\Delta F = 0$.

CR, t. 102, 21 juin 1886, p. 1439—1442.

JL, 4^e s., t. 3, f. 1, 1887, p. 5—52.

123\. *Sur les fonctions harmoniques à trois groupes de périodes.*

J'indique un élément analytique pouvant remplacer la fonction Z des deux Mémoires N° 119 et 120.

RCMP, t. 22, 1° sept. 1906; p. 361—370.

On trouvera une application par A. MYLLER: CR, t. 145, 11 nov. 1907, p. 790—792.

124\. 125. *Sur des potentiels conjugués.*

Je donne un système de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre entre quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles, x, y, z. Je démontre que si l'on choisit arbitrairement la fonction T vérifiant l'équation du potentiel, il existe une infinité de fonctions X, Y, Z vérifiant le système précédent; je précise le degré d'indétermination et j'exprime ces fonctions par des intégrales définies.

BSMF, t. 19, 1890—1891, 15 avr. 1891, p. 68—70.

AFSMa, t. 2; f. 3, 1892, p. 53—58.

126\. *Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes.*

Extrait d'une Lettre adressée à M. F. KLEIN.

Je considère une certaine fonction $F(x, y, z)$ qui vérifie l'équation $\Delta F = 0$ et qui admet un cercle pour ligne singulière.

MA, Bd. 30, 26 avr. 1887, S. 155—156.

127\. *Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le polynôme* $U_{m,n}$ *d'Hermite.*

CR, 1918, t. 166, p. 309—312.

128\. *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur des cas de réductions des fonctions hypergéométriques de deux variables.*

CR, 1918, t. 166, p. 408—411.

129\. *Sur une intégrale définie dont l'élément est une exponentielle du* 4^{me} *degré.*

ASAPP, 1917, t. XII, p. 12—13.

130\. *Sur un système de trois équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles.*

RCMP, 1923, t. XLVII, p. 15—16.

131. *Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles.*
CR, 1918, t. 166, p. 469—472.

132. *Addition à la Note précédente.* (Cette addition a pour objet de faire connaître des travaux de M. ROGER LIOUVILLE antérieurs à la Note précédente.)
CR, 1918, t. 166, p. 1555—1556.

133. *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie des fonctions hypergéométriques.*
CR, 1920, t. 171, p. 557—561.
RCMP, 1924, t. XLVIII.

Analyse appliquée à l'Algèbre.

134. *Sur les fractions continues périodiques.*
AMPG, 62 Teil, 1878, S. 183—188.

135. *Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers.*
NAM, 3e s., t. 6, juil. 1887, p. 312—321.

136. 136bis. *L'unité complexe rattachée à une fraction continue à termes réels.*
ASAPP, t. IX, 1914 et t. X, 1915.

137. *Sur un nouveau mode de développement d'un nombre en fraction continue.*
BSM, 1914, t. XXXVIII, p. 118—120.
(Voir les Notes de A. CAHEN, CR, 1923 et 1924.)

138. *Sur les valeurs approchées des polynômes de Bernoulli.*
Appliquant aux polynômes de Bernoulli une méthode donnée par M. G. DARBOUX dans son Mémoire sur les fonctions de grands nombres (JL, 3° s., t. 4, 1878, p. 5, 337), je donne l'expression approchée du polynôme de Bernoulli de rang n, pour n très grand.
NAM, 3° s., t. 6, déc. 1887, p. 547—554.

139. *Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles.*
AMPG, d. R., 1 Bd., 1901, 10 déc. 1900, S. 69—71.

140. *Sur les fonctions sphériques et autres analogues.*
En commun avec M. ARMAND LAMBERT (exposé fait d'après l'Article en allemand de M. A. WANGERIN, avec des additions): un développe-

ment étendu donne la bibliographie des recherches sur les fonctions sphériques et les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables; ces recherches sont dues surtout à des mathématiciens français.

ESMEF, t. II, Art. 28.

Géométrie infinitésimale.

141. *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.*

Thèse pour le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 20 juin 1876. J'étudie les deux problèmes suivants: 1° Etant donné un mouvement hélicoïdal, déterminer les cubiques gauches correspondantes; 2° Etant donnée une cubique définie par certaines équations, déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant.

ASEN, 2° s., t. 5, juil., août 1876, p. 245—274.

Paris, G.-V., 1876, in-4, IV + 35 p.

142. *Sur une propriété caractéristique des hélices.*

AMPG, 64. Teil, 30 janv. 1879, S. 19—23.

143. *Mémoire sur les Déblais et les Remblais des systèmes continues ou discontinus.*

Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences pour le Concours du Prix Bordin (Géométrie) en 1884, a été couronné à la suite d'un rapport de G. Darboux.

MSAS, t. 29, N° 3, 1887, p. 1—208.

Rapport de M. G. Darboux: CR, t. 101, 21 déc. 1885, p. 1312—1316.

144. *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux.*

AJM, v. 10, 1888, p. 175—186.

Géométrie analytique.

145. *Note sur les cubiques gauches.*

CR, t. 82, 3 janv. 1876, p. 70—72.

146. 147. *Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre.*

CR, t. 83, 18 déc. 1876, p. 1209—1211.

AMPG, 62. Teil, 1878, S. 175—182.

148. *Théorème général sur les courbes unicursales.*
AMPG, 60. Teil, 1877, S. 125—127.

149. *Théorème concernant les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre.*
AMPG, 60. Teil 1877, S. 274—275.

150. *Sur l'homographie d'ordre supérieur.*
BSP, 7^e s., t. 4, 1879—1880, 25 oct. 1879, p. 18—20.

151. *Sur une représentation des points imaginaires en Géométrie plane.*
AMPG, 61. Teil, 16 août 1877, S. 359—360.

152. *Sur les familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques.*
AMPG, 63. Teil, 1879, 4 août 1878, S. 50—55.
Analyse par August: JFM, Bd. II, J. 1879, S. 501—503.

153. *Sur les points d'intersection d'une conique fixe par une conique mobile passant par deux points fixes.*
NAM, 3^e s., t. 8, janv. 1889, p. 48—56.

154. *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.*
NAM, 3^e s., t. II, mars 1892, p. 115—119.

155. *Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.*
BSMF, t. 22, 7 fév. 1894, p. 27.

156. *Courbes autopolaires.*
NAM, 3^e s., t. 13, mai 1894, p. 206—210.

157. *Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels.*
AMPG, d. R., 4 Bd., 1903, 19 juin 1902, S. 20—21.

158. *Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation* $XYZ = T^3$.
AMPG, 61. Teil, 21 mars 1877, S. 144—145.

159. *Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle.*
NAM, 3^e s., t. 13, fév. 1894, p. 41—43.

160. *Exercices sur les courbes de direction.*
On sait que Laguerre a appelé courbes de direction les courbes algébri-

ques telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point puissent être exprimés rationnellement en fonction de x et de y.
NAM, 3° s., t. 15, nov. 1896, p. 491—495.

161. *Exercice sur la détermination du point double d'une cubique plane unicursale.*
RMS, t. 4, 8° a., juin 1898, p. 505—506.

162. *Exercices sur la détermination des points doubles d'une quartique plane unicursale.*
RMS, t. 4, 8° a., sept. 1898, p. 585—589.

163. *Sur le cylindroïde.*
RMS, t. 3, 5° a., juin 1895, p. 129—130.

164. *Propriété caractéristique du cylindroïde.*
Il existe un conoïde droit, signalé par PLÜCKER et par CAYLEY, nommé cylindroïde, jouissant de la propriété que le lieu des projections d'un point fixe quelconque sur ses génératrices est une courbe plane. Je démontre que, réciproquement, toute surface réglée non cylindrique possédant cette propriété est un cylindroïde (Voyez une Note de M. DEMOULIN, BSMF, t. 29, 1900, p. 39—59).
BSMF, t. 28, 20 juin 1900, p. 261—265.

165. *Le problème des Déblais et des Remblais.*
RO, t. 1, 28 fév. 1890, p. 97—99.
CR, t. 180, 1925, p. 781—782.

166. *Sur certains polygônes dont les sommets décrivent des courbes algébriques et dont les côtés enveloppent des courbes algébriques.*
CR, t. 162, 1916, p. 306—308.

167. *Sur des lignes polygonales et sur des surfaces polyedrales généralisant les polygônes de Poncelet.*
BSM, t. XL, 1916, p. 244—246.
(Voir des Notes de FONTENÉ, NAM, 1897, et CR, t. 162, 1916, p. 306—308.)

168. *Sur les courbes algébriques définies par une relation paramétrique.*
BSM, t. XXXIX, 1915, p. 43—48.

170. *Courbe de raccordement et élastique plan.*
BSMF, t. 49, 1921, p. 105—108.

Mécanique rationnelle.

171. *Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en Mécanique.*
CR, t. 87, 30 déc. 1878, p. 1074—1077.

172. *Remarques sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la Mécanique.*
En commun avec M. Janaud.
CR, t. 93, 12 déc. 1881, p. 1005—1008.

173. *Sur la chaînette sphérique.*
Je donne, pour exprimer les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique en fonctions elliptiques d'un paramètre, une méthode qui revient à l'intégration d'une équation analogue à celle de Lamé.
BSMF, t. 13, 1884—1885, 4 fév. 1885, p. 65—71.

174. 175. *De l'homographie en Mécanique.*
J'emploie en Mécanique la méthode de transformation des figures par projection centrale, qui joue un rôle si important en Géométrie. J'étudie d'abord le cas d'un point matériel sollicité par une force dans un plan fixe; je termine ainsi: Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points.»
CR, t. 108, 4 fév. 1889; p. 224—226.
AJM, v. 12, 1890, p. 103—114.

176. *Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.*
BSMF, t. 20, 16 mars 1892, p. 21—22.

177. *Sur des transformations de mouvement.*
Je considère deux systèmes matériels dont les liaisons sont indépendantes du temps et je cherche si, à tout mouvement du premier système, on peut faire correspondre un mouvement du second, les forces ne dépendant que des positions.
JC, Bd. 110, Ht. 1, 1892, S. 37—41.

178. *Sur une transformation de mouvements.*
J'étudie une certaine transformation de mouvements, puis je montre qu'un problème traité par Elliot (CR, t. 116, 1893, p. 1117; ASEN, 1893,

p. 231) et une question résolue par M. Mestschersky (BSM, 2^{e} s., t. 18, 1894, p. 170), peuvent être envisagés comme des cas particuliers de cette transformation.

AJM, v. 17, N° 1, 1895, p. 1—5.

179. *Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

Je ramène, à une forme canonique permettant l'application des théorèmes de Jacobi, les nombreuses analogies qui existent entre les équations d'équilibre d'un fil et les équations du mouvement d'un point.

CR, t. 96, 12 mars 1883, p. 688—691.

180. *Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

AFST, t. 1, 1887, p. B. 1—B. 5.

181. *Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système.*

AFST, t. 6, 1892, p. C. 1—C. 6.

182. 183. *Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe.*

Je ramène l'intégration des équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

CR, t. 103, 22 nov. 1886, p. 991—993.

AM, t. 12, 1888—1889, 17 sept. 1888, p. 1—50.

184. *Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible.*

ASAPP, v. 4, N° 1, N° 2, 1909, p. 9—17, 113—115.

185. *Remarque sur les courbes brachistochrones.*

BSMF, t. 19, 1890—1891, 6 mai 1891, p. 97—98.

186. *Du tautochronisme dans un système matériel.*

Un système matériel est tautochrone lorsqu'il met le même temps à revenir à une position déterminée quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse. J'indique la solution générale du problème des tautochrones.

CR, t. 114, 2 mai 1892, p. 996—998.

187. *Remarque sur une Note de M. G. di Pirro, intitulée: Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique.*

CR, t. 123, 14 déc. 1896, p. 1057.

188. *Remarques sur une Note de M. Levi-Civita, intitulée: Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique.*
CR, t. 124, 22 fév. 1897, p. 395.

189. *Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton.*
J'indique comment certaines démonstrations des équations de Lagrange ne peuvent pas être appliquées, quand les liaisons ne sont pas exprimables en termes finis.
BSMF, t. 26, 7 déc. 1898, p. 265—267.

190. *Sur les mouvements de roulement; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange.*
CR, t. 129, 7 août 1899, p. 317—320.

191. 192. *Sur une forme générale des équations de la Dynamique.*
Cette forme d'équations s'applique à tous les systèmes sans frottement, holonomes ou non; elle repose sur la considération de l'énergie d'accélération $S=\frac{1}{2}\Sigma m J^2$ où J est l'accélération du point m.
CR, t. 129, 28 août 1899, p. 423—427.
JC, Bd. 121, Ht. 4, 1900, S. 310—319.

193. *Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*
CR, t. 129, 11 sept. 1899, p. 459—460.

194. *Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*
JL, 5° s., t. 6; f. 1, 1900, p. 5—40.

195. *Sur une forme générale des équations de la Dynamique et sur le principe de Gauss.*
Je démontre l'impossibilité de déduire les équations du mouvement d'un système non holonome de la seule connaissance de la demi-force vive T et de la fonction des forces U.
JC, Bd. 122, Ht. 3, 1900, S. 205—208.

196. *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique.*
JL, 5° s., t. 7, f. 1, 1901, p. 5—12.

197. *Sur le principe de la moindre contrainte de Gauss.*
AMLB, 1901—1902, p. 407—412.

198. *Extension des équations de Lagrange au cas du frottement de glissement.*
CR, t. 114, 15 fév. 1892, p. 331—334.
Analyse par E. Lampe: JFM, Bd. 24, J. 1892, S. 856—857.

199. *Sur l'extinction du frottement.*
J'étudie le problème de l'extinction du frottement dans le cas d'un système matériel présentant certains caractères qui sont réalisés dans la plupart des systèmes usuels.
BSMF, t. 35, 11 avr. 1907, p. 131—133.

200. *Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement.*
Je développe et précise les indications que j'ai données dans la Note N° 199. Voir, comme suite à cette Note, une Note de M. E. Daniele (N. C., s. 5, v. 15, Giugno 1908, p. 492).
JC, Bd. 133, Ht. 2, 1907, S. 93—96.

201. *Sur un théorème relatif au déplacement initial d'un système sans frottement.*
AFAS, II, Résumés, Clermont-Ferrand, 1908, gr. in-8, p. 49.

202. 203. *Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions.*
Pour un système holonome, je déduis des équations de Lagrange une forme simple des équations de la théorie des percussions.
CR, t. 116, 26 juin 1893, p. 1483—1487.
JL, 5° s., t. 2, f. 1, 1896, p. 5—20.

204. *Remarques sur les systèmes non holonomes.*
A propos d'une Note intitulée *Sur les percussions dans les systèmes non holonomes*, par M. M. Beghin et Rousseau (JL, 1903, p. 21).
JL, 5° s., t. 9, f. 1, 1903, p. 27—28.

205. 206. *Sur le théorème des aires.*
CR, t. 119, 5 nov. 1894, p. 770—771.
BSMF, t. 22, nov. 1894, p. 190—195.

207. *Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.*
BSMF, t. 19, 1890—1891, 20 mai 1891, p. 102—103.

208. *Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales.*
AJM, v. 13, 1891, p. 153—158.
Analyse par J. Hadamard, RO, t. 2, 30 mars 1891, p. 190.

209. *Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot.*
BSMF, t. 26, 15 juin 1898, p. 98—102.

210. *Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau.*
RCMP, t. 14, 1900, 27 juil. 1899, p. 1—6.
Voir Extrait d'une Lettre adressée à M. P. Appell par M. D. J. K. Korteweg; RCMP, t. 14, 1900, p. 7—8.

211. *Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air.*
AMPG, d. R., 5 Bd., 15 mars 1903, S. 177—179.

212. *Remarque relative à un Mémoire de M. Lucio Silla, intitulé: Sopra Alcune questioni di Statica.*
RCMP, t. 21, 10 fév. 1906, p. 314—315.

213. *Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu.*
BSMF, t. 26, 6 juil. 1898, p. 135—136.

214. *Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons.*
JL, 5° s., t. 5, f. 2, 1899; p. 137—153.

215. *Déformation spéciale d'un milieu continu; tourbillons de divers ordres.*
BSMF, t. 29, 1901, 21 nov. 1900, p. 16—17.

216. *Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope.*
NAM, 4° s., t. 2, mai 1902, p. 193—197.

217. *Note sur les expériences du Commandant Hartmann.*
Exposées dans un Mémoire intitulé *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (Revue d'Artillerie, t. 45, 46, 47, 1894, 1895, 1896).
BSMF, t. 28, 17 janv. 1900, p. 66—68.

218. *Sur quelques fonctions et vecteurs de points dans le mouvement d'un fluide.*
CR, t. 136, 26 janv. 1903, p. 186—189.

219. *Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide.*
JL, 5° s., t. 9, f. 1, 1903, p. 5—19.

220. *Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse.*
BSMF, t. 31, 1903, p. 68—73.

221. *Sur les positions d'équilibre d'un navire avec un chargement liquide.*
CR, t. 129, 16 oct. 1899, p. 567—569.

222. *Equilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*
CR, t. 129, 23 oct. 1899, p. 636—637.

223. *Remarques sur une note de M. P. Duhem, intitulée: Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants, et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide.*
CR, t. 129, 27 nov. 1899, p. 880.

224. *Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*
JEP, 2° s., 5° c., 1900, p. 101—107. — RMa, t. 148, 1901, p. 5—20.

225. 226. *Equation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction newtonienne.*
SSS, 48° congrès, Paris, 30 mars 1910, p. 20—23.
RCMP, t. 30, 2 Apr. 1910, p. 82—84.

227. *Machine à déterminer les balourds.*

Les roues des wagons de chemins de fer sont associées par paires: les deux roues d'une même paire sont réunies par un cylindre rigide, de façon à former un solide de révolution autour de l'axe de ce cylindre. La paire de roues ainsi constituée est liée au wagon de telle façon que son mouvement relatif, par rapport au wagon, soit une rotation autour de l'axe commun des deux roues. Une condition essentielle de stabilité est alors que cet axe soit un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité. Des méthodes statiques permettent de voir si le centre de gravité est sur l'axe commun des deux roues; mais ce n'est que par des expériences dynamiques que l'on peut voir si cet axe est principal pour le centre de gravité et, par conséquent, pour chacun de ses points. Supposons que l'axe ne soit pas un axe principal d'inertie et, pour simplifier, supposons qu'il puisse être rendu principal en enlevant à la roue R une masse m, placée en un point M de cette roue, et à la roue R_1 une masse m_1, placée en M_1. On dit alors que la roue R présente un *balourd* m et la roue R_1 un *balourd* m_1.

Je fais la théorie de l'appareil imaginé par M. Haffner pour déterminer la position et la masse des balourds.

JEP, 2° s., 9° c., 1904, p. 151—162.

228. *Sur les liaisons non linéaires par rapport aux vitesses.*

RCMP, 1912, t. XXXIII.

Cette Note a été le point de départ d'importants travaux de M. Delassus, CR et AENS.

229. *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse.*

RCMP, 1911, t. XXXII.

230. *Sur les liaisons cachées et les forces gyroscopiques apparentes dans les systèmes non holonômes.*

CR, t. 162, 1916, p. 27—29.

231. *Le principe du minimum de l'énergie d'accélérations et la substitution des liaisons aux forces.*

CR, t. 159, 1914, p. 989—992.

232. *Sur une extension de la théorie des tourbillons et des équations de Weber.*

CR, t. 164, 1917, p. 71—75.

233. 234. *Mouvements aériens gauches de sphères pesantes légères.*

CR, 1918, t. 166, p. 22—25, et Journal de Physique, 1918.

235. *Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu.*

CR, 1918, t. 166, p. 513—516.

236. *Sur la théorie de la chaleur.*

CR, t. 110, 27 mai 1890, p. 1061—1066.

237. *Sur l'équation $r=q$ et la théorie de la chaleur.*

JL, 4° s., t. 8, f. 2; 1892, p. 187—216.

238. *Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes.*

Dans cette Note, à la suite d'une correspondance que j'ai échangée avec M. Chervet, je m'occupe de la distribution du potentiel d'une masse liquide indéfinie, soit limitée par deux plans parallèles, soit ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle ou d'un parallélépipède rectangle, les électrodes étant placées d'une façon quelconque. Le potentiel est alors une fonction uniforme de x, y, z, ayant deux groupes de périodes et admettant une infinité de pôles simples dans la section droite des deux électrodes.

CR, t. 98, 28 janv. 1884, p. 214—216.

239. *Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini* (En commun avec M. CHERVET).

CR, t. 98, 11 fév. 1884, p. 358—360.

240. *Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique.*

Cette fonction Z a été définie dans le Mémoire N° 120, p. 36.

AM, t. 8, 23 mars 1886, p. 265—294.

241. *Mouvement d'une particule électrisée soumise à l'action d'un point électrique et d'un pôle magnétique confondus.*

ASAPP, v. 4, N° 3°, 1909, p. 129—131.

242. *Figures d'équilibre d'un fil ou de deux fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent.*

CR, 1913, t. 156, p. 500.

Voyez BRATU, thèse, Paris 1914, Analyse: BSM, t. XXXVIII, 1914, p. 240—241.

243. *Sur une transformation du mouvement d'un système holonôme conservatif donné dans le mouvement d'un autre système donné ayant le même degré de liberté.* (En collaboration avec M. VERGNE.)

CR, t. 157, 1913, p. 1800—1801.

244. *Sur un théorème de Joseph Bertrand relatif à la cinématique des milieux continus.*

BSM, 1917, t. XLI, p. 23—28.

245. *Aperçu sur l'emploi possible de l'énergie d'accélération dans les équations de l'électrodynamique.*

CR, 1912, t. 154, p. 1037—1040.

246. *Equation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties.*

CR, 1913, t. 156, p. 587—590.

247. Hommage à l'Académie des Sciences d'un article de l'Edition française de *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques* relatif à *l'Hydrodynamique.* (En commun avec M. BEGHIN.)

CR, 1914, t. 158, p. 920.

248. *Le principe du minimum de l'énergie d'accélération et la substitution des liaisons aux forces.*
CR, 1914, t. 159, p. 989—992.

249. *Sur les liaisons cachées et les forces gyroscopiques apparentes dans les systèmes non holonômes.*
CR, 1916, t. 162, p. 27—29.
Voir une Note de M. EDOUARD GUILLAUME »Sur l'extension des équations de M. Appell à la physique des milieux continus; application à la théorie des électrons».
CR, t. 156, 1913, p. 875—877.

250. *Equilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation soumise à l'attraction newtonienne de ses parties.*
ABL, Notice 1919.

251. *Sur les oscillations ellipsoïdales d'une sphère liquide.*
CR, 1920, t. 172, p. 761—764.

252. *Sur le mouvement périodique d'un fluide.*
CR, 1921, t. 172, p. 885—888.

253. *Lettre à M. Mittag-Leffler;*
t. 38 des Acta Mathematica consacré à la mémoire d'HENRI POINCARÉ.
CR, 1921, t. 172, p. 1265—1266.

254. *Sur les principes de la Mécanique usuelle.*
Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 1922, 2me série, t. 57, p. 1—4.

255. *Mouvement d'ensemble d'une masse fluide hétérogène, soumise à l'attraction mutuelle de ses particules, autour de son centre de gravité.*
CR, 1924, t. 179, p. 119—120.

256. *Sur la nature du mouvement d'un corps céleste fluide autour de son centre de gravité.*
CR, 1924, t. 179, p. 795—796.

257. *Idem.*, AM, 1926.

Abréviations.

AAWB *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Berlin, in-4.

AFAS *Comptes rendus des Sessions de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.* Paris, rue Serpente, 28, gr. in-8.

AFSMa *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.* Paris, G. M., in-4.

AFST *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques. Paris, G.-V., in-4.

ABL *Annuaire du Bureau des Longitudes.* Paris, G.-V., in-16.

AJM *American Journal of Mathematics,* edited by FRANK MORLEY, published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore, in-4.

AM *Acta Mathematica.* Journal fondé et rédigé par G. MITTAG-LEFFLER. Berlin, Stockholm, Paris, Hn., in-4.

AMB *Annali di Matematica pura et applicata* già diretti da FRANSCESCO BRIOSCHI, continuati dai Prof. L. BIANCHI. — Milano, C. R., in-4.

AMPG *Archiv der Mathematik und Physik,* Gegründet 1841 durch J.-A. GRUNERT, Her. von E. LAMPE, ... Leipzig, B.G.T., gr. in-8.

ASAPP *Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto,* publicados sobra direcção de F. GOMES TEIXEIRA. Coïmbre, gr. in-8.

ASEN *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Paris, G.-V., in-4.

BAMS *Bulletin of the American mathematical Society.* Lancaster, P.A., and New York, the Macmillan Society, 2^{d} s., in-8.

BBSL *Bollettino di Bibliografia et Storia delle Scienze matematiche,* pubblicato per cura di GINO LORIA, Torino, C.C., gr. in-8.

BSM *Bulletin des Sciences mathématiques,* fondé en 1870 par GASTON DARBOUX, publié par GASTON DARBOUX, ÉMILE PICARD et JULES TANNERY continué par E. PICARD et P. APPELL. De 1870 à la fin de 1884, le titre fut *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* Paris, G.-V., gr. in-8.

BSMF *Bulletin de la Société mathématique de France.* Paris, G.-V., gr. in-8.

BSP *Bulletin de la Société philomathique de Paris.* Paris, S., de 1864 à 1888, in-8; ensuite gr. in-8.

CMF *Căsopis pro pĕstovăni mathematiky a fysiky,* redigu jí K. PETR, BOH. KUČERA. Praze, B. Stýbla, gr. in-8.

CR *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* Paris, G.-V., in-4.

EM *L'Enseignement mathématique* dirigé par C.-A. LAISANT et H. FEHR. Paris, G.-V., et Genève, Georg, gr. in-8.

ESMEF *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.* Édition française publiée d'après l'édition allemande sous la direction de JULES MOLK. Paris, G.-V., gr. in-8.

IF *Institut de France.* Paris, F.-D., in-4.

IM *L'Intermédiaire des Mathématiciens* fondé en 1894 par C.-A. LAISANT et ÉMILE LEMOINE. Paris, G.-V., in-8.

JC *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Beg. von A. L. CRELLE. Her von K. HENSEL. Berlin, G.R., in-4.

JEP *Journal de l'École Polytechnique.* Paris, G.-V., in-4.

JFM *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* Beg. von CARL OHRTMANN. Her. von EMIL LAMPE. Berlin, G.R., gr. in-8.

JL *Journal de Mathématiques pures et appliqueés* fondé par J. LIOUVILLE, rédigé par CAMILLE JORDAN, Paris, G.-V., in-4.

JST *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* publicado pelo Dr F. GOMES TEIXEIRA. Coïmbre, gr. in-8.

LCD *Literarisches Centralblatt für Deutschland.* Beg. von FREDRICH BARNCKE. Her. von EDWARD BARNCKE. Leipzig, E. Avenarius, in-4.

MA *Mathematische Annalen.* Beg. 1868 durch ALFRED CLEBSCH und CARL NEUMANN. Her. von FELIX KLEIN, ... Leipzig, B.G.T., gr. in-8.

MAWB *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Berlin, gr. in-8.

MSAS *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France.* Paris, I. N., in-4.

MMP *Monatshefte für Mathematik und Physik.* Her. von G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER. Wien, J. Eisenstein, gr. in-8.

Ms *Mathesis.* Recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Gand, Ad. Hoste; Paris, G.-V., gr. in-8.

NAM *Nouvelles Annales de Mathématiques,* fondées en 1842 par GÉRONO et TERQUEM, dirigées par C.-A. LAISANT, C. BOURLET et R. BRICARD, Paris, G.-V., in-8.

NAW *Nieuw Archief voor Wiskunde* onder redactie van J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE. Amsterdam, Delsman en Nolthenius, gr. in-8.

NC *Il nuovo Cimento,* Organo della *Società italiana di Fisica,* pubblicato per cura dei Direttori ... Pisa, Pieraccini, gr. in-8.

NTM *Nyt Tidsskrift for Matematik,* Redigeret af C. JUEL og V. TRIER. København, Jul. Gjellerup, in-8.

ÖS *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar.* Stockholm, P. A. Norstedt, in-8.

RCMP *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Palermo, gr. in-8.

RMa Ministère de la Marine. *Revue Maritime.* Paris. R. Chapelot et Cie, gr. in-8. (Rédaction, 2, rue Royale.)

RMS *Revue de Mathématiques spéciales.* Paris, N., in-4.

RO *Revue générale des Sciences pures et appliquées.* Directeur: LOUIS OLIVIER, Paris, in-4.

RR *Revue scientifique. (Revue rose.)* Directeur de la rédaction: CH. MOUREU. Paris, 41 *bis,* rue de Châteaudun, in-4.

SSS *Comptes rendus du Congrès des Sociétés Savantes de Paris et des départements. Section des Sciences.* Paris, I.N., gr. in.-8.

WM *Wiadomosci matematyczne.* Rédigé en polonais. Rédacteur et éditeur: S. DICKSTEIN. Warszawa, Marszalkowska, 117, gr. in-8.

ZMP *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* Her. von O. SCHLÖMLICH und M. CANTOR. Leipzig, B.G.T., gr. in-8.

aa.	aargang.
Afd.	Afdeling.
Abt.	Abteilung.
Bd.	Band.
Beg.	Begründet.
c.	cahier.
D.	Deel.
d. R.	dritte Reihe.
f.	fascicule.
Ht.	Heft.
Her.	Herausgegeben.
J.	Jahrgang.
Lit.	Literaturberichte.
n. s.	nouvelle série, new series.
T. R.	Tweede Reeks.
S.	Seite.
s.	série, series.

A. C.	Armand Colin.
B. G. T.	B. G. Teubner.
C. C.	Carlo Clausen.
C. D.	Charles Delagrave.
C. N.	C. Naud.
C. R.	C. Rebeschini di Turati.
D. P.	Dunod et Pinat.
F. A.	Félix Alcan.
F. D.	Firmin Didot.
G. C.	Georges Carré.
G. M.	G. Masson.
G.-V.	Gauthier-Villars.
G. R.	Georg Reimer.
H.	Hachette et Cie.
Hn.	A. Hermann; Hermann et fils.
I. N.	Imprimerie nationale.
L. R.	Larousse.
N.	Nony et Cie.
Py.	Payot.
Pl.	Plon.