

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE AUTOMORPHEN FUNKTIONEN BELIEBIG VIELER VARIABLEN.

VON
P. J. MYRBERG
in HELSINGFORS.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	216
Kapitel I. <i>Unendliche Folgen linearer Substitutionen.</i>	
§ 1. Allgemeine Eigenschaften linearer Substitutionsfolgen	223
§ 2. Folgen linearer Substitutionen, die eine algebraische Mannigfaltigkeit in sich selbst transformieren	237
Kapitel II. <i>Diskontinuierliche Kollineationsgruppen.</i>	
§ 3. Normale Diskontinuität	243
§ 4. Bildung normal diskontinuierlicher Kollineationsgruppen	246
§ 5. Definite Formen	249
§ 6. Indefinite quadratische Formen	250
§ 7. Quadratische Hermitesche Formen	255
§ 8. Hyperfuchssche Gruppen	257
§ 9. Gruppen ohne invariante Gebilde	258
Kapitel III. <i>Cremonagruppen.</i>	
§ 10. Die endlichen kontinuierlichen Cremonagruppen	264
§ 11. Bildung normal diskontinuierlicher Cremonagruppen	266
§ 12. Cremonagruppen mit einem endlichen invarianten Raum	267
§ 13. Hyperabelsche Gruppen und gewisse Verallgemeinerungen derselben	269
§ 14. Gruppen mit festen Häufungsgebilden	272
§ 15. Gruppen der Hyperkugelverwandtschaften	273
Kapitel IV. <i>Das Hesse-Kleinsche Übertragungsprinzip.</i>	
§ 16. Die Relativität der Gruppendiskontinuität	275
§ 17. Gruppen reeller Substitutionen	276
§ 18. Binäre Formen	280
§ 19. Quadratische Formen beliebig vieler Variablen.	286
§ 20. Bemerkungen über die höheren Formen	289
§ 21. Gruppen komplexer Substitutionen	290
§ 22. Quadratische Hermitesche Formen	294

	Seite
Kapitel V. Automorphe Funktionen.	
§ 23. Existenz der automorphen Funktionen	296
§ 24. Zwei allgemeine Klassen automorpher Funktionen	305
§ 25. Hyperfuchssche Funktionen	307
§ 26. Eine Klasse automorpher Funktionen ohne invariante Gebilde	309
§ 27. Zyklische Gruppen	309
§ 28. Hyperabelsche Funktionen	313
§ 29. Andere Beispiele	315
§ 30. Eine neue Darstellung automorpher Funktionen bei gewissen Gruppen	315
Kapitel VI. Arithmetische Invarianten.	
§ 31. Allgemeine Definitionen	319
§ 32. Binäre Formen	321
§ 33. Darstellung der arithmetischen Invarianten beliebiger Formen durch verallgemeinerte Dirichletsche Reihen	326
§ 34. Hermitesche Formen	331
§ 35. Schlußbemerkungen	335

Einleitung.

1. Die Theorie der automorphen Funktionen einer komplexen Variablen, die vor vier Jahrzehnten durch die Arbeiten von POINCARÉ und KLEIN allgemein begründet wurde, ist während der letzten Jahre namentlich durch die Arbeiten von KOEBE zu einem gewissen Abschluß gebracht worden. Dagegen befindet sich die allgemeine Untersuchung der automorphen Funktionen zweier und mehrerer Variablen auf einem verhältnismäßig unentwickelten Stadium.

Nach dem klassischen Beispiel der abelschen Funktionen hat man vorzugsweise zwei verschiedene allgemeine Klassen automorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen studiert, nämlich die von PICARD eingeführten hyperfuchsschen [20, 21, 22] und hyperabelschen [23] Funktionen. Die erstgenannten bilden eine natürliche Verallgemeinerung der Poincaréschen „fuchsschen Funktionen“, d. i. der automorphen Funktionen mit einem Hauptkreis, die letzteren Funktionen, die in engem Zusammenhang mit den abelschen Funktionen stehen, enthalten als bekanntesten Spezialfall die in der analytischen Zahlentheorie wichtigen höheren Modulfunktionen.

Allgemeine Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Veränderlichen haben FUBINI [6] und GIRAUD [7] ausgeführt. Es gelingt in diesen Arbeiten, unter gewissen Voraussetzungen betreffs der diskontinuierlichen Gruppen, die Existenz automorpher Funktionen nachzuweisen, deren Eigenschaften in mehrerer Hinsicht denjenigen der automorphen Funktionen einer Variablen analog

sind. Diese Betrachtungen lassen aber auch anderseits erkennen, daß eine vollständige Analogie mittels der bisherigen Methoden nicht zu erreichen ist.

Man wird gleich beim ersten Schritt ganz neuen Verhältnissen begegnen, wenn man die im Falle einer Variablen geltenden Sätze auf mehrere Variablen übertragen will. So lehrt uns das Beispiel der abelschen Funktionen, daß zur Existenz automorpher Funktionen die eigentliche Diskontinuität der Gruppe nicht hinreichend ist: es sind noch hier gewisse Bedingungen arithmetischer Natur erforderlich, nämlich die Riemannschen bilinearen Relationen zwischen den Perioden. Wir werden ferner unten sehen, was auch GIRAUD bemerkt hat, daß es Gruppen gibt, deren automorphe Funktionen wesentliche Singularitäten in Bereichen aufweisen müssen, wo die Gruppe eigentlich diskontinuierlich ist.

Alle diese und analoge Schwierigkeiten können dadurch beseitigt werden, daß man die Existenz eines endlichen, in bezug auf sämtliche Substitutionen der Gruppe invarianten Raumes D voraussetzt. In diesem Falle, auf welchen sich die bisherigen Untersuchungen hauptsächlich beschränken, kann man unter gewissen ergänzenden Annahmen die Analogie mit dem Fall einer Variablen bewahren, solange man sich auf das Innere von D beschränkt. Wenn aber die Gruppe ihre eigentliche Diskontinuität noch über die Begrenzung von D hinaus bewährt, gestatten die bisher bekannten Methoden nichts über das Verhalten der zugeordneten automorphen Funktionen außerhalb des Raumes D auszusagen.

Die Annahme eines invarianten Raumes bedeutet natürlich eine wesentliche Einschränkung und es entsteht die Frage nach der Existenz automorpher Funktionen bei Gruppen, die den Gruppen ohne Hauptkreis analog keine invarianten Mannigfaltigkeiten besitzen.

2. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, eine neue allgemeine Methode zur geometrischen und funktionentheoretischen Untersuchung diskontinuierlicher Gruppen und ihrer automorphen Funktionen darzustellen. Wir werden unsere Theorie für die allgemeinsten Cremonagruppen endlicher Ordnung entwickeln. Für diese Gruppen ist es charakteristisch, daß ihre geometrische Theorie durch Anwendung der Hilfsmittel der projektiven Geometrie entwickelt werden kann. Das Hauptziel unserer Untersuchungen bildet der Beweis der Existenz automorpher Funktionen in möglichst allgemeinen Fällen sowie die Bestimmung des Existenzbereichs und der wesentlichen Singularitäten jener Funktionen.

Unsere Arbeit zerfällt in zwei Teile.

Die erste, geometrische Abteilung beschäftigt sich zunächst mit der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften unendlicher Substitutionenfolgen. In diesen Betrachtungen werden nicht nur einzelne Punkte, wie man es gewöhnlich

tut, sondern auch beliebig ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten hinsichtlich der Häufungsgebilde ihrer Transformierten studiert. Diese allgemeinere Betrachtungsweise ist hier um so natürlicher, weil die Niveaugebilde analytischer Funktionen mehrerer Variablen keine isolierten Punkte, sondern kontinuierliche Gebilde sind.

Eine besondere Betrachtung werden wir Folgen von Substitutionen widmen, die eine algebraische Mannigfaltigkeit, deren Gleichung durch Nullsetzen irgend einer gewöhnlichen oder Hermiteschen Form erhalten wird, in sich selbst transformieren. Zwischen den geometrischen Eigenschaften der genannten Folgen und der zugehörigen invarianten Mannigfaltigkeit findet eine interessante Beziehung statt, die vieler wichtigen Anwendungen fähig ist.

In den beiden folgenden Kapiteln wird eine neue, von der bisherigen wesentlich abweichende Theorie der diskontinuierlichen Gruppen entwickelt. Es wird eine neue Art der Diskontinuität eingeführt, die „normale Diskontinuität“, welche als eine sowohl für geometrische als funktionentheoretische Zwecke natürliche Verallgemeinerung des im Falle einer Variablen angewandten Begriffs der eigentlichen Diskontinuität angesehen werden kann. Die normal diskontinuierlichen Gruppen werden durch die Eigenschaft charakterisiert, daß bei ihnen ein Bereich B existiert, wo sämtliche Folgen von Substitutionen der Gruppe in dem von MONTEL [14] definierten Sinne normal sind. Der fragliche Normalbereich B fällt im Falle einer Variablen mit dem Bereich der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe zusammen, im Falle zweier und mehrerer Variablen ist aber der Bereich B im allgemeinen im Bereich der eigentlichen Diskontinuität als Teilbereich enthalten.

Wir werden ferner in diesem Zusammenhang ein allgemeines Problem behandeln, dessen Lösung für die weiteren Entwicklungen von fundamentaler Bedeutung ist. Es handelt sich hier um die Aufstellung derjenigen Bedingungen, denen irgend ein Bereich (oder allgemeiner irgend eine Punktmannigfaltigkeit) genügen soll, um jeder Cremonagruppe endlicher Ordnung, deren Substitutionen denselben in sich selbst transformieren, die normale Diskontinuität zu garantieren, sobald es keine infinitesimale Substitution gibt. Die Bedingungen, zu denen unsere Betrachtungen führen, können nicht nur als hinreichend, sondern im allgemeinen auch als notwendig angesehen werden.

Die hierher gehörigen Untersuchungen führen ferner in umfangreichen Fällen zu der vollständigen Bestimmung des Diskontinuitätsbereichs vermittels einer sehr einfachen und anschaulichen Methode. Es gibt besonders zwei allgemeine Klassen von Gruppen, die unserer Methode leicht zugänglich sind.

Die eine der fraglichen Klassen besteht aus der Gesamtheit der oben genannten Cremonagruppen, die einen endlichen invarianten Raum besitzen. Auf

diesen bisher fast allein betrachteten Fall angewandt führen unsere allgemeinen Resultate zu dem Ergebnis, daß bei den genannten Gruppen das Fehlen der infinitesimalen Substitution zur normalen (und somit auch zur eigentlichen) Diskontinuität wenigstens im allgemeinen hinreichend ist — ein Satz, dessen Beweis bisher nur unter mehreren beschränkenden Voraussetzungen gelungen ist.

Die zweite der oben genannten Klassen besteht aus den Gruppen mit einer ausgezeichneten Eigenschaft, die man als „Festigkeit der Häufungsgebilde“ bezeichnen kann. Diese Gruppen sind nämlich durch die Eigenschaft charakterisiert, daß bei ihnen die Häufungsgebilde der Transformierten irgend welcher Punktmannigfaltigkeiten von dem Anfangsgebilde in gewissem Sinne unabhängig sind, woraus folgt, daß die automorphen Funktionen der fraglichen Gruppen eine größere Analogie mit dem Falle einer Variablen als bei den anderen Gruppen aufweisen.

Die wichtigsten Beispiele von obigen Gruppen findet man unter den Gruppen, deren Substitutionen eine gewöhnliche oder Hermitesche quadratische Mannigfaltigkeit in sich selbst überführen. Die Konstruktion des Normalbereichs läßt sich in diesen Fällen vermittels einer Methode ausführen, worin in einfacher Weise von gewissen projektiven Invarianten Gebrauch gemacht wird. In diesem Zusammenhang wird aber auch die Existenz von normal diskontinuierlichen Cremonagruppen nachgewiesen, die keine invarianten Mannigfaltigkeiten besitzen und welche die ersten allgemeinen Beispiele von Gruppen liefern, die den Gruppen ohne Hauptkreis einer Variablen analog sind.

Unsere geometrisch-gruppentheoretischen Betrachtungen erhalten eine wichtige Erweiterung dadurch, daß wir die normale Diskontinuität als einen relativen Begriff auffassen, was durch eine Anwendung des allgemeinen HESSE-KLEIN'schen Übertragungsprinzips [8, 9] möglich wird.

Wenn man von irgend einer Form φ (oder noch allgemeiner von einem System von Formen) ausgeht, und auf die Variablen derselben die Substitutionen der gegebenen Gruppe anwendet, erleiden die unbestimmten Koeffizienten der Form lineare Substitutionen, die eine mit der gegebenen Gruppe Γ isomorphe Gruppe $\Gamma(\varphi)$ bilden. Diese Gruppe kann als eine zur Form φ gehörige Darstellung der gegebenen Gruppe angesehen werden, zu welcher man gelangt, wenn man statt einzelner Punkte das Gebilde $\varphi = 0$ zum geometrischen Element der Gruppe wählt. Es entsteht hier die Frage nach der Gesamtheit derjenigen Formen φ , deren zugeordnete Gruppen $\Gamma(\varphi)$, sobald nur die Gruppe Γ keine infinitesimale Substitution enthält, normal diskontinuierlich sind. Diese Frage wird in Kap. IV vollständig beantwortet, indem zugleich eine Methode zur Bildung des zugeordneten Normalbereichs gegeben wird. Bemerkenswert

ist das Resultat, daß es bei jeder allgemeinen Form φ einen von der Anzahl der Variablen und der Ordnung der Form φ allein abhängenden Bereich gibt, der in den Normalbereichen aller Gruppen $\Gamma(\varphi)$ enthalten ist, wo Γ eine beliebige projektive Gruppe ohne infinitesimale Substitutionen ist, deren Substitutionen reelle oder komplexe Koeffizienten haben, je nachdem die Form φ eine gewöhnliche oder eine Hermitesche Form ist. Die explizite Bestimmung des Normalbereichs läßt sich in einfacher und eleganter Weise durch Anwendung gewisser Kovarianten aufstellen, die Hermitesche Formen höherer Ordnung sind.

3. Die zweite funktionentheoretische Abteilung unserer Arbeit behandelt Fragen, die zwei verschiedenen Gebieten angehören.

In der ersten Hälfte wird eine allgemeine Theorie für die automorphen Funktionen der in der geometrischen Abteilung betrachteten Cremonagruppen entwickelt. Das Problem, dem eine sehr allgemeine Lösung gegeben wird, besteht in dem Beweis der Existenz automorpher Funktionen und in der Untersuchung ihrer wesentlichen Singularitäten.

Im Falle einer Variablen hat man sich bei den Existenzbeweisen zweier verschiedenen Methoden bedient. Die von POINCARÉ [24, 25] herrührende Methode beruht auf der Anwendung unendlicher Reihen, aus denen durch einfache Operationen analytische Ausdrücke für die automorphen Funktionen erhalten werden. Die zweite Methode, die von KLEIN [10] und seinen Schülern entwickelt worden ist, führt den Existenzbeweis vermittels der allgemeinen Prinzipien der Riemannschen Funktionentheorie.

Beim gegenwärtigen Standpunkt der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen kann nur die erstgenannte Methode zum Beweis der Existenz der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen angewandt werden. Leider führt diese Methode hier nicht zu so allgemeinen Resultaten, wie im Falle einer Variablen. Denn die Poincaréschen und verwandten Reihen, zu denen man von der Idee der symmetrischen Funktionen aus gelangt ist, sind unendliche Summen bzw. Produkte von rationalen (oder einfachen transzendenten) Funktionen, woraus folgt, daß die durch sie definierten analytischen Funktionen im allgemeinen algebraische (oder einfache transzendente) Niveaugebilde besitzen, was eine Spezialisierung der fraglichen Funktionen bedeutet, indem die Niveaugebilde im allgemeinen irreduzible transzendente Gebilde sind. Die automorphen Funktionen, welche eine „automorphe Darstellung“ besitzen, können daher nicht die allgemeinsten ihrer Art sein. Andererseits kann man jedoch behaupten, daß die diskontinuierlichen Cremonagruppen, für welche

eine „automorphe Darstellung“ der zugeordneten invarianten Funktionen möglich ist, von sehr großer Allgemeinheit sind.

Die Untersuchung der Bedingungen, die für die Existenz durch die Poincaréschen und verwandte Reihen darstellbarer automorpher Funktionen nötig sind, bildet die erste fundamentale Aufgabe unserer funktionentheoretischen Betrachtungen. Die Bedingungen, zu denen wir gelangen, dürfen nicht nur als hinreichend, sondern auch in gewissem Sinne notwendig angesehen werden.

Man hat in der Theorie der automorphen Funktionen einer Variablen den einfachen und wichtigen Satz, daß zu jeder eigentlich diskontinuierlichen Gruppe automorphe Funktionen gehören, die in dem Bereich der eigentlichen Diskontinuität meromorph sind, während jeder Grenzpunkt der Gruppe eine wesentlich singuläre Stelle der Funktionen ist. In dieser Form behält der Satz beim Aufsteigen zu mehreren Variablen nicht seine Gültigkeit. Wir haben ja schon das Beispiel der abelschen Funktionen genannt, die nur unter gewissen speziellen Bedingungen im Normalbereich der Gruppe, der hier aus der Gesamtheit aller endlichen Punkte des betreffenden Raumes besteht, meromorph sind.

Die Analogie mit dem Falle einer Variablen bewährt sich allerdings darin, daß, wie gezeigt wird, jeder Randpunkt des Normalbereichs eine wesentlich singuläre Stelle für sämtliche automorphe Funktionen der Gruppe ist. Es können aber im Falle mehrerer Veränderlichen im Innern des Normalbereichs wesentliche Singularitäten auftreten, die beweglich sind, d. h. von der Wahl der automorphen Funktionen selbst abhängen.

Unter denjenigen Cremonagruppen, für welche die Existenz automorpher Funktionen durch Aufstellung unendlicher Reihen nachgewiesen werden kann, sind zwei verschiedene Klassen, von denen schon im Vorhergehenden die Rede war, von besonderer Bedeutung.

Eine dieser Klassen besteht aus der Gesamtheit der Cremonagruppen mit einem invarianten Raum, der entweder endlich ist oder vermittle einer Cremona-transformation ins Endliche überführt werden kann. Wie schon oben erwähnt, gehören die bisher untersuchten Gruppen hauptsächlich der genannten Kategorie an. Zum Beweis der automorphen Funktionen hat man mehrere beschränkende Voraussetzungen aufgestellt [6; S. 274] [7; S. 9]. Es sind dies teils Voraussetzungen algebraischen Charakters, deren Bestehen in den einfachsten Fällen leicht einzusehen ist, teils Bedingungen transzendenter Natur, die sich auf eine Eigenschaft der Funktionaldeterminanten der Substitutionen der Gruppe beziehen und deren Bestehen nur in den aller einfachsten Fällen und auch dann nicht ohne rechnerische Schwierigkeiten bestätigt werden kann.

Um so überraschender dürfte wegen seiner Einfachheit das Resultat sein, zu dem unsere Betrachtungen führen, daß nämlich bei Vorhandensein eines endlichen invarianten Raumes die zur Existenz automorpher Funktionen notwendige Bedingung, daß die Gruppe keine infinitesimale Substitution enthält, im allgemeinen auch hinreichend ist. In diesem Punkt herrscht somit eine vollständige Analogie zwischen den automorphen Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen.

Von ebenso großem Interesse sind jedoch die Gruppen der zweiten Kategorie, die Gruppen mit festen Häufungsgebilden. Die zugehörigen automorphen Funktionen teilen mit den automorphen Funktionen einer Variablen die wichtige Eigenschaft, daß ihre wesentlichen Singularitäten feste, d. h. von der Gruppe allein abhängige Mannigfaltigkeiten sind, eine Eigenschaft, die den anderen Gruppen im allgemeinen nicht zukommt. Die Hauptzüge der Theorie der fraglichen Funktionen haben wir in einem auf dem V. skandinavischen Mathematikerkongreß in Helsingfors 1922 gehaltenen Vortrag entwickelt [17, 18]. Bemerkenswert ist, daß in diesen Betrachtungen keine Voraussetzung hinsichtlich der Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten irgend welcher Art notwendig ist. Wir werden ja hier die ersten allgemeinen Beispiele automorpher Funktionen kennen lernen, die den automorphen Funktionen einer Variablen bei Gruppen ohne Hauptkreis analog sind.

Der letzte Teil der vorliegenden Arbeit ist der Untersuchung der „arithmetischen Invarianten“ beliebiger algebraischer Formen gewidmet. Unter diesem Namen verstehen wir mit POINCARÉ [27] analytische Funktionen der unbestimmten Koeffizienten irgend einer Form φ , die unverändert bleiben, wenn die Form durch eine beliebige arithmetisch äquivalente Form ersetzt wird. Die fraglichen Funktionen können als automorphe Funktionen derjenigen Gruppe $\Gamma(\varphi)$ angesehen werden, die aus den Modulgruppen, d. i. den Gruppen aller unimodularen Substitutionen mit ganzzahligen reellen oder komplexen Koeffizienten bei Ausübung derselben auf die gegebene Form φ gemäß dem Übertragungsprinzip gewonnen werden.

In seiner eben genannten Arbeit hat POINCARÉ die arithmetischen Invarianten der binären linearen und quadratischen Formen und Formensysteme einer funktionentheoretischen Betrachtung unterzogen. Unsere Untersuchungen führen zur Verallgemeinerung der Poincaréschen Resultate auf gewöhnliche und Hermitesche Formen beliebiger Ordnung und beliebig vieler Variablen. Die Poincaréschen Reihen zeigen sich hier zur analytischen Darstellung weniger geeignet. Dagegen erhält man für alle Fälle gültige analytische Ausdrücke durch eine Verallgemeinerung der von DIRICHLET [4] in seinen zahlentheoretischen Betrachtungen

angewandten Reihen, die kürzlich HJ. MELLIN [12] in anderer Hinsicht zum Gegenstand seiner Untersuchungen gemacht hat.

I. Unendliche Folgen linearer Substitutionen.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften linearer Substitutionsfolgen.

4. Wir wollen mit der Aufstellung einiger Definitionen beginnen.

Es seien

$$(1) \quad y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

komplexe Variablen, die wir als homogene Punktkoordinaten in einem $2n$ -dimensionalen Raum R_n auffassen. Jedem Gleichungssystem

$$(2) \quad \varphi_\nu(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, p (\leq n)),$$

wo φ_ν ganze rationale und homogene Funktionen bezeichnen, entspricht in R_n eine $2(n-p)$ -dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit, die wir mit A_{n-p}^q bezeichnen, wo q die Ordnung desselben, d. h. das Produkt der Ordnungszahlen der Formen φ_ν ist. Sind insbesondere alle Formen φ_ν linear, so werden wir statt A_{n-p} die Bezeichnung L_{n-p} anwenden. Wir werden ferner unter einer Hyperfläche bzw. Hyperebene die $(2n-2)$ -dimensionalen Gebilde A_{n-1}^q und L_{n-1} verstehen. Für $n = 3$ sind diese identisch mit einer algebraischen Fläche resp. Ebene, für $n = 2$ mit einer algebraischen Kurve resp. einer Geraden, für $n = 1$ mit einem endlichen Punktsystem resp. einem einzelnen Punkt.

Unter einem reellen Gebilde soll eine A oder L verstanden werden, deren Gleichungen (2) lauter reelle Koeffizienten haben.

Wir schreiben die linearen Substitutionen in homogener Form:

$$(3) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa} y_\kappa \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

wo die Koeffizienten $\alpha_{i,\kappa}$ beliebige reelle oder komplexe Größen sein können. Weil im Folgenden nur die Verhältnisse der Koeffizienten berücksichtigt werden, ist es erlaubt, alle Koeffizienten irgend einer Substitution mit einer und der-

selben von Null verschiedenen endlichen Größe zu multiplizieren. Es ist zweckmäßig, jede Substitution (3) derart zu normieren, daß das Maximum der absoluten Beträge der Koeffizienten einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Wert, z. B. Eins, hat.

Es sei irgend eine unendliche Folge von Substitutionen (3) gegeben, die in oben angegebener Weise normiert sind. Offenbar läßt sich eine Teilfolge σ derselben finden derart, daß die Koeffizienten bestimmte endliche Grenzwerte $\beta_{i,x}$ besitzen, die nicht sämtlich verschwinden. Die Substitution

$$(4) \quad y'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \beta_{i,x} y_x \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

soll die Grenzs substitution von σ genannt werden. Von der Folge σ selbst werden wir die Benennung Normalfolge anwenden. Wir sagen, daß diese Normalfolge vom Rang ϱ ist, wenn die Determinante

$$(5) \quad |\beta_{i,x}|$$

der Koeffizienten von (4) den Rang ϱ hat, d. h. wenn alle Unterdeterminanten $(\varrho+1)$ -ter Ordnung von (5), nicht aber alle Unterdeterminanten ϱ -ter Ordnung gleich Null sind.

Für $\varrho = n+1$ stellt (4) eine allgemeine lineare Substitution einer nichtverschwindenden Determinante dar. Werden die Substitutionen von σ mit

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

bezeichnet, so konvergieren die Substitutionen der Folge

$$S_\nu^{-1} S_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

im vorliegenden Falle gegen die identische Transformation.

Es sei daher im Folgenden $\varrho \leq n$. Die Gleichungen (4) definieren dann $n+1-\varrho$ der Größen

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}$$

als lineare Funktionen der ϱ übrigen. Bei unbegrenzt variierenden Werten der komplexen Größen (y) bestimmen die zugeordneten Werte von (y') also eine $L_{\varrho-1}$, die wir mit $M_{\varrho-1}(\sigma)$ oder kurz $M_{\varrho-1}$ bezeichnen.

Wir betrachten ferner die Gleichungen

$$(6) \quad \sum_{x=1}^{n+1} \beta_{i,x} y_x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Die Mannigfaltigkeit der diesen Gleichungen genügenden Wertsysteme $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ definiert eine L_{n-q} , die im Folgenden mit $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ oder kurz $\bar{M}_{n-q}$ bezeichnet wird.

Wir nennen die linearen Mannigfaltigkeiten $M_{q-1}(\sigma)$ und $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ das erste resp. zweite Element der Normalfolge σ . Aus ihrer Definition geht hervor, daß sie reelle Mannigfaltigkeiten sind, wenn die Substitutionen von σ reelle Koeffizienten haben.

5. Jede lineare Substitution (3) kann geometrisch als eine Kollineation des Raumes R_n in sich interpretiert werden. Es sei nun (μ) irgend eine im Raume R_n gelegene Punktmenge. Indem wir auf dieselbe die Gesamtheit der Substitutionen der Normalfolge σ anwenden, erhalten wir eine unendliche Anzahl transformierter Punktmenge. Diese besitzen dann wenigstens einen Häufungspunkt, d. h. einen Punkt, in dessen beliebig kleiner Umgebung unendlich viele der transformierten Mengen von (μ) Punkte besitzen. Wir bezeichnen mit $\sigma(\mu)$ die Menge aller Häufungspunkte der Transformierten von (μ) . Es ist unsere nächste Aufgabe, die Menge $\sigma(\mu)$ zu bestimmen und ihre Abhängigkeit von der Menge (μ) zu studieren.

Diese Aufgabe soll zuerst für den Fall gelöst werden, wo (μ) eine im projektiven Sinne abgeschlossene Punktmenge ist, die keinen Punkt des zweiten Elementes $\bar{M}_{n-q}$ der Normalfolge σ enthält, wobei also $q \leq n$ vorausgesetzt ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck die von der Grenzs substitution (4) vermittelte Abbildung, die für $q \leq n$ eine ausgeartete Projektivität ist. Nach dem Obigen wird jedem dem Element $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ nicht zugehörigen Punkt des Raumes R_n vermöge (4) ein bestimmter Punkt des Elementes $M_{q-1}(\sigma)$ entsprechen, der mit dem Anfangspunkte stetig variiert. Wir können den auf $M_{q-1}(\sigma)$ gelegenen Bildpunkt beliebig vorschreiben, indem wir dem Gleichungssystem (4) von M_{q-1} ein System linearer Gleichungen

$$(7) \quad \sum_{x=1}^{n+1} \gamma_{i,x} y'_x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

adjungieren, die von einander und von den Gleichungen (4) unabhängig sind. Die Gleichungen (7) definieren zusammen mit (4) eine durch $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ gehende L_{n-q+1} . Sämtliche Punkte dieser L_{n-q+1} , die nicht gleichzeitig dem Element $\bar{M}_{n-q}$ angehören, werden vermöge der ausgearteten projektiven Transformation (4) in den gegebenen Punkt von M_{q-1} überführt.

Wir wollen das Resultat der obigen Betrachtungen im folgenden Satz ausdrücken.

Satz 1. *Durch die ausgeartete projektive Transformation (4) wird eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den durch $\bar{M}_{n-q}$ gehenden L_{n-q+1} und den Punkten von M_{q-1} derart vermittelt, daß sämtlichen Punkten irgend einer der fraglichen L_{n-q+1} , die nicht zugleich dem Element $\bar{M}_{n-q}$ angehören, ein einziger Punkt des Elementes M_{q-1} zugeordnet wird.*

6. Es sei nun (μ) irgend eine im Raum R_n gelegene abgeschlossene Punktmenge, die keinen Punkt von $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ enthält. Nach dem Vorhergehenden wird der Menge (μ) vermöge (4) eine auf $M_{q-1}(\sigma)$ gelegene Punktmenge zugeordnet. Wir behaupten, daß diese letztere Punktmenge identisch mit der oben definierten Häufungsmenge $\sigma(\mu)$ ist. Es wird m. a. W. behauptet, daß die Konvergenz der Punkte gegen die resp. Häufungspunkte auf M_{q-1} in der Menge (μ) gleichmäßig ist, so daß in jedem im projektiven Sinne abgeschlossenen Bereich, der keinen Punkt von $\sigma(\mu)$ enthält, nur endlich vielen transformierten Mengen von (μ) zugehörige Punkte existieren können.

Wegen der Definition von $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ können die Funktionen (4) in keinem Punkt von (μ) gleichzeitig verschwinden. Wir können daher die Menge (μ) in endlich viele Teile derart zerlegen, daß in jedem Teil wenigstens eine der linearen Funktionen (4) beständig von Null verschieden bleibt. Zugleich kann man offenbar erreichen, daß in jeder Teilmenge stets wenigstens eine der Koordinaten y_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) nicht verschwindet.

Wir betrachten eine der fraglichen Teilmengen, etwa diejenige, μ_0 , wo $y_{n+1} \neq 0$ und $\sum_{x=1}^{n+1} \beta_{n+1,x} y_x \neq 0$ ist. Wir führen die inhomogenen Variablen

$$x_i = y_i : y_{n+1}; \quad x'_i = y'_i : y'_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ein und wir können die Substitutionen von σ durch den Ausdruck

$$(8) \quad x'_i = \frac{L_i}{L_{n+1}}$$

darstellen, wo wir allgemein

$$L_i = \alpha_{i,1} x_1 + \alpha_{i,2} x_2 + \dots + \alpha_{i,n} x_n + \alpha_{i,n+1}$$

gesetzt haben. Es sei

$$(8') \quad \bar{x}'_i = \frac{\bar{L}_i}{\bar{L}_{n+1}}$$

der analoge Ausdruck der Grenzsubstitution (4) von σ , deren Koeffizienten Grenzwerte der entsprechenden Koeffizienten der Substitutionen (8) sind. Weil nun

wegen der oben gemachten Annahmen (μ_0) im Endlichen gelegen ist und weil $\bar{L}_{n+1}$ in der abgeschlossenen Menge (μ_0) von Null verschieden und daher absolut oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze bleibt, so gelten offenbar in der fraglichen Punktmenge gleichmäßig die Gleichungen

$$\lim (x'_i - \bar{x}'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Somit häufen sich die Punkte von (μ_0) und daher auch diejenigen von (μ) bei Ausführung der Substitutionen von σ gleichmäßig nach M_{q-1} , w. z. b. w.

Wir behaupten, daß eine gleichmäßige Häufung der Punkte nach M_{q-1} bei Ausführung der Substitutionen von σ in keinem $2n$ -dimensionalen Bereich stattfinden kann, der Punkte von $\bar{M}_{n-q}$ in seinem Innern enthält.

Es sei nämlich M ein Bereich, der einen Punkt P von $\bar{M}_{n-q}$ als inneren Punkt hat. Wir ziehen durch P eine beliebige L_q , die mit $\bar{M}_{n-q}$ keinen von P verschiedenen Punkt gemeinsam hat. Nach dem Obigen konvergieren die dem Bereich U nicht angehörigen Punkte von L_q bei Ausführung von σ gleichmäßig gegen das Element M_{q-1} . Wäre dies auch mit den Punkten von U der Fall, so müßten die Punkte auf der ganzen L_q gleichmäßig gegen M_{q-1} konvergieren, was unmöglich ist, weil L_q eine lineare Mannigfaltigkeit höherer Dimension als M_{q-1} ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Wir können unsere bisherigen Resultate im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2. *Bei Ausführung der Substitutionen der Normalfolge σ vom Rang q und mit den Elementen M_{q-1} und $\bar{M}_{n-q}$ konvergieren die Punkte in jeder abgeschlossenen Menge (μ) , die keinen Punkt von $\bar{M}_{n-q}$ enthält, gleichmäßig gegen die resp. Punkte der auf M_{q-1} gelegenen Menge $\sigma(\mu)$.*

Ferner ist die gleichmäßige Häufung der Punkte gegen M_{q-1} in keinem Bereich möglich, der Punkte von $\bar{M}_{n-q}$ als innere Punkte enthält.

7. Wir werden im Folgenden von dem Bereich, der aus der Gesamtheit der zum zweiten Element $\bar{M}_{n-q}(\sigma)$ nicht gehörigen Punkte des Raumes R_n besteht, die Benennung Normalbereich der Folge σ anwenden, im Hinblick auf den Zusammenhang, der zwischen den Folgen σ und den Normalfamilien analytischer Funktionen von MONTEL [14] besteht.

Offenbar enthält jede Folge eine Teilfolge, die nebst ihrer inversen Folge, d. h. der Folge der inversen Substitutionen, normal ist. Jede solche Folge soll als umkehrbar normale Folge bezeichnet werden. Unter ihren Rangzahlen werden wir die Rangzahlen q und q' der gegebenen Folge und ihrer inversen Folge verstehen.

Satz 3. *Bei jeder umkehrbar normalen Folge ist das erste Element in dem zweiten Element der inversen Folge enthalten.*

Es seien M_{q-1} , $\bar{M}_{n-q}$ die Elemente der gegebenen Folge σ und $M'_{q'-1}$, $\bar{M}'_{n-q'}$ diejenigen der inversen Folge σ' . Wir werden nachweisen, daß das Element M_{q-1} als ganzes in dem Elemente $\bar{M}'_{n-q'}$ enthalten ist.

Es sei P ein beliebiger Punkt von M_{q-1} und Q ein beliebiger Punkt derjenigen durch $\bar{M}_{n-q}$ gehenden L_{n-q+1} , die vermittels der Grenzsstitution von σ dem Punkt P zugeordnet wird. Angenommen, daß Q nicht dem Element $\bar{M}_{n-q}$ angehört, konvergieren seine Transformaten $Q_v = S_v(Q)$ vermittels der Substitutionen S_v von σ nach Satz 2 gegen den Punkt P .

Wäre nun P außerhalb des zweiten Elementes $\bar{M}'_{n-q'}$ der inversen Folge σ' gelegen, so könnte man um den Punkt P herum einen Bereich U konstruieren, dessen Transformaten vermittels σ' gleichmäßig gegen eine gewisse auf $M'_{q'-1}$ gelegene Punktmenge konvergierten. Dies widerspricht aber dem Obigen, weil es im Bereich U unendliche viele Punkte Q_v gibt, deren Transformaten vermittels der Substitutionen S_v^{-1} von σ' mit dem außerhalb der Mannigfaltigkeit $M'_{q'-1}$ gelegenen Punkt Q zusammenfallen. Somit gehören sämtliche Punkte von M_{q-1} zugleich dem Element $\bar{M}'_{n-q'}$ an. Analog muß $M'_{q'-1}$ als ganzes im Elemente $\bar{M}_{n-q}$ enthalten sein.

Die Vergleichung der Dimensionen der Elemente M_{q-1} und $\bar{M}'_{n-q'}$, von denen nach dem Vorhergehenden das erste als ganzes in dem letzteren enthalten ist, führt zum

Satz 4. *Die Rangzahlen q und q' jeder umkehrbar normalen Folge genügen der Relation*

$$(9) \quad q + q' \leq n + 1.$$

8. Die vorhergehenden Betrachtungen lösen vollständig die Frage hinsichtlich der Häufungsmengen $\sigma(\mu)$ beliebiger im Innern des Normalbereichs der Folge σ gelegenen Punktmengen (μ) . Man kann aber durch Anwendung der obigen Methoden auch die Häufung bei Punktmengen studieren, die Punkte auf der Begrenzung $\bar{M}_{n-q}$ des Normalbereichs besitzen. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir hier den Fall näher betrachten, wo die gegebene Menge (μ) aus den Punkten einer Hyperfläche A_{n-1}^q besteht, deren Gleichung wir durch Nullsetzen einer homogenen algebraischen Form q -ter Ordnung

$$(10) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0$$

darstellen. Es sei allgemein

$$(11) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa}^{(\nu)} y_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

der Ausdruck der ν -ten Substitution von σ . Die Gleichung

$$(12) \quad \varphi(y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, \dots, y_{n+1}^{(\nu)}) = 0$$

stellt dann eine Hyperfläche dar, deren Punkte aus denjenigen der Hyperfläche (10) mittels der inversen Substitution von (11) erhalten werden. Bei unbegrenzt wachsendem ν konvergieren die Koeffizienten in der Gleichung (12) gegen die entsprechenden Koeffizienten in der Gleichung

$$(13) \quad \varphi(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}) = 0,$$

wo

$$(4) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \beta_{i,\kappa} y_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

die Grenzsubstitution von σ darstellt.

Wir nehmen nun an, daß die Hyperfläche (10) das erste Element $M_{q-1}(\sigma)$ nicht als ganzes enthält. Dann kann die linke Seite von (13) in den Variablen (y) nicht identisch verschwinden. In diesem Falle stellt die Gleichung (13) das Häufungsgebilde der Hyperflächen (12) dar. Dieses Häufungsgebilde ist eine ausgeartete Hyperfläche q -ter Ordnung, die das Element $\overline{M}_{n-q}(\sigma)$ als ganzes enthält.

9. Um die Gleichung des Häufungsgebildes zu vereinfachen, bemerken wir, daß man durch eine geeignete Koordinatentransformation bewirken kann, daß das Gleichungssystem des Elementes M_{q-1} die Form

$$y_{q+1} = 0, \quad y_{q+2} = 0, \quad \dots, \quad y_{n+1} = 0$$

erhält. Dann verschwinden alle Koeffizienten $\beta_{i,\kappa}$ für $i > q$ in (4), und die Gleichung (13) nimmt die Gestalt

$$(14) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q, 0, \dots, 0) \equiv \overline{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0$$

an, wo die Funktionen

$$(15) \quad x_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \beta_{i,\kappa} y_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

linear unabhängig sind. Wegen der Form der Gleichung (14) werden wir von dem Häufungsgebilde die Benennung „zylindrische Mannigfaltigkeit“ anwenden.

Nun stellt das System (15) bei irgend welchen der Gleichung (14) genügenden Werten der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_q$ gerade diejenige durch $\bar{M}_{n-q}$ gehende L_{n-q+1} dar, die vermöge der ausgearteten Projektivität (4) dem Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ von M_{q-1} zugeordnet wird. Somit ist das Häufungsgebilde (14) identisch mit der Mannigfaltigkeit der den Punkten des Schnittes des Anfangsgebildes (10) und des Elementes M_{q-1} zugeordneten L_{n-q+1} . Das Gebilde (14) ist somit von dem fraglichen Schnitt allein abhängig. Wir drücken die obigen Resultate durch den folgenden Satz aus.

Satz 5. *Das Häufungsgebilde der Transformaten einer beliebigen, das erste Element nicht enthaltenden Hyperfläche vermittels der inversen Substitutionen der Normalfolge σ besteht aus einer „zylindrischen“ Mannigfaltigkeit, die das zweite Element der Folge als ganzes enthält. Das betreffende Häufungsgebilde ist identisch mit der Mannigfaltigkeit derjenigen L_{n-q+1} , die vermöge der Grenzsstitution der Folge σ den Punkten des Schnittes der gegebenen Hyperfläche mit dem ersten Element der Folge zugeordnet werden.*

Im niedrigsten Falle $q = 1$ nimmt dieser Satz die folgende Gestalt an:

Satz 6. *Das Häufungsgebilde der Transformaten einer beliebigen den Punkt M_0 nicht enthaltenden Hyperfläche A_{n-1}^q vermittels der inversen Substitutionen der Normalfolge σ mit den Elementen M_0 und $\bar{M}_{n-1}$ besteht aus der q -fach gezählten Hyperebene $\bar{M}_{n-1}$.*

10. Wir wollen den Inhalt der beiden obigen Sätze noch in einer anderen Form darstellen, indem wir sie mit dem Satz 2 in Verbindung setzen, was später von großem Nutzen sein wird.

Wir gehen zu diesem Zweck von der allgemeinen Form q -ter Ordnung

$$\varphi(y, z) = \sum z_{(\lambda)} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

der Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ aus, deren Koeffizienten $z_{(\lambda)}$ unbestimmte Parameter seien. Indem wir diese Parameter als homogene Punktkoordinaten in einem Raum $R_n(z)$ auffassen, erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von $R_n(z)$ und den Hyperflächen q -ter Ordnung von $R_n(y)$.

Jeder auf die Variablen y angewandten linearen Substitution entspricht eine lineare Substitution der Größen z . Zwischen den unendlichen Substitutionsfolgen beider Räume findet ein wichtiger Zusammenhang statt, den wir im folgenden Satz ausdrücken.

Satz 7. Jeder Normalfolge σ im Raume $R_n(y)$ mit den Elementen M_{q-1} und $\bar{M}_{n-q}$ entspricht im Raume $R_v(z)$ eine Normalfolge, deren erstes Element aus der Gesamtheit derjenigen Punkte (z) besteht, die allen möglichen zylindrischen Mannigfaltigkeiten (14) entsprechen, die durch $\bar{M}_{n-q}$ gehen und deren zweites Element identisch mit der Gesamtheit derjenigen Punkte (z) ist, die den durch M_{q-1} gehenden Hyperflächen A_{n-1}^q zugeordnet sind.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Identität

$$(16) \quad \varphi(y, z') \equiv \varphi(y', z),$$

wo y' das Zeichen für die Grenzsstitution von σ und z' die zugeordnete Grenzsstitution der Variablen z bezeichnet. Man findet nämlich erstens, daß die Koeffizienten $c_{i,x}$ der Grenzsstitution

$$(17) \quad z'_i = \sum_{x=1}^{v+1} c_{i,x} z_x \quad (i = 1, 2, \dots, v+1)$$

nicht sämtlich Null sein können, weil $\varphi(y', z)$ nicht von z unabhängig Null sein kann. Weil ferner die Koeffizienten $c_{i,x}$ ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der Grenzsstitution von σ sind, so ist die der Folge σ zugeordnete Folge τ der auf z bezogenen Substitutionen normal. Es seien N und $\bar{N}$ die Elemente von τ . Die Punkte von $\bar{N}$ können durch das Gleichungssystem

$$\sum_{x=1}^{v+1} c_{i,x} z_x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v+1)$$

dargestellt werden. Aus (16) geht hervor, daß die Gleichung

$$\varphi(y', z) = 0$$

der zugeordneten A_{n-1}^q für $y'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \beta_{i,x} y_x$ identisch in den Variablen y verschwinden wird. Die den Punkten von $\bar{N}$ entsprechenden A_{n-1}^q enthalten somit M_{q-1} , und dies findet offenbar auch umgekehrt statt. Aus den Sätzen 2 und 5 geht aber dann hervor, daß die Punkte von N und die zylindrischen Mannigfaltigkeiten (14) einander umkehrbar eindeutig entsprechen.

Damit ist der obige Satz bewiesen.

11. Einen wichtigen Spezialfall erhält man, wenn φ eine lineare Form

$$(18) \quad \varphi(y, z) = \sum_{x=1}^{n+1} z_x y_x$$

ist. Die auf die Variablen z bezogene Substitution ist dann die reziproke oder die korrelative Substitution der Substitution der Variablen y , nämlich

$$(19) \quad z'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \alpha_{x,i} z_x \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

wenn (3) die auf y bezogene Substitution bezeichnet. Die Gleichung

$$(20) \quad \varphi(y, z) = 0$$

vermittelt jetzt eine umkehrbar eindeutige Beziehung (Korrelation) zwischen den Punkten und den Hyperebenen der Räume $R_n(y)$ und $R_n(z)$. Jeder Normalfolge der Substitutionen (3) entspricht eine Normalfolge gleichen Ranges der korrelativen Substitutionen (19). Dabei sind die Punkte des ersten (zweiten) Elementes der einen Folge und die durch das zweite (erste) Element der anderen Folge gehenden Hyperebenen aufeinander korrelativ bezogen.

12. Das einfachste Beispiel von Normalfolgen geben uns die Potenzen einer einzigen Substitution.

Wir betrachten die Substitution

$$(21) \quad y'_i = \omega_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

wo die Multiplikatoren $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ etwa reelle positive, nicht abnehmende Zahlen sind. Es sei

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_x < \omega_{x+1} = \dots = \omega_{n+1}.$$

Man bestätigt dann unmittelbar, daß bei unbegrenzter Iteration von (21) die Gesamtheit derjenigen Punkte, die der linearen Mannigfaltigkeit

$$\bar{M}_{n-x} : y_{x+1} = y_{x+2} = \dots = y_{n+1} = 0$$

nicht angehören, nach bestimmten Punkten von

$$M_{n-x} : y_1 = y_2 = \dots = y_x = 0$$

konvergieren. Die sukzessiven Potenzen von (21) bilden somit eine Normalfolge des Ranges $n - x + 1$ mit den Elementen $M_{n-x}, \bar{M}_{x-1}$. Dadurch kann man Normalfolgen beliebigen Ranges erhalten. Man kann dabei, indem man eine geeignete Anzahl der ersten Multiplikatoren von (21) einander gleich setzt, erreichen, daß auch die inverse Folge eine Normalfolge von einem vorgeschriebenen Range wird.

Wir wollen die obigen Ergebnisse etwas näher in den niedrigsten Fällen erläutern.

$$\underline{n = 1}$$

13. Für die binären Substitutionen

$$(22) \quad y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

kann $\varrho = 2$ oder $\varrho = 1$ sein. Die Elemente der Normalfolgen vom Rang Eins reduzieren sich auf Punkte $M_0, \bar{M}_0$. Man bestätigt leicht, daß jede Normalfolge umkehrbar normal ist.

Wir betrachten näher die zyklischen Folgen, die aus den Potenzen einer einzigen Substitution (22) bestehen.

Es seien ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha - \omega & \beta \\ \gamma & \delta - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Ist erstens $\omega_1 \neq \omega_2$, so kann (22) vermöge einer linearen Transformation in die Form

$$(23) \quad y'_1 = \omega_1 y_1, \quad y'_2 = \omega_2 y_2$$

überführt werden.

Im „elliptischen Falle“ $|\omega_1| = |\omega_2|$ bilden die Potenzen von (23) entweder eine endliche Folge, oder sie bilden eine unendliche Folge, die unendlich viele Normalfolgen vom Rang Zwei enthält. Um irgend eine dieser Normalfolgen zu definieren, hat man eine unendliche Folge der Potenzen (23) zu wählen, deren Exponenten m den Gleichungen

$$m(\arg \omega_1 - \arg \omega_2) \equiv \omega + \varepsilon_m \pmod{2\pi}$$

genügen, wo ω irgend eine reelle Größe und $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ ist.

In den „loxodromischen“ und „hyperbolischen“ Fällen, wo $|\omega_1| \neq |\omega_2|$ ist, bilden die Potenzen von (23) eine Normalfolge vom Rang Eins mit den Elementen

$$M_0 : y_1 = 0; \quad \bar{M}_0 : y_2 = 0,$$

wenn $|\omega_1| < |\omega_2|$ ist, welche Elemente die Fixpunkte von (23) sind.

Ist $\omega_1 = \omega_2$, so kann man bekanntlich der Substitution (22) nach Ausführung einer geeigneten Transformation den Ausdruck

$$y'_1 = \omega_1 y_1 + y_2, \quad y'_2 = \omega_1 y_2$$

geben. In diesem „parabolischen“ Falle bilden die sukzessiven Potenzen der Substitution wieder eine Normalfolge vom Rang Eins, deren Elemente M_0 und

$\bar{M}_0$ mit einem und demselben Punkt, nämlich dem einzigen Fixpunkt $y_i = 0$, zusammenfallen.

In den beiden letzteren Fällen gibt der Satz 2 den bekannten Satz, daß bei der Iteration der nichtelliptischen Substitution (22) die Punkte in jedem abgeschlossenen, einen der Fixpunkte nicht enthaltenden Bereich gleichmäßig gegen den zweiten Fixpunkt konvergieren.

$$\underline{n = 2}$$

14. Bei den ternären Substitutionen

$$(24) \quad y'_i = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 + \gamma_i y_3, \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind zwei Arten der Normalfolgen mit verschwindender Determinante (5) vorhanden.

$q = 2$. Von den Elementen $M_1, \bar{M}_0$ ist hier das erste eine Gerade, das zweite ein Punkt. Nach dem Satz 2 häufen sich die Punkte bei Ausführung der Substitutionen der fraglichen Normalfolge in jeder abgeschlossenen, den Punkt $\bar{M}_0$ nicht enthaltenden Menge gleichmäßig nach der Geraden M_1 . Damit zwei Punkte dabei einen und denselben Häufungspunkt besitzen, ist es notwendig und hinreichend, daß sie einer und derselben durch den Punkt $\bar{M}_0$ gehenden Geraden angehören. Ferner bestehen die Häufungsgebilde der Transformierten einer beliebigen Kurve, die die Gerade M_1 nicht als Ganzes enthält, mittels der inversen Substitutionen der Folge nach Satz 5 aus gewissen Geraden des Büschels mit dem Mittelpunkt M_0 , welche Geraden von den Schnittpunkten der gegebenen Kurve mit M_1 allein abhängig sind.

$q = 1$. Von den Elementen $M_0, \bar{M}_1$ ist jetzt das erste ein Punkt, das zweite eine Gerade. Die außerhalb der Geraden $\bar{M}_1$ gelegenen Punkte konvergieren bei Ausführung der Substitutionen der Folge gegen den Punkt M_0 . Ferner besteht das Häufungsgebilde der Transformierten jeder nicht durch M_0 gehenden Kurve p -ter Ordnung mittels der inversen Folge aus der p -fach gezählten Geraden $\bar{M}_1$.

Als Beispiel betrachten wir die von den Potenzen einer einzigen ternären Substitution (24) gebildete Folge. Wir beschränken uns der Kürze halber auf den allgemeinen Fall, wo die Wurzeln der determinierenden Gleichung der Substitution voneinander verschieden sind. Dann läßt sich die Substitution in der Form

$$(25) \quad y'_1 = \omega_1 y_1, \quad y'_2 = \omega_2 y_2, \quad y'_3 = \omega_3 y_3$$

schreiben.

Um eine Normalfolge zu erhalten, bilden wir eine unendliche Folge von Potenzen der Substitution (25):

$$(26) \quad S^{n_1}, S^{n_2}, S^{n_3}, \dots,$$

für welche die Grenzwerte

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n_i (\arg \omega_i - \arg \omega_s) = m_i \quad (i = 1, 2),$$

mod. 2π genommen, existieren. Wir wählen die Bezeichnung so, daß

$$|\omega_1| \leq |\omega_2| \leq |\omega_3|$$

wird, und wir unterscheiden die folgenden vier Fälle:

1°. $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3|$. Man bestätigt unmittelbar, daß die Folge entweder endlich ist (periodischer elliptischer Fall) oder unendlich und vom Rang $\varrho = 3$ (aperiodischer elliptischer Fall).

2°. $|\omega_1| < |\omega_2| = |\omega_3|$. Die Folge ist vom Rang $\varrho = 2$ mit den Elementen

$$M_1 : y_1 = 0; \quad \bar{M}_0 : y_1 = y_2 = 0.$$

Die zugehörige Grenzsstitution ist äquivalent mit der Zentralprojektion vom Punkt $\bar{M}_0$ aus auf die Gerade M_1 .

3°. $|\omega_1| = |\omega_2| < |\omega_3|$. Man hat hier eine Folge vom Rang Eins mit den Elementen

$$M_0 : y_1 = y_2 = 0; \quad \bar{M}_1 : y_3 = 0,$$

welche als eine inverse Operation der in 2° betrachteten Projektion, nämlich als Projektion von der Geraden $\bar{M}_1$ aus nach dem Punkt M_0 angesehen werden kann. Dabei werden alle außerhalb $\bar{M}_1$ gelegenen Punkte gegen M_0 konvergieren. Auf der Geraden $\bar{M}_1$ reduziert sich unsere Substitution in eine binäre elliptische Substitution. Für die Folge (26) hat man auf M_1 die Grenzsstitution

$$y'_1 = e^{m_1 i} y_1, \quad y'_2 = e^{m_2 i} y_2,$$

die als eine Drehung um einen festen Punkt im binären Gebiete $\bar{M}_1$ angesehen werden kann.

4°. $|\omega_1| < |\omega_2| < |\omega_3|$. In diesem Falle bilden die sukzessiven positiven Potenzen von (25) eine Normalfolge vom Rang Eins mit den Elementen

$$M : y_1 = y_2 = 0; \quad \bar{M}_1 : y_3 = 0.$$

Auf der Geraden $\bar{M}_1$ hat (25) jetzt die Eigenschaften einer hyperbolischen oder

loxodromischen Substitution, indem alle Punkte von $\bar{M}_1$, von dem invarianten Punkt $y_2 = y_3 = 0$ abgesehen, gegen den Punkt $y_1 = y_2 = 0$ konvergieren.

Jede der obigen Folgen ist umkehrbar normal, wie leicht einzusehen ist. Die inverse Folge einer Folge des Typus 1^0 ist wieder eine Folge dieses Typus. Die inverse Folge einer Folge des Typus 2^0 ist eine Folge des Typus 3^0 und umgekehrt. Schließlich ist die inverse Folge einer Folge des Typus 4^0 wieder eine Folge desselben Typus.

$$\underline{n = 3}$$

15. Es gibt drei verschiedene Typen von Normalfolgen der Raumkollektionen mit verschwindender Determinante (5).

$\varrho = 3$. Die Elemente einer Normalfolge vom Rang Drei sind eine Ebene M_i und ein Punkt $\bar{M}_0$. Nach Satz 2 häufen sich die Punkte in jeder abgeschlossenen Menge, die den Punkt $\bar{M}_0$ nicht enthält, gleichmäßig nach der Ebene M_i . Der Satz 5 gibt hier den Satz, daß bei Ausführung der Substitutionen der inversen Folge jede Fläche, die die Ebene M_i nicht enthält, als Häufungsgebilde ihrer Transformaten eine Kegelfläche mit der Spitze $\bar{M}_0$ hat. Dieser Kegel ist von der Schnittkurve der gegebenen Fläche mit der Ebene M_i allein abhängig.

Die einfachste geometrische Darstellung der einer Normalfolge dritten Ranges entsprechenden Grenzs substitution besitzt man in der Projektion von einem Punkt auf eine Ebene (Zentralprojektion), wobei der Punkt und die Ebene die Elemente der Folge sind.

$\varrho = 2$. Die Elemente einer Normalfolge vom Rang Zwei sind beide Geraden. Die außerhalb der zweiten Geraden $\bar{M}_1$ gelegenen Punkte werden gleichmäßig nach den Punkten der ersten Geraden M_1 derart konvergieren, daß die Punkte einer und derselben durch $\bar{M}_1$ gehenden Ebene eine und dieselbe auf M_1 gelegene Häufungsstelle haben. Das Häufungsgebilde der Transformaten einer beliebigen, die Gerade M_1 nicht enthaltenden Fläche mittels der Substitutionen der inversen Folge besteht aus einem Ebenenbüschel mit der Achse $\bar{M}_1$.

Die einfachste geometrische Darstellung der hierher gehörigen Grenzs substitution hat man in der axialen Projektion von einer Geraden $\bar{M}_1$ auf eine andere M_1 , welche Geraden die Elemente der betreffenden Folge sind.

$\varrho = 1$. Die Elemente einer Folge ersten Ranges sind ein Punkt M_0 und eine Ebene $\bar{M}_1$. Der Punkt M_0 ist der Häufungspunkt für alle Punkte außerhalb $\bar{M}_1$. Die Ebene $\bar{M}_1$ ist, ein- oder mehrfach gezählt, das Häufungsgebilde für die Transformaten der Flächen, die den Punkt M_0 nicht enthalten, mittels der inversen Folge. Die einfachste geometrische Darstellung der Grenzs substitution im vorliegenden Falle hat man in der Projektion von einer Ebene $\bar{M}_1$

aus nach einem Punkt M_0 , was die inverse Operation der im ersten Falle angewandten Operation ist.

§ 2.

Folgen linearer Substitutionen, die eine algebraische Mannigfaltigkeit in sich selbst überführen.

16. Wir werden in diesem Paragraphen Folgen linearer Substitutionen untersuchen, die algebraische Mannigfaltigkeiten in sich selbst transformieren. Unsere Betrachtungen werden zu einer interessanten Relation führen, die zwischen der Rangzahl der Normalfolgen der betreffenden Substitutionen und einer für die genannten Mannigfaltigkeiten charakteristischen Zahl herrscht. Ferner wird aus dem Folgenden eine Beziehung zwischen den invarianten Mannigfaltigkeiten und den Elementen der Normalfolgen zugehörigen Substitutionen hervorgehen, die wichtige Anwendungen gestattet.

Wir betrachten zuerst Mannigfaltigkeiten, die durch Nullsetzen einer gewöhnlichen algebraischen Form $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, also durch die Gleichung

$$(28) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0$$

dargestellt werden. Jede lineare Substitution, die eine solche Mannigfaltigkeit ungeändert läßt, führt die Form φ bis auf einen konstanten Faktor in sich selbst über. Es sei nun σ eine Normalfolge des Ranges $\rho \leq n$ von Substitutionen, die (28) invariant lassen, und $M_{\rho-1}, \bar{M}_{n-\rho}$ ihre Elemente. Angenommen, daß (28) das Element $M_{\rho-1}$ nicht als Ganzes enthält, müssen nach Satz 5 die Transformaten von (28) mittels der inversen Folge σ' als Häufungsgebilde eine zylindrische Mannigfaltigkeit haben, die das Element $\bar{M}_{n-\rho}$ als Ganzes enthält. Weil nun das Gebilde (28) andererseits mit seinen sämtlichen Transformaten und somit auch mit dem Häufungsgebilde derselben identisch ist, muß es entweder eine zylindrische Mannigfaltigkeit sein oder das Element $M_{\rho-1}$ als ganzes enthalten. Daher gilt der

Satz 8. *Jede algebraische nichtzylindrische Mannigfaltigkeit (28) enthält die ersten Elemente sämtlicher Normalfolgen, deren Substitutionen die betreffende Mannigfaltigkeit invariant lassen.*

Für die zweiten Elemente gilt ein analoger Satz, der später wichtige Anwendungen finden wird.

Satz 8'. *Wird eine algebraische nichtzylindrische Mannigfaltigkeit durch die Substitutionen einer Normalfolge in sich selbst transformiert, so ist jede das zweite*

Element der Folge enthaltende Hyperebene eine Tangentenhyperebene der invarianten Mannigfaltigkeit.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar, wenn man (28) als Einhüllende ihrer Tangentenhyperebenen betrachtet.

Wir gehen zu diesem Zweck in der in Nr. 11 angegebenen Weise vermöge (18) zum korrelativen Raum $R_n(z)$ über, wobei die Hyperfläche p -ter Ordnung (28) in eine Hyperfläche p -ter Klasse übergeht. Diese neue Hyperfläche ist offenbar nichtzylindrisch, und sie enthält nach Satz 8 sämtliche Punkte der ersten Elemente der Normalfolge der korrelativen Substitutionen. Weil diesen Punkten im Raum $R_n(y)$ die Hyperebenen durch das zweite Element der gegebenen Folge entsprechen, ist die Richtigkeit des obigen Satzes dargetan.

Definition. Wir sagen, daß das Gebilde $\varphi = 0$ bzw. die Form φ die komplexe Charakteristik q' hat, wenn das Gebilde wenigstens eine $L_{q'-1}$, dagegen keine $L_{q'}$ als Ganzes enthält.

Aus dem Satz 8 folgt dann unmittelbar der

Satz 9. Der Rang q jeder Normalfolge von Substitutionen, die eine nichtzylindrische algebraische Mannigfaltigkeit der komplexen Charakteristik q' in sich selbst transformieren, genügt der Bedingung

$$(29) \quad q \leq q',$$

wenn nicht $q = n + 1$ ist.

In dem Falle, wo φ eine reelle Form, d. h. eine Form mit reellen Koeffizienten ist, werden wir neben q' noch eine zweite Größe, die (reelle) Charakteristik q einführen.

Definition. Wir sagen, daß die reelle Form φ bzw. das reelle Gebilde $\varphi = 0$ die (reelle) Charakteristik q hat, wenn das Gebilde $\varphi = 0$ wenigstens eine reelle L_{q-1} , dagegen keine reelle L_q als Ganzes enthält.

Offenbar ist für jede reelle Form

$$(30) \quad q \leq q'.$$

Weil die Elemente jeder Normalfolge reeller Substitutionen reell sind, gilt der folgende dem Satz 9 analoge

Satz 9'. Der Rang q jeder Normalfolge reeller Substitutionen, die eine reelle nichtzylindrische algebraische Mannigfaltigkeit der reellen Charakteristik q invariant

lassen, genügt der Bedingung

$$(31) \quad \varrho \leq q,$$

wenn nicht $\varrho = n + 1$ ist.

Es sei φ insbesondere eine reelle definite Form. Weil das Gebilde $\varphi = 0$ dann keine reellen Punkte hat, ist $q = 0$. Die Relation (31) kann aber dann nicht gelten, weil der Rang ϱ nach seiner Definition mindestens Eins ist. Daher muß $\varrho = n + 1$ sein. Es gilt somit der

Satz 10. *Reelle Substitutionen, die eine definite Form in sich selbst transformieren, können nur Normalfolgen vom maximalen Rang $\varrho = n + 1$ bilden.*

17. Die obigen Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit, wenn man die gewöhnliche Form φ durch eine Form mit konjugiert imaginären Variablen, d. h. die Hermitesche Form ersetzt. Diese Formen haben den Ausdruck:

$$(32) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum c_{\mu, \nu} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \dots y_{n+1}^{\mu_{n+1}} \bar{y}_1^{\nu_1} \bar{y}_2^{\nu_2} \dots \bar{y}_{n+1}^{\nu_{n+1}} \\ (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{n+1} = p),$$

wo allgemein y und $\bar{y}$ konjugiert imaginäre Größen bezeichnen und

$$c_{\mu, \nu} = \bar{c}_{\nu, \mu}$$

ist. Die Gleichung

$$(33) \quad \psi(y, \bar{y}) = 0$$

stellt eine im allgemeinen $(2n-1)$ dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit des Raumes R_n dar, vorausgesetzt, daß die Form (32) nicht definit ist.

Um eine in allen Fällen existierende geometrische Darstellung für (33) zu erhalten, zerlegen wir die Variablen y_x in ihren reellen und imaginären Bestandteil:

$$(34) \quad y_x = y'_x + i y''_x, \quad \bar{y}_x = y'_x - i y''_x \quad (x = 1, 2, \dots, n+1).$$

Dadurch geht (32) in eine gewöhnliche reelle Form

$$(35) \quad \varphi(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}; y''_1, y''_2, \dots, y''_{n+1})$$

der $2n+2$ Variablen y'_x, y''_x ($x = 1, 2, \dots, n+1$) über. Wir lassen nun diese Variablen wieder komplexe Werte annehmen und wir deuten dieselben als homogene Punktkoordinaten in einem Raume R_{n+1} . In der Hyperfläche dieses Raumes, die durch Nullsetzen der Form (35) erhalten wird, haben wir eine in allen Fällen brauchbare geometrische Darstellung der Hermiteschen Form (32).

Die Gleichungen (34) ordnen jeder im Raum R_n gelegenen L_x eine reelle

L_{2n+1} des Raumes R_{2n+1} zu. Es sei σ eine Normalfolge komplexer Substitutionen, die die Form (32) bis auf einen konstanten Faktor invariant lassen. Es sei q der Rang von σ und M_{q-1} und $\bar{M}_{n-q}$ ihre Elemente. Die zugeordneten reellen Substitutionen zwischen den Variablen y', y'' , welche die Form (35) invariant lassen, bilden dann offenbar eine Normalfolge, die als Elemente die den Elementen von σ zugeordneten L_{2q-1} und $L_{2n+1-2q}$ hat. Nach Satz 8 gehört das erste dieser Elemente L_{2q-1} als Ganzes der Hyperfläche $\varphi = 0$ an. Dann muß aber M_{q-1} als Ganzes in der Hermiteschen Mannigfaltigkeit (33) enthalten sein, woraus folgt, daß die Beziehung (31) auch im vorliegenden Falle gültig ist.

18. Die einfachste Anwendung der obigen Resultate ergibt sich bei den quadratischen Formen.

Es sei φ zuerst eine gewöhnliche quadratische Form. Bekanntlich kann sie dann vermittels einer reellen linearen Transformation in die kanonische Form

$$(36) \quad \varphi = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \quad (p+q = n+1)$$

überführt werden. Es sei z. B. $q \leq p$. Dann enthält die quadratische Mannigfaltigkeit

$$(37) \quad \varphi = 0$$

die reelle L_{q-1} :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{p+1}, & y_2 &= y_{p+2}, & \dots, & y_q &= y_{p+q}, \\ y_{q+1} &= 0, & y_{q+2} &= 0, & \dots, & y_p &= 0. \end{aligned}$$

Dagegen enthält (37) keine reelle L_q . Denn jede in (37) enthaltene reelle L_q müßte mit der reellen linearen Mannigfaltigkeit

$$y_{p+1} = 0, \quad y_{p+2} = 0, \quad \dots, \quad y_{p+q} = 0$$

einen reellen auf (37) gelegenen Schnittpunkt besitzen, was unmöglich ist. Somit hat (36) die reelle Charakteristik q . Wäre $p \leq q$, so hätte (36) die reelle Charakteristik p . Unsere Definition der reellen Charakteristik deckt sich somit für die reellen quadratischen Formen mit der gewöhnlichen Definition der Charakteristik. Sie bildet eine in mehrerer Hinsicht natürliche Verallgemeinerung des bisher nur für die quadratischen Formen definierten Begriffs und sie ist eine allen reellen linearen Substitutionen gegenüber invariante Eigenschaft reeller algebraischer Formen.

In analoger Weise findet man, daß bei den quadratischen Hermiteschen Formen die von uns definierte Charakteristik mit der früher gegebenen Definition dieses Begriffs identisch ist.

19. Die Normalfolgen von Substitutionen, die eine gewöhnliche oder Hermitesche quadratische Form in sich selbst überführen, besitzen gewisse bemerkenswerte Eigenschaften, die im allgemeinen Falle fehlen. Wir wollen im Folgenden einige die genannten Folgen betreffende Sätze herleiten, die später eine mehrfache Anwendung finden. Es sei

$$(38) \quad \varphi(y) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} a_{\mu, \nu} y_{\mu} y_{\nu}$$

eine quadratische Form einer nichtverschwindenden Determinante, deren Koeffizienten beliebige komplexe Zahlen sein können. Durch eine geeignete lineare Transformation kann man dieselbe in die Form

$$(39) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2$$

überführen. Jede Substitution S , die (38) invariant läßt, geht dabei in eine orthogonale Substitution

$$(40) \quad y'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \alpha_{i,x} y_x \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

über. Nun hat die inverse Substitution von (40) den Ausdruck

$$(41) \quad y'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \alpha_{x,i} y_x \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

woraus hervorgeht, daß jede Normalfolge orthogonaler Substitutionen eine umkehrbar normale Folge ist, deren beide Rangzahlen einander gleich sind. Weil nun jede lineare Transformation den Rang einer Normalfolge ungeändert läßt, kann man aus dem Obigen den Schluß ziehen, daß jede Normalfolge von Substitutionen, welche eine quadratische Form in sich selbst transformieren, eine umkehrbar normale Folge ist, deren beide Rangzahlen einander gleich sind.

Wir verstehen wie üblich unter der Polare des Punktes $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ in bezug auf (38) die Hyperebene

$$(42) \quad \sum_{i=1}^{n+1} u_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0.$$

Es sei σ irgend eine Normalfolge der oben betrachteten Art mit den Elementen M_{q-1} und $\overline{M}_{n-q}$, ferner sei σ' die inverse Normalfolge mit den Elementen M'_{q-1} und $\overline{M}'_{n-q}$. Um die gegenseitige Lage der Elemente genauer zu studieren, gehen wir von irgend einem Punkt P und seiner Polare π aus, auf welche wir die Substitutionen von σ gleichzeitig anwenden. Nach Satz 2 konvergieren die

Transformierten von P gegen M_{q-1} , wenn P nicht dem Element $\bar{M}_{n-q}$ angehört. Ferner gibt der Satz 5 auf die Hyperebene π angewandt das Resultat, daß das Häufungsgebilde der Transformaten von π mittels σ das Element $\bar{M}'_{n-q}$ enthält, wenn nicht M'_{q-1} in π enthalten ist. Weil nun die Polarität zwischen den Punkten und Hyperebenen durch die Substitutionen, die (38) invariant lassen, nicht zerstört wird, so müssen die Elemente M_{q-1} und $\bar{M}'_{n-q}$ polare Gebilde sein, d. h. die Punkte des ersteren und die durch das letztere gehenden Hyperebenen sind einander paarweise polar zugeordnet. Dies ist natürlich auch mit den Elementen M'_{q-1} und $\bar{M}_{n-q}$ der Fall. Wir haben also den

Satz 11. *Jede Normalfolge, deren Substitutionen eine quadratische Form einer nichtverschwindenden Determinante in sich selbst überführen, ist umkehrbar normal und mit gleichen Rangzahlen. Ferner findet zwischen dem ersten Element dieser Folge und dem zweiten Element ihrer inversen Folge eine Polarität statt, indem jedem Punkt des ersten Elementes eine durch das zweite Element gehende Hyperebene, nämlich die zum betreffenden Punkt gehörige Tangentenhyperebene der invarianten Mannigfaltigkeit zugeordnet wird.*

20. Der obige Satz gilt ungeändert für die Folgen linearer Substitutionen, welche eine indefinite quadratische Hermitesche Form

$$(43) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} c_{\mu, \nu} y_{\mu} \bar{y}_{\nu} \quad \left(\begin{array}{l} c_{\mu, \mu} \text{ reell} \\ c_{\mu, \nu} = \bar{c}_{\nu, \mu} \end{array} \right)$$

in sich selbst transformieren.

Zum Beweis bringen wir (43) mittels einer linearen Transformation in die Gestalt

$$(44) \quad \sum_{i=1}^p y_i \bar{y}_i - \sum_{\kappa=p+1}^{p+q} y_{\kappa} \bar{y}_{\kappa}.$$

Ist (3) eine Substitution, die (44) invariant läßt, so hat die inverse Substitution den Ausdruck

$$y_i = \sum \pm \alpha_{\kappa, i} y'_{\kappa},$$

wo das Zeichen $+$ für $(i \leq p, \kappa \leq p)$ und $(i > p, \kappa > p)$ und in anderen Fällen das $-$ Zeichen anzuwenden ist. Man findet dann wie früher, daß jede Normalfolge der fraglichen Substitutionen umkehrbar normal mit gleichen Rangzahlen ist.

Der letzte Teil des Satzes 11 wird auf den vorliegenden Fall unmittelbar übertragen, wenn man die Polare des Punktes $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ durch die Gleichung

chung

$$(45) \quad \sum_{i=1}^{n+1} u_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0$$

definiert.

II. Diskontinuierliche Kollineationsgruppen.

§ 3.

Normale Diskontinuität.

21. Die Untersuchungen des vorigen Kapitels beziehen sich auf die geometrischen Eigenschaften der unendlichen Folgen linearer Substitutionen. Es sollen jetzt diskontinuierliche Gruppen linearer Substitution in Betracht gezogen werden.

Unter einer diskontinuierlichen Gruppe soll im Folgenden eine Gruppe verstanden werden, die keine infinitesimale Substitution besitzt, d. h. die keine gegen die Identität konvergierende Folge von Substitutionen enthält.

Es sei Γ eine diskontinuierliche Kollineationsgruppe und σ :

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

eine beliebige Normalfolge ihrer Substitutionen (3). Wäre der Rang von σ gleich $n+1$, d. h. die Determinante der zugeordneten Grenzsubstitution von Null verschieden, so würde die Folge

$$S_\nu^{-1} S_{\nu+1}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

die ebenfalls eine Folge von Γ ist, gegen die Identität konvergieren. Weil dies gegen unsere Annahme ist, so ergibt sich der

Satz 12. *Eine diskontinuierliche Gruppe von linearen Substitutionen*

$$y'_i = \sum_{x=1}^{n+1} \alpha_{i,x} y_x \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

kann keine Normalfolge vom Rang $n+1$ enthalten.

Wir bezeichnen mit (M) bzw. $(\bar{M})$ die Menge der ersten bzw. zweiten Elemente aller in der Gruppe enthaltenen Normalfolgen. Aus der Definition der Normalfolge ergibt sich, daß die beiden Mengen abgeschlossen sind.

Definition. Die Gruppe Γ soll im Raume R_n normal diskontinuierlich heißen, wenn die abgeschlossene Mannigfaltigkeit $(\bar{M})$ der zweiten Elemente der Normalfolgen von Γ nicht die Gesamtheit der Punkte des Raumes R_n enthält.

Unter dem **Normalbereich** B der Gruppe werden wir die Mannigfaltigkeit aller Punkte des Raumes verstehen, die keinem Element von $(\bar{M})$ angehören. Der Normalbereich B der Gruppe Γ ist m. a. W. der gemeinsame $2n$ -dimensionale Teil der Normalbereiche sämtlicher Normalfolgen der Gruppe.

Nach Nr. 5 sind die Koordinaten des Häufungspunktes der Transformierten der Punkte von B für jede Normalfolge von Γ stetige lineare Funktionen der Koordinaten des Anfangspunktes, wobei die Häufung gegen das erste Element der betreffenden Folge in jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmäßig ist. Die den Substitutionen von Γ entsprechenden linearen Funktionen (44) bilden daher eine Normalfamilie im Bereich B in dem von MONTEL [14] definierten Sinne.

Wir bemerken ferner, daß die Mannigfaltigkeit $(\bar{M})$ der zweiten Elemente den Substitutionen der Gruppe Γ gegenüber invariant ist. Denn ist S irgend eine Substitution von Γ und $\bar{M}$ das zweite Element irgend einer Normalfolge σ , so ist $S(\bar{M})$ das zweite Element der transformierten Folge $S^{-1}\sigma S$. Daraus folgt insbesondere, daß der Normalbereich der Gruppe durch jede Substitution der Gruppe in sich selbst transformiert wird.

22. Um die gegenseitige Beziehung der „normalen Diskontinuität“ und der bisher allein berücksichtigten „eigentlichen Diskontinuität“ zu erklären, beweisen wir den

Satz 13. Jede normal diskontinuierliche Gruppe ist überall in ihrem Normalbereiche eigentlich diskontinuierlich.

Wir sagen wie üblich, daß die Gruppe Γ im Punkte P eigentlich diskontinuierlich ist, wenn man um diesen Punkt herum einen $2n$ -dimensionalen Bereich konstruieren kann, der nur mit endlich vielen seiner Transformierten gemeinsame Punkte hat, d. h. der nur eine beschränkte Anzahl miteinander äquivalenter Punkte enthält. Ferner heißt Γ im Bereich B eigentlich diskontinuierlich, wenn sie es in jedem Punkte von B ist.

Es sei nun τ ein $2n$ -dimensionaler, den Punkt P enthaltender Bereich, der im Innern des Normalbereichs B von Γ liegt. Es sei ferner π ein beliebiger Häufungspunkt der Transformierten von τ mittels der Substitutionen von Γ . Offenbar gibt es dann eine umkehrbar normale Folge σ der Substitutionen von Γ , für welche π als Häufungspunkt für die zugeordneten Transformierten von τ

erhalten wird. Weil nun τ im Innern von B und somit außerhalb der zweiten Elemente von σ gelegen ist, so befindet sich nach Satz 2 der Punkt π auf dem ersten Elemente der Folge σ . Dieses Element gehört aber als Ganzes dem zweiten Elemente der inversen Folge von σ an, welches keine inneren Punkte von B enthält. Der Punkt π und somit die Häufungsstellen der Transformierten von τ überhaupt können daher niemals im Innern des Normalbereichs B liegen. Der Bereich τ kann somit nur eine beschränkte Anzahl miteinander äquivalenter Punkte enthalten. Die Gruppe Γ ist also im Punkte P und somit im Bereiche B eigentlich diskontinuierlich.

Wie verhält sich die Gruppe Γ außerhalb ihres Normalbereiches?

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Die Elemente $M, \bar{M}$ sind bei jeder Normalfolge Punkte. Das zweite Element $\bar{M}$ ist der Häufungspunkt der Transformaten mittels der inversen Folge für sämtliche von M verschiedenen Punkte, und die Gruppe kann somit in den Punkten $(\bar{M})$ nicht eigentlich diskontinuierlich sein. Wir haben daher das Resultat, daß im Falle $n = 1$ die normale und die eigentliche Diskontinuität der Kollineationsgruppen identische Begriffe sind.

Dies ist für $n > 1$ nicht der Fall, weil die Mannigfaltigkeiten (M) und $(\bar{M})$ für $n > 1$ im allgemeinen nicht identisch sind. Wir werden in der Tat sehen, daß die Gruppe Γ im allgemeinen noch in gewissen Gebieten außerhalb ihres Normalbereichs eigentlich diskontinuierlich sein kann. Wir wollen diese Behauptung hier an einem Beispiel bestätigen.

Wir betrachten die von der Substitution

$$(46) \quad \begin{aligned} y'_i &= \omega_i y_i & (i = 1, 2, \dots, n+1) \\ |\omega_1| &< |\omega_2| < \dots < |\omega_{n+1}| \end{aligned}$$

erzeugte zyklische Gruppe. Die positiven Potenzen von (46) bilden eine Normalfolge ersten Ranges mit den Elementen

$$M : y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0; \quad \bar{M} : y_{n+1} = 0$$

und die negativen Potenzen eine gleiche Normalfolge mit den Elementen

$$M' : y_2 = y_3 = \dots = y_{n+1} = 0; \quad \bar{M}' : y_1 = 0.$$

Der Normalbereich der fraglichen zyklischen Gruppe umfaßt hier die Gesamtheit derjenigen Punkte, die den Hyperebenen

$$y_1 = 0; \quad y_{n+1} = 0$$

nicht angehören. Die Gruppe ist jedoch, auch in diesen Hyperebenen, von den

invarianten Punkten

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$$

abgesehen, eigentlich diskontinuierlich, wie leicht zu bestätigen ist.

Die fundamentale Bedeutung des oben eingeführten neuen Diskontinuitätsbegriffs, der normalen Diskontinuität, für die Theorie der automorphen Funktionen werden wir in der funktionentheoretischen Abteilung unserer Arbeit kennen lernen. Es wird sich zeigen, daß der fragliche Begriff besser als der früher allein angewandte Begriff der eigentlichen Diskontinuität geeignet ist, eine Analogie zwischen den Theorien der Funktionen einer und mehrerer Variablen zu gewähren.

§ 4.

Bildung normal diskontinuierlicher Kollineationsgruppen.

23. Im allgemeinen ist das Fehlen infinitesimaler Substitutionen zur normalen Diskontinuität der Gruppe nicht hinreichend. Es gibt jedoch sehr allgemeine und wichtige Fälle, wo die Gruppe normal diskontinuierlich ist, sobald keine infinitesimalen Substitutionen existieren. Diesen Fällen ist charakteristisch, daß es dann einen in bezug auf die Gesamtheit der Substitutionen der Gruppe invarianten Bereich gibt.

Das einfachste Beispiel hat man in den Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen, die einen Hauptkreis besitzen. Ferner hat man hierhergehörige Beispiele in den Kollineationsgruppen mit einer reellen quadratischen oder Hermiteschen Form sowie in den sog. hyperabelschen Gruppen und gewissen Verallgemeinerungen derselben, die im Folgenden untersucht werden. Es entsteht bei dieser Sachlage natürlich die Frage nach den Bedingungen, denen ein Bereich genügen soll, um jeder Gruppe linearer Substitutionen, die diesen Bereich invariant läßt, normale Diskontinuität zu garantieren, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält.

Wir werden zeigen, daß zur fraglichen Kategorie sämtliche $2n$ -dimensionalen Bereiche D angehören, die der folgenden sehr allgemeinen Bedingung genügen.

Bedingung (A). *Es gibt ein System von Hyperflächen, die keinen inneren Punkt von D enthalten und die nicht durch einen und denselben Punkt gehen.*

Diese Bedingung ist offenbar u. a. stets dann erfüllt, wenn der Bereich D endlich ist, weil jedes System von $n + 1$ Hyperebenen, die außerhalb D liegen und die nicht durch einen und denselben Punkt gehen, zum System der in (A) vorausgesetzten Hyperflächen gewählt werden kann.

Satz 14. *Jede Gruppe linearer Substitutionen, die irgend einen der Bedingung (A) genügenden Bereich D in sich selbst transformieren, ist in diesem Bereich normal diskontinuierlich, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält.*

Es sei Γ irgend eine Gruppe der im obigen Satz vorausgesetzten Art und σ eine beliebige Normalfolge von Γ mit den Elementen M und $\bar{M}$. Wenigstens eine der in (A) vorausgesetzten Hyperflächen H enthält das Element M nicht als Ganzes. Nach Satz 5 besitzen ihre Transformaten mittels der inversen Folge von σ als Häufungsgebilde eine Hyperfläche H' , die das Element $\bar{M}$ als Ganzes enthält. Weil nun D durch jede Substitution von Γ in sich selbst transformiert wird und weil H keinen inneren Punkt von D enthält, so ist dies auch mit sämtlichen Transformaten von H und daher auch mit H' der Fall. Die Elemente $\bar{M}$ enthalten daher keine inneren Punkte von D . Weil aber der Normalbereich gerade aus der Gesamtheit der den zweiten Elementen ($\bar{M}$) nicht zugehörigen Punkten des Raumes R_n besteht, ist die Richtigkeit des Satzes 14 damit erwiesen.

24. Um die Allgemeinheit der Bedingung (A) zu prüfen, gehen wir umgekehrt von einer normal diskontinuierlichen Gruppe Γ aus, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie wenigstens eine Normalfolge σ vom Rang Eins besitzt und daß ihre sämtlichen Substitutionen weder das zweite Element $\bar{M}_{n-1}$ von σ noch irgend eine auf $\bar{M}_{n-1}$ gelegene L in sich selbst überführen. Wir behaupten, daß der Normalbereich von Γ dann ein der Bedingung (A) genügender Bereich D ist. In der Tat wird erstens der Normalbereich nach Nr. 21 durch jede Substitution der Gruppe in sich selbst transformiert. Ferner kann man endlich viele Transformaten von $\bar{M}_{n-1}$ wählen, die wie $\bar{M}_{n-1}$ Hyperebenen und daher Gebilde A_{n-1} sind und die keinen gemeinsamen Punkt haben, weil es andernfalls eine allen Transformaten von $\bar{M}_{n-1}$ gemeinsame L gäbe, die allen Substitutionen von Γ gegenüber invariant sein müßte, was der obigen Annahme widerspricht.

25. Die wichtigste Anwendung des Satzes 14 ergibt sich bei den Gruppen, deren Substitutionen ein algebraisches Gebilde in sich selbst überführen.

Es sei zuerst φ eine reelle gewöhnliche indefinite Form, deren zugeordnetes Gebilde

$$(47) \quad \varphi = 0$$

nicht zylindrisch ist. Wir denken uns die Gesamtheit der reellen Tangentenhyperebenen von (47) konstruiert und wir nehmen an, daß dieselben nicht den ganzen Raum R_n ausfüllen. Es sei $B(\varphi)$ die Mannigfaltigkeit der Punkte, die

keiner der genannten Hyperebenen angehören. $B(\varphi)$ ist ein von einem oder mehreren Teilen zusammengesetzter Bereich, der offenbar durch jede reelle Substitution, die φ invariant läßt, in sich selbst transformiert wird. Dieser Bereich genügt der Bedingung (A). Denn die reellen Tangentenhyperebenen von (47), die nach ihrer Definition keinen inneren Punkt von $B(\varphi)$ enthalten, können nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen, weil das Gebilde (47) nach der Annahme nicht zylindrisch ist.

Es gilt also der

Satz 15. *Jede Gruppe reeller linearer Substitutionen, die eine nichtzylindrische reelle algebraische Mannigfaltigkeit (47) in sich selbst transformieren, ist in jedem zu den reellen Tangentenhyperebenen des Gebildes nicht gehörigen Punkt normal diskontinuierlich, sobald die Gruppe keine infinitesimale Substitution enthält.*

Um einen analogen Satz für die Hermiteschen Formen (32) zu erhalten, definieren wir die Tangentenhyperebenen der Hermiteschen Mannigfaltigkeit (33) durch die Gleichung

$$(48) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \psi(\eta, \bar{\eta})}{\partial \eta_i} y_i = 0,$$

wo (η) den Berührungspunkt bezeichnet. Beachtet man, daß die Mannigfaltigkeit dieser Hyperebenen in bezug auf jede reelle und komplexe Substitution, die ψ in sich selbst transformiert, invariant ist, so gelangt man ganz wie oben bei den reellen gewöhnlichen Formen zum

Satz 16. *Jede Gruppe reeller oder komplexer linearer Substitutionen, die ein nichtzylindrisches Hermitesches Gebilde in sich selbst transformieren, ist in jedem zu den Tangentenhyperebenen des Gebildes nicht gehörigen Punkt normal diskontinuierlich, sobald die Gruppe keine infinitesimale Substitution enthält.*

26. Die Anwendbarkeit des Satzes 14 beschränkt sich aber nicht auf die vorhergehenden Fälle. Es ist möglich, die normale Diskontinuität der Gruppe noch in zahlreichen Fällen vermittels der obigen Methode nachzuweisen, wo es invariante algebraische Gebilde niedrigerer als $(2n-2)$ -ter Dimension gibt, die also analytisch durch ein System algebraischer Gleichungen (2) darstellbar sind. Um Weitläufigkeit zu vermeiden, wollen wir dies an einem Beispiel zeigen.

Wir betrachten die rationale Normalkurve p -ter Ordnung, die durch die Matrizengleichung

$$(49) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

darstellbar ist. Bekanntlich gestattet diese Kurve ∞^s reelle lineare Transformationen in sich. Wir denken uns die Gesamtheit der reellen Schmiegunghyperebenen von (49) konstruiert, die eine $(2n-1)$ -dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit bilden. Die zu dieser Mannigfaltigkeit nicht gehörigen Punkte bilden einen $(p+1)$ -teiligen Bereich, der offenbar der Bedingung (A) genügt. Denn derselbe bleibt invariant, wenn (49) in sich selbst durch eine reelle Substitution transformiert wird, und ferner gehen die Schmiegunghyperebenen von (49) nicht durch einen und denselben Punkt. Daraus folgt, daß jede Gruppe reeller Substitutionen, die (49) in sich selbst transformiert, in jedem zu keiner reellen Schmiegunghyperebene der betreffenden Kurve gehörigen Punkt normal diskontinuierlich ist, sobald die Gruppe keine infinitesimale Substitution enthält.

Analoge Betrachtungen lassen sich bei invarianten Gebilden beliebiger Dimension anstellen.

Die gemeinsame Eigenschaft der obigen Ergebnisse besteht darin, daß zu gewissen algebraischen Gebilden Bereiche gehören, wo jede Gruppe linearer Substitutionen (deren Koeffizienten je nach Umständen reell oder komplex sein können), die das betreffende Gebilde in sich selbst transformieren, normal diskontinuierlich ist, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält. Es ist zweckmäßig, von dem genannten Bereich die Benennung *Normalbereich des Gebildes* anzuwenden.

Die einfachsten und wichtigsten Beispiele von normal diskontinuierlichen Gruppen findet man unter den Gruppen linearer Substitutionen, die eine quadratische, gewöhnliche oder Hermitesche Form in sich selbst überführen.

Wir beginnen mit der Betrachtung reeller Substitutionen, die eine reelle gewöhnliche Form invariant lassen.

§ 5.

Definite Formen.

27. Wir nennen wie üblich die reelle Form φ definit, wenn die Gleichung $\varphi = 0$, von der Kombination $y_1 = y_2 = \dots = y_{n+1} = 0$ abgesehen, durch keine reellen Werte der Variablen befriedigt werden kann.

Die reelle Charakteristik der definiten Formen ist gleich Null. Nach Satz 10 können Substitutionen, die eine definite Form in sich selbst überführen, nur Normalfolgen vom Rang $n+1$ bilden. Solche Folgen können aber nach dem Vorhergehenden niemals bei unendlichen diskontinuierlichen Gruppen existieren. Somit gilt der

Satz 17. *Jede diskontinuierliche Gruppe reeller linearer Substitutionen, deren Substitutionen irgend eine definite Form (bis auf einen konstanten Faktor) in sich selbst überführen, kann nur eine endliche Anzahl Substitutionen enthalten.*

§ 6.

Indefinite quadratische Formen.

28. Wir betrachten hier diskontinuierliche Gruppen reeller linearer Substitutionen, die eine reelle indefinite quadratische Form

$$(50) \quad \varphi(y) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} a_{\mu, \nu} y_{\mu} y_{\nu}$$

einer nichtverschwindenden Determinante in sich transformieren. Die betreffenden Substitutionen können geometrisch als nichteuklidische Bewegungen im Raume R_n interpretiert werden, wobei die quadratische Mannigfaltigkeit

$$(51) \quad \varphi(y) = 0$$

das absolute Gebilde darstellt.

Nach Nr. 19 gehören die ersten Elemente der Normalfolgen der Gruppe zum Gebilde (51) und sämtliche zweiten Elemente zu den reellen Tangentenhyper-ebenen von (51), wobei die Elemente reell und paarweise einander in bezug auf (51) polar sind. Wir behaupten, daß es umgekehrt eine Normalfolge vom Rang Eins gibt, deren zweites Element $\bar{M}_{n-1}$ mit einer beliebig gegebenen reellen Tangentenhyperebene von (51) identisch ist.

Es seien nämlich T und T' irgend zwei reelle Tangentenhyperebenen von (51) und P, P' ihre Berührungspunkte. Wir können das Koordinatensystem so wählen, daß T und T' resp. die Gleichungen $y_1 = 0$ und $y_{n+1} = 0$ und P, P' resp. die Koordinaten $(0, 0, \dots, 0, 1)$ und $(1, 0, \dots, 0, 0)$ besitzen werden. Dadurch nimmt die Form (50) die Gestalt

$$\kappa y_1 y_{n+1} + \bar{\varphi}(y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (\kappa \neq 0)$$

an. Diese Form wird nun durch die Substitution

$$(52) \quad y'_1 = \omega y_1, \quad y'_{n+1} = \frac{1}{\omega} y_{n+1}, \quad y'_i = y_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

in sich selbst transformiert. Ist $|\omega| < 1$, so bilden die positiven Potenzen von (52) eine Normalfolge vom Rang Eins, deren zweites Element mit der Tangentenhyperebene T von (51) zusammenfällt, w. z. b. w.

Wir denken uns jetzt die Gesamtheit der reellen Tangentenhyperebenen von (51) konstruiert. Vorausgesetzt, daß diese Hyperebenen nicht den ganzen $2n$ -dimensionalen Raum R_n ausfüllen, haben wir in der Mannigfaltigkeit $B(\varphi)$ der zu den betreffenden Hyperebenen nicht gehörigen Punkte des Raumes R_n den Normalbereich des Gebildes φ . Nach dem Obigen ist dieser Bereich der größtmögliche Bereich des Raumes R_n , wo jede diskontinuierliche Gruppe reeller linearer Substitutionen, die φ in sich selbst transformieren, normal diskontinuierlich ist — ein Resultat, welches den Satz 15 im vorliegenden Falle in wichtiger Weise ergänzt.

29. Bei der weiteren Entwicklung geben wir unserer quadratischen Form den kanonischen Ausdruck

$$(50') \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2.$$

Um den Normalbereich von (50') zu bestimmen, haben wir die Bedingung dafür auszudrücken, daß ein gegebener Punkt $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ keiner reellen Tangentenhyperebene

$$(53) \quad \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \dots + \eta_p y_p - \eta_{p+1} y_{p+1} - \dots - \eta_{p+q} y_{p+q} = 0$$

angehört. Wir zerlegen zu diesem Zweck die Größen y_x in ihre reellen und imaginären Bestandteile: $y_x = y'_x + i y''_x$, wodurch die Gleichung (53) in zwei reelle Gleichungen mit den reellen Variablen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}$ zerfällt, zwischen denen die Relation

$$(54) \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2 = 0$$

herrscht. Die zwei aus (53) erhaltenen reellen Gleichungen definieren eine L_{n-2} im Raum der Variablen (η) . Diese lineare Mannigfaltigkeit schneidet (54) längs einer A_{n-3}^* , die keine reellen Punkte besitzen darf, wenn (η) einen Punkt des gesuchten Normalbereichs von φ repräsentiert. Weil anderseits der Schnitt einer quadratischen reellen Mannigfaltigkeit A_m^* mit einer Hyperebene eine A_{m-1}^* ist, deren reelle Charakteristik mindestens gleich $q-1$ ist, wenn diejenige von A_m^* gleich q ist, wie aus der in § 2 gegebenen geometrischen Definition der reellen Charakteristik hervorgeht, so muß, da A_{n-3}^* die Charakteristik Null hat, $q-2 \leq 0$, d. h.

$$q \leq 2$$

sein. Daher gilt der

Satz 18. *Die reellen quadratischen Formen, deren reelle Charakteristik größer als zwei ist, besitzen keinen Normalbereich.*

Dagegen gibt es einen Normalbereich in den Fällen $q = 1$ und $q = 2$, wie wir im Folgenden zeigen werden.

Fall $q = 1$.

30. Der kanonische Ausdruck der Formen mit der Charakteristik $q = 1$ lautet:

$$(55) \quad \varphi(y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2.$$

Die Gleichung

$$(56) \quad \varphi(y) = 0$$

können wir durch eine Hypersphäre H repräsentieren. Jede reelle lineare Substitution, die (55) ungeändert läßt, behält auch die Hermitesche Form

$$(57) \quad \psi(y, \bar{y}) = y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1}$$

invariant. Dies findet auch für die Formen

$$(58) \quad \chi(y, y) = \psi(y, \bar{y}) - \lambda \sqrt{\varphi(y) \varphi(\bar{y})}$$

statt, wo λ einen reellen Parameter bezeichnet. Die Gleichung

$$(59) \quad \chi(y, \bar{y}) = 0$$

stellt eine $(2n-1)$ -dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit des Raumes R_n dar. Man gewinnt für diese invariante Mannigfaltigkeit eine interessante geometrische Eigenschaft, wenn man beachtet, daß der Ausdruck

$$\Delta = x \log (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}),$$

wo

$$\lambda = \frac{\psi(y, \bar{y})}{\sqrt{\varphi(y) \varphi(\bar{y})}}$$

ist, den Abstand des Punktes (y) von seinem konjugierten Punkte $(\bar{y})$ im nicht-euklidischen Sinne bezeichnet, wenn die Hypersphäre (56) zum absoluten Gebilde gewählt wird. Die Mannigfaltigkeiten (59) sind dann Orte für Punkte, die von ihrem konjugierten Punkt einen konstanten Abstand haben. Die obigen invarianten Gebilde sind die einzigen $(2n-1)$ -dimensionalen invarianten Gebilde der reellen projektiven Transformationen, die (55) in sich überführen.

Der Normalbereich von (55) läßt sich mit Hilfe der Gebilde (59) leicht bestimmen.

Wir betrachten zu diesem Zweck den Schnitt von (58) mit irgend einer

reellen Tangentenhyperebene von (55), z. B. mit $y_1 = y_{n+1}$. Man findet

$$(60) \quad y_2 \bar{y}_2 + y_3 \bar{y}_3 + \cdots + y_n \bar{y}_n = \lambda \sqrt{(y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2)(\bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 + \cdots + \bar{y}_n^2)}.$$

Es sei zuerst $n > 2$. Die Gleichung (60) gibt dann die Bedingung

$$(61) \quad \lambda \geq 1$$

für die Existenz des fraglichen Schnittes. M. a. W. besitzt die betreffende Tangentenhyperebene keine Punkte im Raume

$$(62) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1} < |y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2|.$$

Dies ist aber dann mit sämtlichen reellen Tangentenhyperebenen der Fall, weil jede dieser Hyperebenen in jede andere vermittels einer reellen linearen Transformation, die (55) invariant läßt, überführbar ist, und weil der Raum (62) dabei ungeändert bleibt.

Wir besitzen also im Gebiet (62) den Normalbereich unserer Form (55). Dieser Bereich ist zusammenhängend und er enthält als Teilbereich u. a. die Hypersphäre

$$(63) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1} = 0.$$

Im Falle $n = 2$ verhält es sich ganz anders. Aus (60) ergibt sich nämlich die Gleichung

$$(61') \quad \lambda = 1$$

statt der Ungleichung (61). Die zu den reellen Tangenten des Kegelschnittes

$$(64) \quad y_1 y_1 + y_2 \bar{y}_2 - y_3 \bar{y}_3 = 0$$

gehörigen Punkte bilden die dreidimensionale Mannigfaltigkeit

$$(65) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - y_3 \bar{y}_3 = |y_1^2 + y_2^2 - y_3^2|,$$

welche den betreffenden vierdimensionalen Raum in drei Teile zerlegt.

Es gibt Gruppen, für welche der Bereich (62) bzw. der von (64) begrenzte, aus drei Teilen zusammengesetzte Bereich der Normalbereich ist. Damit dies eintritt, muß nach dem Vorhergehenden jede reelle Tangentenhyperebene von H der Mannigfaltigkeit $(\bar{M})$ der zweiten Elemente, d. h. jeder reelle Punkt von H der Mannigfaltigkeit (M) der ersten Elemente der Normalfolgen angehören. Dieser Bedingung genügen u. a. die Gruppen reeller ganzzahliger Substitutionen, die eine reelle Form der Charakteristik 1 und mit ganzzahligen Koeffizienten in sich selbst überführen, wie man mit Hilfe der Hermiteschen Reduktionstheorie quadratischer Formen nachweisen kann.

Andere Beispiele erhält man durch folgende geometrische Betrachtungen.

Indem wir vorläufig die Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ nur reelle Werte annehmen lassen, bezeichnen wir mit

$$(66) \quad E'_i, E_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

reelle Hyperebenen, die aus der reellen Hypersphäre H Segmente τ'_i, τ_i schneiden, die außerhalb einander liegen. Es sei allgemein S_i eine reelle lineare Substitution, welche H derart in sich selbst transformiert, daß E'_i auf E_i und die dem Segment τ'_i nicht gehörigen Punkte der Hypersphäre auf die Punkte von τ_i abgebildet werden. Die Substitutionen

$$(67) \quad S_i, S_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

erzeugen dann eine Gruppe, für welche der von den Hyperebenen (66) begrenzte Teil F des Innern der Hypersphäre H keine zwei äquivalente Punkte enthält und die daher keine infinitesimale Substitution enthalten kann.

Indem man die Transformaten von F mittels aller möglichen Substitutionen der Gruppe bildet, erhält man eine unendliche Anzahl Bereiche, die das Innere von H einfach und lückenlos bedecken. Die Häufungspunkte dieser Bereiche, welche identisch mit den Punkten (M) sind, liegen auf der Hypersphäre H diskret. Der Normalbereich der Gruppe umfaßt den ganzen Raum der komplexen Variablen y bis auf die reellen und komplexen Punkte der Tangentenhyperebenen von H in den reellen Punkten (M) .

Wegen anderer Beispiele verweisen wir auf die Arbeiten [15, 16] des Verfassers.

Fall $q = 2$.

31. Der kanonische Ausdruck der reellen quadratischen Formen der Charakteristik 2 ist

$$(68) \quad \varphi(y) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2.$$

Den Gebilden (59) entsprechen hier die Gebilde

$$(69) \quad \chi(y, \bar{y}) = \psi(y, \bar{y}) - \lambda \sqrt{\varphi(y)\varphi(\bar{y})} = 0,$$

wo

$$(70) \quad \psi(y, \bar{y}) = y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \dots + y_{n-1} \bar{y}_{n-1} - y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1}$$

ist.

Um den Normalbereich der Form (68) zu bestimmen, bilden wir wie oben den Schnitt von (69) mit einer reellen Tangentenhyperebene von $\varphi(y) = 0$,

z. B. mit $y_1 = y_{n+1}$. Wir erhalten

$$(71) \quad \lambda = \frac{y_2 \bar{y}_2 + y_3 \bar{y}_3 + \cdots + y_{n-1} \bar{y}_{n-1} - y_n \bar{y}_n}{|y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2|}.$$

Es sei zuerst $n > 3$. Wegen der Identität

$$y_n^2 = \sum_{i=2}^{n-1} y_i^2 - \left(\sum_{i=2}^{n-1} y_i^2 - y_n^2 \right)$$

ist

$$y_n \bar{y}_n \leq \sum_{i=2}^{n-1} y_i \bar{y}_i + \left| \sum_{i=2}^{n-1} y_i^2 - y_n^2 \right|$$

und daher

$$\lambda \geq -1.$$

Wie oben schließt man daraus, daß der Normalbereich von (68) mit dem Bereich

$$(72) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_{n-1} \bar{y}_{n-1} - y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1} < -|y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2|$$

identisch ist, der zusammenhängend ist.

Ist dagegen $n = 3$, so ergibt sich aus (71)

$$|\lambda| \leq 1.$$

Die Punkte des Normalbereichs genügen dann einer der Ungleichungen

$$(73) \quad \begin{aligned} y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - y_3 \bar{y}_3 - y_4 \bar{y}_4 &> |y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2| \\ y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - y_3 \bar{y}_3 - y_4 \bar{y}_4 &< -|y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2|. \end{aligned}$$

Der Normalbereich zerfällt in drei Teile, wie eine nähere Untersuchung zeigt.

§ 7.

Quadratische Hermitesche Formen.

32. Die vorhergehenden Betrachtungen sind unmittelbar auf die quadratischen Hermiteschen Formen

$$(74) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} c_{\mu, \nu} y_\mu \bar{y}_\nu$$

anwendbar.

Den definiten Formen entsprechen die Hermiteschen Formen, die durch eine projektive Transformation in die Form

$$(75) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_{n+1} \bar{y}_{n+1}$$

überführbar sind. Man findet wie früher, daß diese Formen niemals durch sämtliche Substitutionen einer unendlichen diskontinuierlichen Gruppe in sich selbst transformiert werden können.

Es sei daher (74) eine indefinite Form, die dann in die Form

$$(76) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_p \bar{y}_p - y_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \cdots - y_{p+q} \bar{y}_{p+q},$$

wo $q \geq 1$ ist, transformierbar ist.

Nach Nr. 20 sind die ersten Elemente sämtlicher Normalfolgen mit der invarianten Form (74) auf dem Hermiteschen Gebilde

$$(77) \quad \psi(y, \bar{y}) = 0$$

und die zweiten Elemente auf den Tangentenhyperebenen von (77) gelegen, wobei die Elemente in bezug auf (77) einander paarweise polar sind. Wie in Nr. 28 zeigt man, daß es eine Normalfolge vom Rang Eins gibt, deren zweites Element mit einer beliebigen Tangentenhyperebene von (77) zusammenfällt. Der Normalbereich des quadratischen Hermiteschen Gebildes (77), d. h. die Mannigfaltigkeit der zu den Tangentenhyperebenen von (77) nicht gehörigen Punkte des Raumes hat dann, wenn derselbe existiert, wie bei den reellen quadratischen Formen die ausgezeichnete Eigenschaft, daß er identisch ist mit dem gemeinsamen Teil der Normalbereiche aller diskontinuierlichen Gruppen, deren Substitutionen die betreffende Form in sich selbst transformieren, wobei jetzt die Koeffizienten der Substitutionen beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein können.

Wir behaupten, daß die Formen der Charakteristik $q = 1$ die einzigen sind, die einen $2n$ -dimensionalen Normalbereich besitzen.

Es sei nämlich $\psi(y, \bar{y})$ eine Form der Charakteristik q . Ist (y) ein beliebiger Punkt des Raumes R_n , so besitzen die Gleichungen

$$(78) \quad \psi(\eta, \bar{y}) = 0, \quad \psi(\eta, \bar{\eta}) = 0$$

gemeinsame Lösungen η , sobald $q > 1$ ist. Wird nämlich eine der Variablen η mittels der ersten Gleichung (78) ausgedrückt als lineare Funktion der n übrigen Variablen η und alsdann in die Form $\psi(y, \bar{y})$ substituiert, so geht diese in eine Hermitesche Form von n Variablenpaaren über, deren Charakteristik wenigstens gleich $q - 1$ ist, wie man in der in Nr. 29 angegebenen Weise bestätigt. Weil nun diese Form für $q > 1$ stets Nullpunkte hat, ist damit die obige Behauptung bewiesen.

Es bleibt daher nur der Fall $q = 1$ zurück.

§ 8.

Hyperfuchssche Gruppen.

33. Unter den hyperfuchsschen Gruppen versteht man nach PICARD die diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen, welche eine Hermitesche Form der Charakteristik 1, d. h. des Typus

$$(79) \quad \psi(y, \bar{y}) = y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1}$$

in sich selbst überführen. Die Gleichung

$$(80) \quad \psi(y, \bar{y}) = 0$$

kann man als die Gleichung einer $(2n-1)$ -dimensionalen Hypersphäre auffassen.

In dem niedrigsten Falle $n = 1$ stellt (80) den Einheitskreis in der Ebene der homogenen Variablen y_1, y_2 dar. Die Hauptkreisgruppen oder fuchssche Gruppen können somit als das einfachste Beispiel der hyperfuchsschen Gruppen angesehen werden.

Der Normalbereich von (79), d. h. der Ort derjenigen Punkte, die keiner der Tangentenhyperebenen der Mannigfaltigkeit (80) angehören, besteht für $n > 1$ aus dem Innern

$$(81) \quad \psi(y, \bar{y}) < 0$$

der Hypersphäre (80), für $n = 1$ aus

$$(82) \quad \psi(y, \bar{y}) \neq 0,$$

d. h. der Gesamtheit der Punkte, die der Kreislinie

$$(83) \quad y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2 = 0$$

nicht angehören. Es gilt daher der

Satz 19. *Jede Gruppe ohne infinitesimale Substitutionen, deren lineare Substitutionen die quadratische Mannigfaltigkeit (80) in sich überführen, ist im Bereich (81) bzw. (82) normal diskontinuierlich.*

Dieser Satz ist für $n = 1$ zuerst von POINCARÉ, für $n = 2$ von PICARD und für ein beliebiges n von FUBINI bewiesen worden.

Die in Nr. 30 betrachteten Gruppen reeller Substitutionen subsumieren sich hier als Spezialfall. Denn jede reelle Substitution, welche die Form (79) in sich selbst transformiert, behält auch die Form (55) invariant.

Es gibt Gruppen, deren Normalbereich mit dem Normalbereich der Form (79) wirklich identisch ist und welche eine Verallgemeinerung der Grenzkreis-

gruppen bei einer Variablen bilden. Dies findet statt, wenn die Häufungspunkte der Transformaten der im Innern von (80) liegenden Punkte, welche mit der Mannigfaltigkeit (M) der ersten Elemente der Normalfolgen identisch sind, auf der Hypersphäre (80) überall dicht liegen. Die einfachsten hierhergehörigen Beispiele hat man in den Gruppen aller linearen Substitutionen mit ganzzahligen komplexen Koeffizienten, die eine Form der Charakteristik Eins mit ganzen komplexen Koeffizienten in sich selbst transformieren.

Es gibt aber auch Gruppen, die ihre normale Diskontinuität auch in gewissen außerhalb der Hypersphäre gelegenen Teilen des Raumes R_n bewahren und die den Hauptkreisgruppen ohne Grenzkreis analog sind. Ein solches Beispiel findet man bei POINCARÉ [26]. Dieses Beispiel unterscheidet sich von dem S. 254 betrachteten Beispiel nur dadurch, daß man statt der reellen Hypersphäre (56) das $(2n-1)$ -dimensionale Gebilde (80) und statt der reellen Hyperebenen (66) quadratische Mannigfaltigkeiten hat, deren Gleichung durch Nullsetzen einer Hermiteschen Form der Charakteristik Eins erhalten wird. Die Punkte (M) liegen auf (80) diskret, und der Normalbereich der Gruppe besteht aus der Gesamtheit der Punkte des Raumes R_n , die keiner durch die Punkte (M) gehenden Tangentenhyperebenen von (80) angehören.

§ 9.

Gruppen ohne invariante Gebilde.

34. Die vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf diskontinuierliche Gruppen, deren Substitutionen eine gemeinsame invariante Mannigfaltigkeit haben. Man kann jedoch auch Beispiele von normal diskontinuierlichen Gruppen geben, die keine solchen Invarianten haben und die als eine Verallgemeinerung der Gruppen ohne Hauptkreis angesehen werden können.

Es seien

$$(84) \quad T_i(y) = \sum_{x=1}^{n+1} \alpha_{ix} y_x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

Hyperebenen, die keinen gemeinsamen Punkt haben. Wir bilden das Gleichungssystem

$$(85) \quad T_i(y') = \omega_i T_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

wo etwa

$$(86) \quad |\omega_1| < |\omega_2| < \dots < |\omega_{n+1}|$$

ist. Die Gleichungen (85) definieren eine lineare Substitution, welche das von den Hyperebenen (84) gebildete Polyeder zum Fundamentalpolyeder hat.

Die positiven Potenzen von (85) bilden unter den Voraussetzungen (86) eine Normalfolge mit den Elementen

$$(87) \quad M_0 : T_1 = T_2 = \dots = T_n = 0; \quad \bar{M}_{n-1} : T_{n+1} = 0,$$

die negativen Potenzen eine ähnliche Normalfolge mit den Elementen

$$(88) \quad M'_0 : T_2 = T_3 = \dots = T_{n-1} = 0; \quad \bar{M}'_{n-1} : T_1 = 0.$$

Die von (85) erzeugte Gruppe ist daher normal diskontinuierlich außerhalb der Hyperebenen

$$(89) \quad T_1 = 0, \quad T_{n+1} = 0.$$

Sie besitzt keine algebraischen invarianten Gebilde, vorausgesetzt, daß die Multiplikatoren ω keiner Gleichung der Form

$$(90) \quad \omega_1^{\lambda_1} \omega_2^{\lambda_2} \dots \omega_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 1$$

genügen, wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ ganze Zahlen bezeichnen.

35. Um allgemeinere Beispiele zu erhalten, werden wir eine elementare geometrische Hilfsbetrachtung vorausschicken.

Es seien u und v zwei endliche Bereiche der komplexen z -Ebene, von denen der letztere als Ganzes im Innern des ersteren liegt. Ferner seien u' und v' ihre endlichen Bildbereiche vermittels einer linearen Substitution S :

$$(91) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Wird allgemein mit $\mathcal{A}(a)$ der größte Abstand zwischen zwei Randpunkten des Bereichs a und mit $\mathcal{A}(ab)$ der kleinste Abstand zwischen den Berandungen der Bereiche a und b bezeichnet, so hat man die Ungleichung

$$(92) \quad \frac{\mathcal{A}(u')}{\mathcal{A}(v')} < \frac{1}{1 + 2 \frac{\{\mathcal{A}(uv)\}^2}{\mathcal{A}(u)\mathcal{A}(v)}} < 1,$$

wo mitten eine von der Substitution S unabhängige Größe vorkommt.

Es seien nämlich z'_1 und z'_2 zwei Punkte des Randes von v' , deren Abstand gleich dem Maximum $\mathcal{A}(v')$ ist. Ferner seien z'_3 und z'_4 die in der Richtung $z'_1 z'_2$ gerechneten Schnittpunkte der Geraden $z'_1 z'_2$ mit dem Rand von u' . Es sei allgemein $z_i = S^{-1}(z'_i)$. Dann ist offenbar $|z_1 - z_2| \geq \mathcal{A}(uv)$, $|z_1 - z_2| \leq \mathcal{A}(v)$, und ferner

ist $\left| \frac{z_2 + \frac{\delta}{\gamma}}{z_3 + \frac{\delta}{\gamma}} \right| > \frac{\Delta(uv)}{\Delta(u)}$, weil der Punkt $S^{-1}(\infty) = -\frac{\delta}{\gamma}$ wegen der Endlichkeit des Bereichs u' außerhalb von u liegt. Aus dem obigen folgt die Ungleichung

$$(93) \quad \left| \frac{z'_1 - z'_3}{z'_1 - z'_2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right| \left| \frac{z_2 + \frac{\delta}{\gamma}}{z_3 + \frac{\delta}{\gamma}} \right| > \frac{\{\Delta(uv)\}^2}{\Delta(u)\Delta(v)}.$$

In derselben Weise erhält man die Ungleichung

$$(93') \quad \left| \frac{z'_3 - z'_4}{z'_1 - z'_2} \right| = \left| \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_2} \right| \left| \frac{z_4 + \frac{\delta}{\gamma}}{z_1 + \frac{\delta}{\gamma}} \right| > \frac{\{\Delta(uv)\}^2}{\Delta(u)\Delta(v)}.$$

Wegen

$$\Delta(v') = |z'_1 - z'_2|; \quad \Delta(u') \geq \Delta(v') + |z'_1 - z'_3| + |z'_3 - z'_4|$$

ergibt sich aus (93) und (93')

$$\frac{\Delta(u')}{\Delta(v')} > 1 + 2 \frac{\{\Delta(uv)\}^2}{\Delta(u)\Delta(v)},$$

woraus schließlich die Ungleichung (92) erhalten wird.

Das obige Resultat kann unmittelbar auf einen Raum R_n beliebiger Dimension übertragen werden.

Es seien nämlich U und V $2n$ -dimensionale endliche Bereiche in R_n , von denen der letztere als Ganzes im Innern des ersteren liegt, und es seien U' und V' die endlichen Transformaten jener Bereiche mittels einer linearen Substitution S , deren Fluchthyperebene also außerhalb U liegen soll. Wir wählen auf dem Rand von V' zwei Punkte P_1 und P_2 , deren gegenseitiger Abstand gleich dem Maximum $\Delta(V')$ ist. Diese Punkte bestimmen eine L_1 , die wir mit λ' bezeichnen, und deren Schnitte mit U' und V' zweidimensionale Bereiche u' und v' seien. Es seien u , v und λ die Transformaten von u' , v' und λ' mittels S^{-1} . Zwischen den Mannigfaltigkeiten λ und λ' , die wir als Träger ihrer reellen und komplexen Punkte als Gaußische Ebenen betrachten, wird dann durch S eine Projektivität vermittelt, die wir analytisch durch eine lineare Substitution (91) darstellen können, wenn wir λ und λ' durch euklidische Bewegungen mit einem Paar Koordinatenachsen zusammenfallen lassen. Für die oben genannten Schnitt-

bereiche gilt dann die Ungleichung (92). Weil offenbar

$$\mathcal{A}(V') = \mathcal{A}(v'), \quad \mathcal{A}(U') \geq \mathcal{A}(u'), \quad \mathcal{A}(UV) \leq \mathcal{A}(uv)$$

ist, erhält man daraus

$$(94) \quad \frac{\mathcal{A}(V')}{\mathcal{A}(U')} < \frac{1}{1 + 2 \frac{\{\mathcal{A}(UV)\}^2}{\mathcal{A}(U) \mathcal{A}(V)}} < 1,$$

d. h. die (92) entsprechende Ungleichung für Bereiche beliebiger Dimensionen.

36. Wir gehen jetzt von einer endlichen Anzahl Polyeder aus, deren Seitenhyperebenen die Gleichungen

$$(95) \quad T_i^{(\kappa)}(y) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n+1 \\ \kappa = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}$$

haben und denen wir je eine Substitution S_κ mit dem Ausdruck

$$(95') \quad T_i^{(\kappa)}(y') = \omega_i^{(\kappa)} T_i^{(\kappa)}(y)$$

zuordnen, wobei die Ungleichungen (86) für jede der Substitutionen S_κ gelten sollen. Wir werden dann die Polyeder nur der einzigen Bedingung unterwerfen, daß allgemein die Eckpunkte $M_0^{(\kappa)}$ und $M'_0{}^{(\kappa)}$ des k -ten Polyeders, die den Punkten M_0 und M'_0 in (87) und (88) entsprechen, außerhalb der zu $\bar{M}_{n-1}$ und $\bar{M}'_{n-1}$ analogen Seitenhyperebenen $\bar{M}_{n-1}^{(\kappa)}$ und $\bar{M}'_{n-1}{}^{(\kappa)}$ der $p-1$ übrigen Polyeder gelegen sind. Es läßt sich dann nachweisen, daß bei hinreichend kleinen Werten der Verhältnisse

$$(96) \quad |\omega_1^{(\kappa)}| : |\omega_2^{(\kappa)}| : \dots : |\omega_{n+1}^{(\kappa)}| \quad (\kappa = 1, 2, \dots, p)$$

die von den Substitutionen (95') erzeugte Gruppe normal diskontinuierlich ist.

Wir konstruieren, um dies nachzuweisen, allgemein um die Punkte $M_0^{(\kappa)}$ und $M'_0{}^{(\kappa)}$ kleine Hypersphären H_κ und H'_κ , die vollständig außerhalb einander liegen und die keine der $2p$ Hyperebenen $\bar{M}_{n-1}^{(\nu)}$ und $\bar{M}'_{n-1}{}^{(\nu)}$ schneiden, von der Hyperebene $\bar{M}_{n-1}^{(\kappa)}$ bzw. $\bar{M}'_{n-1}{}^{(\kappa)}$ abgesehen, denen ihre Mittelpunkte angehören. Weil bei unbegrenzter Iteration der Substitutionen S_κ bzw. S_κ^{-1} die Punkte in jeder abgeschlossenen Mannigfaltigkeit, die keinen Punkt der Hyperebene $\bar{M}_{n-1}^{(\kappa)}$ bzw. $\bar{M}'_{n-1}{}^{(\kappa)}$ enthält, gleichmäßig gegen den Punkt $M_0^{(\kappa)}$ bzw. $M'_0{}^{(\kappa)}$ konvergieren, kann man ersichtlich die Quotienten (96) der Multiplikatoren so klein wählen, daß die Transformaten sämtlicher Hypersphären H_i , H'_i ($i = 1, 2, \dots, p$) mittels S_κ bzw. S_κ^{-1} , von der Hypersphäre H'_κ bzw. H_κ abgesehen, im Innern von H_κ bzw. H'_κ liegen werden.

Es sei nun

$$(97) \quad S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

eine beliebige unendliche Folge von Substitutionen, wo

$$(98) \quad S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_\nu}, \dots$$

die Substitutionen (95') oder ihre inverse Substitutionen bezeichnen. Wir schreiben vorläufig S_{i+p} statt S_i^{-1} und H_{i+p} statt H_i , wo die Indices modulo p zu nehmen sind. Durch S_{i_1} werden alle Hypersphären H_x , von H_{x+p} abgesehen, in das Innere von H_{i_1} überführt, wobei sie in gewisse geschlossene quadratische Mannigfaltigkeiten übergehen. Durch die folgende Substitution S_{i_2} , die von der inversen Substitution S_{i_1+p} von S_{i_1} verschieden ist, wird H_{i_1} auf eine innerhalb der Hypersphäre H_{i_2} gelegene geschlossene Mannigfaltigkeit $H_{i_1} S_{i_2}$ abgebildet, die in ihrem Innern die Transformierte $H_x S_{i_1} S_{i_2}$ von H_x mittels $S_{i_1} S_{i_2}$ enthält. Indem man so fortfährt, wird man finden, daß die Transformierte von H_x mittels (97) im Innern von ν ineinander geschalteten Bereichen gelegen ist, die von außen nach innen gerechnet

$$(99) \quad H_{i_\nu}, H_{i_{\nu-1}} S_{i_\nu}, H_{i_{\nu-2}} S_{i_{\nu-1}} S_{i_\nu}, \dots, H_{i_1} S_{i_2} S_{i_3} \dots S_{i_\nu}$$

sind.

Wir behaupten, daß die Dimensionen der Bereiche in der Reihe (99) für $\nu \rightarrow \infty$ gegen Null abnehmen.

Wir betrachten zu diesem Zweck irgend zwei aufeinander folgende Bereiche der Reihe, etwa

$$(100) \quad \begin{aligned} U' &= H_{i_\mu} S_{i_{\mu+1}} S_{i_{\mu+2}} \dots S_{i_\nu} \\ V' &= H_{i_{\mu-1}} S_{i_\mu} S_{i_{\mu+1}} \dots S_{i_\nu}. \end{aligned}$$

Diese endlichen Bereiche werden aus den Bereichen

$$(101) \quad H_{i_\mu}, H_{i_{\mu-1}} S_{i_\mu},$$

von denen der letztere im Innern des ersten liegt, mittels einer und derselben Substitution, nämlich $S = S_{i_{\mu+1}} S_{i_{\mu+2}} \dots S_{i_\nu}$, erhalten. Wir können also auf den vorliegenden Fall die Resultate der Nr. 35 anwenden. Es sei q die größte unter den Zahlen in den rechten Seiten von (94), die erhalten werden, wenn man U und V auf alle möglichen Weisen durch (101) ersetzt, und es sei d der Durchmesser der größten Hypersphäre H . Aus (94) ergibt sich dann für das Maximum der Entfernung zweier Randpunkte des Bereichs U' in (100) die Un-

gleichung

$$\Delta(U') < dq^{r-\mu}$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht.

37. Nach dem Vorhergehenden kann man eine Teilfolge der beliebig gegebenen Folge (97) finden derart, daß die zugeordneten Transformaten der Punkte jeder Hypersphäre H_x ($x \neq i, +p$) gegen einen und denselben Punkt π konvergieren. Wegen des Satzes 2 kann man daraus schließen, daß die betreffende Folge oder eine geeignete Teilfolge derselben eine Normalfolge ersten Ranges ist, welche den Punkt π zum ersten Element hat.

Wir haben also das Resultat gewonnen, daß sämtliche Normalfolgen der Gruppe von Rang Eins sind, deren erste Elemente in den Hypersphären $H_1, H_2, \dots, H_p$ liegen. Indem man die korrelativen Substitutionen betrachtet, kann man schließen, daß die Hyperebenen, die die zweiten Elemente der Normalfolgen bilden, von den Hyperebenen $\bar{M}_{n-1}^{(x)}$ und $\bar{M}_{n-1}'^{(x)}$ um so weniger abweichen, je kleiner die Verhältnisse (96) gewählt werden.

Sowohl die Punkte (M) als die Hyperebenen ($\bar{M}$) liegen diskret. Der Normalbereich der Gruppe wird einen beliebig vorgeschriebenen abgeschlossenen Bereich des Raumes enthalten, der keine Punkte der Hyperebenen $\bar{M}_{n-1}^{(x)}, \bar{M}_{n-1}'^{(x)}$ ($x = 1, 2, \dots, p$) enthält, wenn die Verhältnisse (96) der Multiplikatoren hinreichend klein gewählt werden.

Die obigen Gruppen sind die ersten allgemeinen Beispiele von normal diskontinuierlichen Gruppen mehrerer Variablen, die keine invarianten algebraischen Gebilde besitzen.

Wir wollen die Untersuchung der Kollineationsgruppen hier abschließen, um die obigen Betrachtungen für eine Klasse von Gruppen zu verallgemeinern, welche die Kollineationsgruppen als einfachsten Spezialfall enthalten. Wegen der Ausführlichkeit, mit welcher wir im Vorhergehenden die Kollineationsgruppen behandelt haben, können unsere Betrachtungen bei den allgemeineren Gruppen in größter Kürze ausgeführt werden.

III. Cremonagruppen.

§ 10.

Die endlichen kontinuierlichen Cremonagruppen.

38. Die Kollineationsgruppen bilden für $n > 1$ den einfachsten Fall einer allgemeinen Klasse von Gruppen umkehrbar eindeutiger Transformationen, auf welche die Resultate der vorigen Kapitel unmittelbar angewandt werden können. Es sind dies die Cremonagruppen, deren Substitutionen von beschränkter Ordnung sind.

Unter *Cremonatransformationen* verstehen wir die umkehrbar rationalen Transformationen. In homogenen Punktkoordinaten kann man diese Transformationen in der Form

$$(102) \quad \varphi y'_i = F_i(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

darstellen, wo F_i ganze rationale homogene Funktionen einer und derselben Ordnung und φ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Die Gesamtheit der Cremonatransformationen (102) des Raumes R_n bildet eine Gruppe, die von unendlich vielen Parametern abhängt und die Transformationen beliebig hoher Ordnung enthält. Diese Gruppe enthält als Untergruppe für jedes n eine Anzahl *endlicher kontinuierlicher Cremonagruppen*, d. i. Gruppen mit einer endlichen Anzahl unbestimmter Parameter, deren Substitutionen Cremonatransformationen beschränkter Ordnung sind. Diese Gruppen besitzen die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sie eine *projektive Abbildung* gestatten. Es gibt m. a. W. bei jeder endlichen kontinuierlichen Cremona-Gruppe ein lineares System algebraischer Mannigfaltigkeiten

$$(103) \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_i(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0 \quad (d \geq n),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}$ unbestimmte Parameter und $g_1, g_2, \dots, g_{d+1}$ linear unabhängige homogene ganze rationale Funktionen bezeichnen, welches bei allen Operationen der Gruppe in sich selbst übergeht und welches dazu *einfach*, d. h. so beschaffen ist, daß die Mannigfaltigkeiten des Systems, die einen Punkt allgemeiner Lage enthalten, nicht alle durch einen weiteren, mit dem ersten veränderlichen Punkt hindurchgehen FANO [5; S. 340]. Durch die Gleichungen

$$(104) \quad z_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, d+1)$$

wird der Cremonaraum R_n auf ein im Raume R_d der Variablen x gelegenes rationales Gebilde I im allgemeinen umkehrbar eindeutig abgebildet, indem eine Mehrdeutigkeit nur in dem *Fundamentalgebilde* von R_n stattfinden kann, d. h. in der Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte (y), für welche sämtliche Determinanten $(n+1)$ -ter Ordnung der Matrix

$$(105) \quad \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_x} \right\| \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, d+1 \\ x = 1, 2, \dots, n+1 \end{pmatrix}$$

verschwinden. Die vorgelegte Cremonagruppe geht dabei in eine projektive Gruppe des Raumes R_d über, deren Substitutionen das Gebilde I invariant lassen. Die Geometrie der Cremonagruppe bekommt dadurch eine Interpretation als projektive Geometrie auf dem im Raume R_d gelegenen invarianten Gebilde I .

Spezielle Fälle der projektiven Abbildung hat man in der stereographischen Projektion linearer Räume auf quadratische Mannigfaltigkeiten. Vermittels einer solchen Projektion gelangt man z. B. von den ebenen Kreisverwandtschaften zu Raumkollineationen mit einer invarianten Kugel und zur Begründung der Gruppentheorie der automorphen Funktionen einer Variablen mit Hilfe der nichteuclidischen Geometrie.

39. Es sei nun τ eine unendliche Folge von Substitutionen der vorgelegten Cremonagruppe, der vermöge (104) eine Normalfolge σ vom Rang $q \leq d$ der projektiven Substitutionen zugeordnet wird. Wir behaupten, daß die beiden Elemente M_{q-1} und $\bar{M}_{d-q}$ von σ mit I gemeinsame Punkte haben.

Wenn nämlich I mit $\bar{M}_{d-q}$ keine gemeinsamen Punkte hätte, so würden die Punkte von I bei Ausführung der Substitutionen von σ nach Satz 2 gleichmäßig gegen das erste Element M_{q-1} konvergieren. Da nun I mit seinen sämtlichen Transformaten identisch ist, müßte es als Ganzes der linearen Mannigfaltigkeit M_{q-1} angehören, was der Annahme, daß die Funktionen (104) linear unabhängig sind, widerspricht. Aus gleichem Grunde kann I nicht als Ganzes dem Element $\bar{M}_{d-q}$ angehören. Da die dem Element $\bar{M}_{d-q}$ nicht zugehörigen Punkte von I bei Ausführung der Substitutionen von σ gegen M_{q-1} konvergieren, muß I auch mit M_{q-1} gemeinsame Punkte haben.

Mithin existieren die Schnitte von I mit M_{q-1} und $\bar{M}_{d-q}$. Ihnen entsprechen vermöge (104) im Raum R_n algebraische Gebilde N_μ bzw. $\bar{N}_\nu$, die wir erstes bzw. zweites Element der Folge τ nennen. Diese Folge selbst soll als Normalfolge bezeichnet werden.

§ 11.

Bildung normal diskontinuierlicher Cremonagruppen.

40. Es sei jetzt G eine Cremona-Gruppe der oben betrachteten Art, die keine infinitesimale Substitution enthält. Wir sagen, daß G normal diskontinuierlich ist, wenn die abgeschlossene Mannigfaltigkeit $(\bar{N})$ der zweiten Elemente der Normalfolgen von G nicht die Gesamtheit der Punkte des Raumes R_n enthält. Die aus der Gesamtheit der außerhalb von $(\bar{N})$ gelegenen Punkte gebildete Menge soll als *Normalbereich der Gruppe G* bezeichnet werden.

Es sei B der Normalbereich von G und B' sein auf I gelegener Bildbereich vermöge (104). Wegen der obigen Definitionen enthält die abgeschlossene Menge $(\bar{M})$ der zweiten Elemente der Normalfolgen der zur Gruppe G vermöge der projektiven Abbildung gehörigen projektiven Gruppe Γ keinen inneren Punkt von B' . Daraus geht hervor, daß die Gruppe Γ im Bereich B' und daher in einem $2d$ -dimensionalen, den Bereich B' enthaltenden Bereich B'_0 des Raumes R_d normal diskontinuierlich ist.

Zur Bildung normal diskontinuierlicher Cremonagruppen wollen wir die in Nr. 23 formulierte Bedingung (A) auf die Cremonagruppen übertragen.

Definition: Wir sagen, daß der Bereich D des Cremonaraumes R_n der Bedingung (A) genügt, wenn es in dem zugeordneten projektiven Raum ein System von Hyperflächen gibt, die keinen inneren Punkt des auf I gelegenen Bildbereichs Δ von D enthalten, und die keinen auf I gelegenen Punkt gemeinsam haben.

Satz 20. Jede Gruppe G von Cremonasubstitutionen, die einen der Bedingung (A) genügenden Bereich D in sich selbst transformieren, ist in diesem Bereich normal diskontinuierlich, sobald es keine infinitesimale Substitutionen gibt.

Zum Beweis stellen wir das Gebilde I als Schnitt von Hyperflächen

$$(106) \quad \varphi_\nu(z_1, z_2, \dots, z_{d+1}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

dar, die keinen nicht zu I gehörigen gemeinsamen Punkt haben. Es sei

$$(107) \quad H_\mu(z_1, z_2, \dots, z_{d+1}) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, q)$$

das in der Bedingung (A) vorausgesetzte System von Hyperflächen. Ferner sei σ eine beliebige Normalfolge der zu G gehörigen projektiven Gruppe Γ mit den Elementen M und $\bar{M}$. Es seien

$$(107') \quad H_{\mu_1} = 0, \quad H_{\mu_2} = 0, \quad \dots, \quad H_{\mu_n} = 0$$

diejenigen unter den Hyperflächen (107), die den Schnitt von I und M nicht als

Ganzes enthalten. Diese Hyperflächen bilden zusammen mit den Hyperflächen

$$(106') \quad H + \varphi_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, p),$$

wo H irgend eine der Funktionen $H_{\mu_1}, \dots, H_{\mu_n}$ bezeichnet, ein System (Σ) von Hyperflächen, die keinen gemeinsamen Punkt auf M besitzen und von denen keine das Element M als Ganzes enthält.

Wir bilden jetzt die Transformaten der Hyperflächen des Systems (Σ) mittels der inversen Substitutionen von σ . Weil die genannten Hyperflächen das Element M nicht als Ganzes enthalten, konvergieren ihre Transformaten nach Satz 5 gegen zylindrische Mannigfaltigkeiten, die das Element $\bar{M}$ enthalten. Nach demselben Satz haben die erhaltenen Häufungsgebilde keine gemeinsamen Punkte außerhalb des Elementes $\bar{M}$, weil die Hyperflächen (Σ) keinen gemeinsamen auf M gelegenen Punkt hatten.

Weil nun I nicht als Ganzes in $\bar{M}$ enthalten ist, so hat wenigstens eine der Hyperflächen von (Σ) , wir nennen sie Σ_0 , die Eigenschaft, daß ihr Häufungsgebilde Σ'_0 das Gebilde I nicht als Ganzes enthält. Da ferner der Bereich $\mathcal{A}$ durch jede Substitution von Γ in sich selbst transformiert wird, so enthält jede Transformierte von Σ_0 , wie diese Hyperfläche selbst, keinen inneren Punkt von $\mathcal{A}$. Dies muß dann auch mit dem Häufungsgebilde Σ'_0 der Fall sein. Weil dieses Gebilde das Element $\bar{M}$ als Ganzes enthält, gehört somit der Bereich $\mathcal{A}$ dem Normalbereich der Folge σ an. Damit ist bewiesen, daß die Gruppe Γ im Bereich $\mathcal{A}$ und folglich die Gruppe G im Bereich D normal diskontinuierlich ist, w. z. b. w.

Die Bedingung (A) ist offenbar insbesondere dann erfüllt, wenn es im Raume R_d eine Hyperfläche gibt, die keinen inneren oder Randpunkt von $\mathcal{A}$ enthält, was z. B. dann der Fall ist, wenn $\mathcal{A}$ endlich ist.

§ 12.

Cremonagruppen mit einem endlichen invarianten Raum.

41. Die einfachste und wichtigste Anwendung des Satzes 20 bieten uns die Gruppen G , deren Substitutionen einen endlichen Bereich D des Cremonaraumes in sich selbst überführen.

Wir bezeichnen mit (A_{n-1}) die Gesamtheit der Hyperflächen des Cremonaraumes, die keinen inneren Punkt des invarianten Bereichs D enthalten. Die denselben vermöge (104) zugeordneten Gebilde (A'_{n-1}) auf I enthalten dann keinen inneren Punkt des auf I liegenden Bildbereichs $\mathcal{A}$ von D . Es sind dann zwei Fälle möglich. Entweder gibt es keinen allen Gebilden (A'_{n-1}) gemeinsamen Punkt

auf I , oder gibt es wenigstens einen Punkt, der jedem der Gebilde (A'_{n-1}) angehört.

Im ersten Falle ist die Bedingung (A) offenbar erfüllt. Nach Satz 20 ist dann jede Cremonagruppe mit dem invarianten Bereich D in diesem Bereich normal diskontinuierlich, sobald es keine infinitesimale Substitution gibt.

Wenn dagegen alle Gebilde (A'_{n-1}) einen gemeinsamen Punkt oder allgemeiner eine gemeinsame A_μ ($\mu \leq n-2$) besitzen, bleibt die normale Diskontinuität von G zweifelhaft. In diesem Falle muß offenbar A_μ durch jede Substitution der projektiven Gruppe in sich selbst übergehen. Daraus geht hervor, daß es sich in diesem zweiten Falle um Gruppen sehr spezieller Art handelt.

Wir haben daher den

Satz 21. *Eine Gruppe von Cremonasubstitutionen, die einen endlichen Bereich in sich selbst transformieren, ist in diesem Bereich im allgemeinen normal diskontinuierlich, wenn keine infinitesimalen Substitutionen vorhanden sind.*

42. Wir wollen zum Vorhergehenden folgenden Satz hinzufügen, der in wichtigen Fällen zum Beweis der normalen Diskontinuität angewandt werden kann, ohne daß von der projektiven Gruppe Gebrauch gemacht wird.

Satz 22. *Jede Gruppe von Cremonasubstitutionen, die einen endlichen Bereich D in sich selbst überführen, der keinen zum Fundamentalgebilde des Cremonaraumes gehörigen Punkt im Innern oder auf der Berandung hat, ist in D normal diskontinuierlich, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält.*

Es sei A_{n-1} eine beliebige Hyperfläche, die ganz außerhalb des Bereiches D liegt. Weil die Berandung von D keinen Punkt des Fundamentalgebildes von R_n enthält, wird die Transformierte von A_{n-1} mittels (104) mit der Berandung der Transformierten $\mathcal{A}$ von D keinen gemeinsamen Punkt haben. Nach No. 41 genügt D der Bedingung (A), woraus nach Satz 21 der zu beweisende Satz folgt.

43. Die Cremonagruppen mit einem endlichen invarianten Raum bilden Gegenstand der Untersuchung von GIRAUD [7]. Unter gewissen Bedingungen beweist Giraud den Satz, daß jede Cremonagruppe endlicher Ordnung, die einen endlichen invarianten Bereich D besitzt, in diesem Bereich eigentlich diskontinuierlich ist, sobald sie es in einem einzigen Punkt von D ist, d. h. wenn es einen Punkt gibt, dessen Transformierte diesen Punkt nicht zur Häufungsstelle haben.

Offenbar folgt aus der letztgenannten Bedingung, daß keine infinitesimalen Substitutionen existieren. Denn würde die Folge S_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) gegen die Identität konvergieren, so hätten die Punkte $S_\nu(P)$, wo P ein beliebiger Punkt ist, diesen Punkt zur Häufungsstelle. Dagegen ist bekanntlich die Giraudsche Be-

dingung keineswegs eine Folge davon, daß die Gruppe von infinitesimalen Substitutionen frei ist.

Die Ergebnisse der No. 41 enthalten eine möglichst weitgehende Vereinfachung der von GIRAUD hergeleiteten Sätze, indem nach Satz 21 das Fehlen infinitesimaler Substitutionen allein zur normalen Diskontinuität einer Gruppe von Cremonasubstitutionen beschränkter Ordnung im allgemeinen hinreichend ist, wenn die Gruppe einen endlichen invarianten Bereich besitzt.

§ 13.

Hyperabelsche Gruppen und gewisse Verallgemeinerungen derselben.

44. Die wichtigsten Beispiele von diskontinuierlichen Gruppen nichtlinearer Substitutionen, die einen invarianten Raum oben betrachteter Art haben, bilden die von PICARD [23] eingeführten hyperabelschen Gruppen und gewisse Verallgemeinerungen dieser Gruppen.

Wir betrachten zuerst die Gruppen reeller Substitutionen der Form

$$(108) \quad x'_i = \frac{\alpha_i x_i + \beta_i}{\gamma_i x_i + \delta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo

$$D_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix} > 0$$

ist, welche Gruppen für $n = 2$ gerade mit den von PICARD untersuchten hyperabelschen Gruppen zusammenfallen. Diese Substitutionen lassen den Raum

$$(109) \quad I(x_1) > 0, I(x_2) > 0, \dots, I(x_n) > 0$$

invariant¹. Durch eine einfache Transformation wird dieser Bereich in den endlichen Bereich

$$|\xi_1| < 1, |\xi_2| < 1, \dots, |\xi_n| < 1$$

übergeführt.

Die normale Diskontinuität der obigen Gruppen läßt sich am leichtesten dadurch untersuchen, daß wir dieselben in Verbindung mit dem Satz 22 setzen.

Wir bemerken zu diesem Zweck, daß die projektive Abbildung im vorliegenden Falle durch das Gleichungssystem

$$z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} = y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0, 1 \\ \lambda_{n+1} = 0, 1, 2, \dots, n+1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = n+1 \end{array} \right\}$$

¹ Hier und im Folgenden bezeichnet $I(x)$ den imaginären Teil von x .

dargestellt wird, wo $x_* = y_* : y_{n+1}$ gesetzt ist. Indem man die Funktionaldeterminante des Systems

$$g_\nu = y_\nu y_{n+1}^\nu, \quad g_{n+1} = y_{n+1}^{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

bildet, findet man, daß das Fundamentalgebilde des Cremonaraumes mit der unendlich fernen Hyperebene $y_{n+1} = 0$ zusammenfällt. Weil demnach die Bedingung des Satzes 22 erfüllt ist, muß jede Gruppe der reellen Substitutionen (108) im Bereich (109) normal diskontinuierlich sein, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält. Offenbar gilt dasselbe für jeden der 2^n Bereiche, die aus (109) durch Umkehrung der Ungleichheit in allen möglichen Weisen erhalten werden. Wir haben daher den

Satz 23. *Jede Gruppe der reellen Substitutionen (108), die keine infinitesimale Substitution enthält, ist in dem 2^n -teiligen Bereiche*

$$(110) \quad I(x_1) \cdot I(x_2) \dots I(x_n) \neq 0$$

normal diskontinuierlich.

45. Das bekannteste Beispiel der obigen Gruppen bilden die von BLUMENTHAL [2] eingeführten höheren Modulgruppen. Es handelt sich um die Gruppen der Substitutionen (108), deren Koeffizienten die konjugierten ganzen Zahlen in konjugierten reellen algebraischen Zahlkörpern durchlaufen, wobei die Determinanten D_i stets ein System konjugierter Einheiten bezeichnen. Wir behaupten, daß in diesem Falle der Normalbereich der Gruppe mit dem Bereich (110) wirklich zusammenfällt.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Gruppe aller Substitutionen

$$(108') \quad x'_i = \frac{\alpha x_i + \beta}{\gamma x_i + \delta} \quad \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right| = 1,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rationale ganze Zahlen sind, welche Gruppe eine Untergruppe der oben definierten Modulgruppe ist. Es sei τ irgend eine Folge von Substitutionen, für welche die Grenzwerte

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\beta}{\delta} = t; \quad \lim -\frac{\delta}{\gamma} = \lim -\frac{\beta}{\alpha} = t'$$

existieren. Offenbar ist dann τ eine Normalfolge ersten Ranges mit den Elementen

$$\begin{aligned} N_0 &: x_1 = x_2 = \dots = x_n = t, \\ \bar{N}_{n-1} &: (x_1 - t')(x_2 - t') \dots (x_n - t') = 0, \end{aligned}$$

weil die Transformierten sämtlicher Punkte, die dem Gebilde $\bar{N}_{n-1}$ nicht angehören, mittels τ gegen den Punkt N_0 konvergieren. Weil nun t' alle reellen Werte durchläuft, wenn τ auf alle möglichen Weisen gewählt wird, so gehört jeder Punkt der $(2n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$I(x_1).I(x_2)\dots I(x_n) = 0$$

der Begrenzung des Normalbereichs der Untergruppe mit den Substitutionen (108') und daher auch der Modulgruppe selbst an. Der Normalbereich dieser Gruppe fällt daher mit (110) zusammen, w. z. b. w.

46. Eine zweite Verallgemeinerung der hyperabelschen Gruppen hat GIRAUD [7; S. 66] gegeben.

Er nimmt zum Ausgangspunkt die reellen quadratischen Formen der Charakteristik zwei, die man mittels einer einfachen Transformation in die Form

$$(111) \quad \varphi(x) = x_n x_{n+1} - x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$$

überführen kann. Setzt man

$$x_\kappa : x_{n+1} = y_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n),$$

so gibt

$$(112) \quad y_n = y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_{n-1}^2$$

die Gleichung der quadratischen Mannigfaltigkeit $\varphi(x) = 0$ in nichthomogener Form.

Es sei nun

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

eine lineare reelle Substitution, welche die Form (111) in sich selbst transformiert. Setzt man

$$X_\kappa : X_{n+1} = Y_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n),$$

so hat man das Gleichungssystem

$$(113) \quad Y_i = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

welches eine reelle projektive Substitution definiert, die das Gebilde $\varphi = 0$ invariant läßt. Wird nun vermöge (112) die Variable y_n als Funktion der $n-1$ übrigen Variablen ausgedrückt, so gibt das System der $n-1$ ersten Gleichungen (113) eine quadratische Cremonatransformation C . Diese Transformationen bilden eine Gruppe, die für $n = 3$ mit der hyperabelschen Gruppe identisch ist.

Nun besitzt nach No. 31 die Form (111) einen Normalbereich, d. h. einen Bereich, wo jede Gruppe reeller linearer Substitutionen, die (111) invariant lassen, normal

diskontinuierlich ist, sobald die Gruppe keine infinitesimale Substitution besitzt. Daraus kann man den Schluß ziehen, daß jede Gruppe von Substitutionen C , die keine infinitesimale Substitution enthält, in demjenigen Bereich des Cremonaraumes mit den Koordinaten $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ normal diskontinuierlich ist, welcher dem Schnitt des Normalbereichs von φ und des Gebildes $\varphi = 0$ vermöge der projektiven Abbildung zugeordnet wird. Man findet leicht, daß der fragliche Bereich u. a. den in bezug auf die reellen Substitutionen C invarianten Bereich

$$(114) \quad y_1''^2 - y_2''^2 - y_3''^2 - \dots - y_{n-1}''^2 > 0, \quad y_1'' > 0,$$

wo $y_x = y'_x + i y''_x$ ist, enthält, der durch die Cremonatransformation

$$z_1 = \frac{1}{y_1 + i}, \quad z_x = \frac{1}{y_1 + y_x + i} \quad (x = 1, 2, \dots, n-1)$$

in einen endlichen Bereich transformiert wird.

Einem Beispiel für die obigen Gruppen begegnet man in der Theorie der abelschen Funktionen. Wird nämlich $n = 4$ und werden die Koeffizienten ganzzahlig angenommen, so gelangt man zu Gruppen, die bei den abelschen Funktionen vom Geschlecht zwei im allgemeinen Falle dieselbe Rolle spielen wie die hyperabelschen Gruppen beim Vorhandensein „singulärer Relationen“ zwischen den Perioden.

§ 14.

Gruppen mit festen Häufungsgebilden.

47. Es gibt eine sehr allgemeine Klasse diskontinuierlicher Gruppen, die sowohl in geometrischer als funktionentheoretischer Hinsicht eine größere Analogie mit den Gruppen von Substitutionen einer Variablen aufweisen als die anderen Gruppen. Diese Gruppen sind durch eine ausgezeichnete Eigenschaft charakterisiert, die man als *Festigkeit der Häufungsgebilde* bezeichnen kann. Diese Eigenschaft kommt allen Cremonagruppen G zu, deren zugeordnete projektive Gruppe Γ den folgenden drei Bedingungen genügt.

I. Jede Normalfolge von Γ ist vom Rang Eins.

II. Die Gruppe Γ ist normal diskontinuierlich.

III. Die korrelative Gruppe $\bar{\Gamma}$, d. h. die Gruppe der korrelativen oder reziproken Substitutionen von Γ , ist normal diskontinuierlich.

Im vorliegenden Falle sind die ersten Elemente der Normalfolgen der Gruppen Γ und $\bar{\Gamma}$ Punkte, die zweiten Elemente Hyperebenen. Ferner sind nach No. 18 die ersten Elemente der einen Gruppe und die zweiten Elemente der anderen Gruppe einander korrelativ zugeordnet. Es sei $\bar{B}$ der Normal-

bereich von $\bar{\Gamma}$, welcher nach der allgemeinen Definition aus der Gesamtheit derjenigen Punkte des korrelativen Raumes $\bar{R}_d$ besteht, die keinem der zweiten Elemente der Normalfolgen von $\bar{\Gamma}$ angehören. Weil diese Elemente den ersten Elementen M von Γ korrelativ zugeordnet sind, entsprechen den Punkten von $\bar{B}$ Hyperebenen des Raumes R_d , die kein erstes Element M von Γ enthalten. Die Transformaten dieser Hyperebenen und allgemeiner sämtlicher Hyperflächen, die keinen Punkt der abgeschlossenen Menge (M) enthalten, besitzen aber dann nach Satz 6 als Häufungsgebilde die Hyperebenen (M) , d. h. die zweiten Elemente der Normalfolgen von Γ .

48. Wir gehen jetzt vermöge der Transformation (104) in den Raum R_n der Cremonasubstitutionen über. Jeder der oben genannten Hyperflächen A_{d-1} , die keinen Punkt von M enthält, entspricht eine Hyperfläche A_{n-1} des Raumes R_n , welche die Eigenschaft hat, daß ihre Transformaten vermöge der Substitutionen von G die zur Menge $(\bar{N})$ der zweiten Elemente von G gehörigen Hyperflächen als Häufungsgebilde haben. Bemerkenswert ist, daß diese Häufungsgebilde von der Gruppe G allein, nicht aber von dem Anfangsgebilde abhängen.

Die einfachsten Beispiele von Gruppen der oben betrachteten Art hat man in den Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen, die stets den obigen Bedingungen genügen, wenn sie normal diskontinuierlich sind, weil es in diesem Falle nur Folgen ersten Ranges gibt und weil jede Gruppe mit ihrer korrelativen Gruppe wesentlich identisch ist. Aus gleichem Grunde gehören hierher die hyperfuchsschen Gruppen des § 8 und daher auch die Gruppen reeller Substitutionen der No. 30, sowie die in § 9 betrachteten Kollineationsgruppen ohne invariante Gebilde.

Wir werden im Folgenden Gruppen quadratischer Transformationen betrachten, die zu den Formen (55) in analogem Verhältnis stehen wie die hyperabelschen Gruppen zu den Formen (68).

§ 15.

Gruppen der Hyperkugelverwandtschaften.

49. Wir gehen von der Hypersphäre

$$(115) \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - z_{n+1}^2 = 0$$

aus, deren Punkte wir von dem Punkt $P(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$ aus auf die Hyperebene

$$(116) \quad z_n = 0$$

projizieren. Werden die homogenen Punktkoordinaten im Raume (116) mit

$y_1, y_2, \dots, y_n$ bezeichnet, so kann man die Projektion analytisch durch das Gleichungssystem

$$(117) \quad \begin{aligned} z_\nu &= 2y_\nu y_n, & (\nu = 1, 2, \dots, n-1) \\ z_n &= \sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu^2 - y_n^2, & z_{n+1} = \sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu^2 + y_n^2 \end{aligned}$$

darstellen.

Durch (117) werden den hyperebenen Schnitten von (115) Hyperkugeln des Raumes (116) zugeordnet. Jeder reellen projektiven Transformation, die (115) invariant läßt, entspricht eine quadratische Transformation des Raumes (116), welche die Hyperkugeln dieses Raumes wieder auf ebensolche überführt (Hyperkugelverwandtschaften).

Es sei nun Γ eine diskontinuierliche Gruppe reeller Substitutionen, die (115) in sich selbst transformieren. Wir nehmen an, daß Γ ihre normale Diskontinuität noch in gewissen Teilen der Hypersphäre (115) bewährt, was dann der Fall ist, wenn die ersten Elemente (M_0) der Gruppe auf der reellen Hypersphäre (115) nicht überall dicht liegen. Nach den allgemeinen Definitionen ist dann die Gruppe G der zugeordneten Hyperkugelverwandtschaften im Raum (116) normal diskontinuierlich. Der Normalbereich dieser Gruppe besteht dabei aus der Gesamtheit derjenigen Punkte des Raumes, die keiner der Hyperkegel

$$(118) \quad (y_1 - a_1 y_n)^2 + (y_2 - a_2 y_n)^2 + \dots + (y_{n-1} - a_{n-1} y_n)^2 = 0$$

angehören, die den durch die Punkte $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$ der Menge (M_0) gelegten reellen Tangentenhyperebenen von (115) entsprechen.

50. Ein hierher gehöriges Beispiel hat man in den in No. 30 S. 254 betrachteten Gruppen, deren erzeugende Substitutionen die außerhalb einander liegenden Segmente τ'_i, τ_i in der an fraglicher Stelle näher angegebenen Weise einander paarweise zuordnen. Im vorliegenden Falle liegen die Hyperkegel (118) diskret und der Normalbereich von G enthält die Gesamtheit der Punkte von (116), die Punkte von (118) ausgenommen. Beschränkt man sich auf den reellen Raum (116), so hat man als Transformierte der Segmente τ'_i, τ_i ein System außerhalb einander liegender Hyperkugel, die durch die erzeugenden Substitutionen von G einander derart paarweise zugeordnet sind, daß das Äußere (Innere) der einen dem Inneren (Äußeren) der anderen entspricht.

Im niedrigsten Falle $n = 3$ reduzieren sich die oben betrachteten Transformationen auf die Kreisverwandtschaften. Die obigen Betrachtungen führen dabei zur bekannten Darstellung der Kreisverwandtschaften als hyperbolische Bewegungen.

IV. Das Hesse-Kleinsche Übertragungsprinzip.

§ 16.

Die Relativität der Gruppendiskontinuität.

51. Die Ergebnisse der vorigen Kapitel werden dadurch eine wichtige Ergänzung erhalten, daß wir die normale Diskontinuität als einen relativen Begriff auffassen. Dies geschieht durch Anwendung einer von HESSE [8] herrührenden und von KLEIN [9] weiter entwickelten Methode, die allgemein unter dem Namen „Hesse-Kleinsches Übertragungsprinzip“ bekannt ist.

Es sei φ eine allgemeine gewöhnliche oder Hermitesche Form mit den unbestimmten Koeffizienten (z) und den Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$. Es sei ferner φ' diejenige Form, die aus φ vermittels irgend einer linearen Substitution

$$(119) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa} y_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

erhalten wird. Die Koeffizienten (z') der Form φ' drücken sich dann als lineare Funktionen der Koeffizienten (z) aus:

$$(119') \quad z'_i = \sum_{\kappa=1}^{v+1} c_{i,\kappa} z_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, v+1),$$

wo die Koeffizienten c ganze rationale Funktionen der Größen $\alpha_{i,\kappa}$ (im Falle einer Hermiteschen Form auch der Größen $\bar{\alpha}_{i,\kappa}$) bezeichnen.

Jeder Gruppe Γ der Substitutionen (119) entspricht eine isomorphe Gruppe $\Gamma(\varphi)$ der zugeordneten Substitutionen (119'). Indem wir die Koeffizienten (z) der Form φ als homogene Punktkoordinaten in einem Raum $R_v(z)$ auffassen, erhalten wir eine neue geometrische Darstellung unserer Gruppe Γ , die sich von der früheren Darstellung dadurch unterscheidet, daß statt der Punkte (y) die Formen φ oder die Gebilde $\varphi = 0$ als geometrische Elemente dienen.

Wir nehmen nun an, daß die Gruppe Γ diskontinuierlich, d. h. ohne infinitesimale Substitutionen ist. Dann ist dies auch mit jeder zu irgend einer Form φ gehörigen Gruppe $\Gamma(\varphi)$ der Fall. Es liegt dann die Frage nach der Existenz der Formen φ nahe, für welche die gegebene diskontinuierliche Gruppe Γ im betreffenden Raum $R_v(z)$ normal diskontinuierlich wäre.

Der Zweck der folgenden Betrachtungen ist, die normale Diskontinuität der Gruppen $\Gamma(\varphi)$ bei den allgemeinen Formen φ zu untersuchen. Dabei werden wir die reellen und die komplexen Gruppen für sich betrachten, weil es natür-

lich ist, bei den ersteren Gruppen gewöhnliche Formen, bei den letzteren Gruppen Hermitesche Formen als Form φ anzuwenden.

§ 17.

Gruppen reeller Substitutionen.

52. Es sei

$$(120) \quad \varphi(y) = \sum z_i y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

eine allgemeine Form p -ter Ordnung der Variablen

$$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

mit den unbestimmten Koeffizienten (z) . Die Gleichung

$$(121) \quad \varphi(y) = \sum z_i y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

definiert dann eine im Raume $R_n(y)$ liegende algebraische Mannigfaltigkeit A_{n-1}^p , die von der Ordnung p und der Dimension $2(n-1)$ ist. Indem wir die Größen (z) als homogene Punktkoordinaten in einem Raum $R_v(z)$ deuten, erhalten wir aus dem Obigen eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Formen (120) bzw. den algebraischen Gebilden (121) des Raumes $R_n(y)$ und den Punkten (z) des Raumes $R_v(z)$.

Es sei nun Γ irgend eine Gruppe der reellen Substitutionen (119), die keine infinitesimale Substitution enthält und es sei $\Gamma(\varphi)$ die isomorphe Gruppe der zugeordneten reellen linearen Substitutionen (119'). Wir bezeichnen mit σ eine beliebige Normalfolge von Γ mit den reellen Elementen M_{q-1} und $\bar{M}_{n-q}$. Nach No. 10 bilden die zugeordneten Substitutionen (119') von $\Gamma(\varphi)$ eine Normalfolge $\sigma(\varphi)$. Das zweite Element dieser Folge ist dabei identisch mit der Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte (z) , deren zugeordnetes Gebilde (121) das Element M_{q-1} enthält; ferner besteht das erste Element von $\sigma(\varphi)$ aus der Gesamtheit derjenigen Punkte (z) , deren zugeordnetes Gebilde (121) eine durch $\bar{M}_{n-q}$ gehende zylindrische Mannigfaltigkeit in dem in No. 9 definierten Sinne ist.

Nach unserer in No. 21 gegebenen Definition ist die Gruppe $\Gamma(\varphi)$ im Raume $R(z)$ normal diskontinuierlich, wenn es Gebilde (121) gibt, die keines der reellen linearen Gebilde M_{q-1} enthalten. Der Normalbereich der Gruppe besteht dabei aus der Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte (z) , die den fraglichen Gebilden zugeordnet sind.

53. Wir nehmen nun an, daß die Ordnung p der Form (120) für $n > 1$ eine gerade Zahl ist. Dann gibt es Formen (120), deren zugeordnetes Gebilde (121) überhaupt keine reellen Punkte besitzt. Es sei $B_0(\varphi)$ die Mannigfaltigkeit der den letztgenannten Gebilden bzw. Formen entsprechenden Punkte (z). Diese Mannigfaltigkeit hat nach dem Obigen die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre Punkte dem Normalbereich der Gruppe $\Gamma(\varphi)$ angehören, unabhängig davon, welche reelle diskontinuierliche projektive Gruppe zur Gruppe Γ gewählt wird. Wir werden $B_0(\varphi)$, der somit von der allgemeinen Form φ , d. h. von der Ordnung und der Anzahl ihrer Variablen derselben allein, abhängt, als *Normalbereich des Formentypus φ* bezeichnen.

Um den Bereich $B_0(\varphi)$ explicite aufzustellen, haben wir die Bedingungen dafür auszudrücken, daß die Mannigfaltigkeit (121) keine reellen Punkte (y) hat. Wir zerlegen zu diesem Zweck die Koeffizienten z_λ in ihre reellen und imaginären Bestandteile:

$$z_\lambda = \xi_\lambda + i\eta_\lambda,$$

wodurch statt (121) die reellen Gleichungen

$$(122) \quad \sum \xi_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0, \quad \sum \eta_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

erhalten werden. Nach dem Vorhergehenden besteht der Bereich $B_0(\varphi)$ aus der Gesamtheit derjenigen Punkte (z), für welche die Gleichungen (122) keine reellen Lösungen, von $y_1 = y_2 = \dots = y_{n+1} = 0$ natürlich abgesehen, besitzen. Man gelangt zu ganz verschiedenen Resultaten, je nachdem $n = 1$ oder $n > 1$ ist.

Im Falle $n = 1$ besitzen die Gleichungen (122) im allgemeinen keine gemeinsame Lösung. Damit eine solche existiere, muß die Resultante jener Gleichungen verschwinden. Diese Bedingung wird durch eine Gleichung zwischen den Variablen z_λ und ihren konjugierten Größen $\bar{z}_\lambda$ dargestellt, wenn man die Resultante der Gleichungen

$$(123) \quad \varphi = \sum_{\lambda=0}^p z_\lambda y_1^{p-\lambda} y_2^\lambda = 0, \quad \bar{\varphi} = \sum_{\lambda=0}^p \bar{z}_\lambda y_1^{p-\lambda} y_2^\lambda = 0$$

gleich Null setzt:

$$(124) \quad \varrho(z, \bar{z}) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Hermitesche $(2p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit des $2p$ -dimensionalen Raumes $R_p(z)$ dar. Alle dieser Mannigfaltigkeit nicht zugehörigen Punkte sind Punkte des Bereichs $B_0(\varphi)$.

Ist dagegen $n > 1$, so besitzen die Mannigfaltigkeiten (122) stets gemein-

same Punkte. Damit es gemeinsame *reelle* Punkte gebe, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, die analytisch durch algebraische *Ungleichungen* zwischen den Variablen ξ und η oder z und $\bar{z}$ dargestellt werden können. Die dem Normalbereich nicht zugehörigen Punkte füllen daher für $n > 1$ Teile des Raumes aus, die von der gleichen Dimension wie der Raum selbst sind. Es gibt wirklich einen Normalbereich gleicher Dimension wie der Raum selbst, sobald die Ordnung p der Form (120) eine gerade Zahl ist, wie später näher gezeigt wird.

54. Wir wollen hier insbesondere die Lage der reellen Punkte (z) in bezug auf den Bereich $B_o(\varphi)$ untersuchen.

Es sei zuerst (z) ein Punkt, dem eine definite Form (120) entspricht. Dann ist

$$(125) \quad \varphi \equiv \varphi_1(\xi, \eta) \equiv \sum \xi_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}; \quad \varphi_2(\xi, \eta) \equiv \sum \eta_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \equiv 0.$$

Man kann dann um den Punkt (z) herum einen Bereich konstruieren derart, daß die Form $\varphi_1(\xi, \eta)$ definit bleibt und die Gebilde (122) somit keine gemeinsamen reellen Punkte aufweisen, solange der Punkt (z) im genannten Bereich variiert. Die den reellen definiten Formen (120) entsprechenden Punkte (z) des Raumes $R(z)$ liegen daher im Innern des Normalbereichs $B_o(\varphi)$.

Ist dagegen (z) irgend ein reeller Punkt, welcher einer indefiniten Form zugeordnet ist, so gibt es in beliebiger Umgebung desselben sowohl innere Punkte von $B_o(\varphi)$ als auch Punkte, die außerhalb des Bereichs $B_o(\varphi)$ liegen, weil man bei einer beliebig kleinen Variation der imaginären Teile der Größen z erreichen kann, daß $\varphi_2(\xi, \eta) = 0$ mit einer beliebigen reellen A_{n-1}^p identisch wird. Die Gesamtheit der den indefiniten Formen (120) entsprechenden Punkte (z) liegt somit auf der Berandung des Normalbereichs $B_o(\varphi)$.

55. Man kann den Normalbereich $B_o(\varphi)$ noch in einer anderen Weise definieren, die ein anschauliches geometrisches Bild von der Struktur des fraglichen Bereiches gibt.

Wir setzen, unter

$$(126) \quad u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$$

komplexe Variablen verstanden,

$$(127) \quad z_\lambda = (\lambda) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}},$$

wo (λ) den Koeffizienten von $u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$ in der Entwicklung von

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1})^p$$

bezeichnet. Die Gleichungen (127) stellen in Parameterform eine in $R(z)$ gelegene A_n^2 dar, die wir mit $V(\varphi)$ bezeichnen. Dies ist ein rationales Gebilde, welches durch jede Substitution (119') in sich selbst transformiert wird.

Wir können ferner die Gleichung

$$(128) \quad \varphi = \sum z_1 y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

als die Gleichung einer reellen im Raume $R(z)$ gelegenen Hyperebene interpretieren, indem wir die Größen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ als reelle Konstanten auffassen. Der Schnitt der Hyperebene (128) mit $V(\varphi)$ wird durch Einsetzung der Werte von z aus (127) in (128) erhalten. Man gelangt dadurch zu der Gleichung

$$(129) \quad (u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_{n+1} y_{n+1})^p = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die Hyperebenen (128) reelle Schmiegunghyperebenen der Mannigfaltigkeit $V(\varphi)$ sind. Der Normalbereich $B_o(\varphi)$ kann daher als der Ort derjenigen Punkte (z) des Raumes $R(z)$ definiert werden, die keiner reellen Schmiegunghyperebene des Gebildes $V(\varphi)$ angehören.

Wir können unsere bisherigen Resultate in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 24. *Bei jeder Form φ gerader Ordnung (im Falle binärer Formen auch ungerader Ordnung) gibt es einen Bereich $B_o(\varphi)$ im zugeordneten Raum $R(z)$, wo jede Gruppe $\Gamma(\varphi)$, die einer beliebigen diskontinuierlichen Gruppe Γ reellen Substitutionen zugeordnet ist, normal diskontinuierlich ist. Die dem Bereich $B_o(\varphi)$ nicht zugehörigen Punkte bilden für $n > 1$ einen Bereich von gleicher Dimension wie der Gesamtraum, für $n = 1$ dagegen eine algebraische Mannigfaltigkeit um einer Einheit niedrigerer Dimension. Der Bereich $B_o(\varphi)$ ist auch identisch mit der Gesamtheit derjenigen Punkte, die keiner reellen Schmiegunghyperebene des invarianten rationalen Gebildes $V(\varphi)$ angehören.*

56. Bevor wir auf die Untersuchung des Bereichs $B_o(\varphi)$ näher eingehen, wollen wir an einem wichtigen Beispiel zeigen, daß es Gruppen Γ gibt, deren zugeordnete Gruppe $\Gamma(\varphi)$ als Normalbereich gerade den Bereich $B_o(\varphi)$ hat.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Gruppe Γ_n aller reellen Substitutionen (119) mit ganzzahligen Koeffizienten $\alpha_{i,x}$ der Determinante $+1$. Wir denken uns die Zahlen $\alpha_{i,x}$ als Koordinaten eines Parallelgitters in einem Raume mit $n+1$ Dimensionen. Die Determinante $|\alpha_{i,x}|$ drückt dann den Inhalt des Parallelepipedes aus, welches durch den Nullpunkt O und die Punkte

$$(130) \quad P_i(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots, n+1)$$

definiert wird. Offenbar ist es möglich, ein solches Parallelipiped zu konstruieren, das vom Inhalt Eins ist und dessen Kanten OP_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) mit einer beliebig gegebenen Richtung mit vorgeschriebener Genauigkeit übereinstimmen. M. a. W. ist es möglich, eine unendliche Folge der Substitutionen von Γ_n zu bestimmen, für welche die Gleichungen

$$(131) \quad \lim \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{n+1,1}} = \lim \frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{n+1,2}} = \dots = \lim \frac{\alpha_{i,n+1}}{\alpha_{n+1,n+1}} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gelten, wo $c_1, c_2, \dots, c_n$ ein beliebig gegebenes System reeller Größen ist. Die betreffende Folge ist aber dann eine Normalfolge ersten Ranges, welche den Punkt (c) zum ersten Element hat. Es ist somit bewiesen, daß jeder Punkt (c) mit reellen Koordinaten das erste Element einer Normalfolge ersten Ranges der Modulgruppe Γ_n ist.

Es sei nun (z_0) ein beliebiger Punkt von $R(z)$, welcher dem Normalbereich von (φ) nicht angehört. Diesem Punkt entspricht dann im Raum $R(y)$ ein Gebilde (121), welches wenigstens einen reellen Punkt (y_0) enthält. Nun gibt es nach dem Obigen eine Normalfolge von Γ_n , die den Punkt (y_0) zum ersten Element hat. Die zugeordnete Normalfolge der Gruppe $\Gamma_n(\varphi)$ besitzt dann zum zweiten Element eine Hyperebene, die den Punkt (z_0) enthält. Dieser Punkt gehört somit nicht dem Normalbereich der Gruppe $\Gamma_n(\varphi)$ an.

Der Normalbereich von $\Gamma_n(\varphi)$ ist also wirklich mit dem Normalbereich von (φ) identisch, wie behauptet wurde.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns einer näheren Bestimmung des Normalbereichs zu, wobei wir den Fall der binären Formen beliebiger Ordnung und der quadratischen Formen beliebig vieler Variablen eingehender behandeln werden.

§ 18.

Binäre Formen.

57. Es sei jetzt Γ eine Gruppe binärer reeller Substitutionen

$$(132) \quad y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

die keine infinitesimale Substitution enthält. Indem wir dieser Gruppe die allgemeine binäre Form p -ter Ordnung zuordnen, die wir von der allgemeinen, in (117) angewandten Bezeichnung unwesentlich abweichend in der Gestalt

$$(133) \quad \varphi(y_1, y_2) = \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} z_x y_1^{p-x} y_2^x$$

schreiben, erhalten wir eine Gruppe $\Gamma(\varphi)$ der Substitutionen

$$(134) \quad z'_i = \sum_{\alpha=0}^p c_{i,\alpha} z_\alpha \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p),$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen p -ter Ordnung der Koeffizienten von (132) sind.

Das Gebilde $V(\varphi)$ wird hier durch die Gleichungen

$$(135) \quad z_\alpha = u_1^{p-\alpha} u_2^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, p)$$

oder noch einfacher durch die Matrizengleichung

$$(135') \quad \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{p-1} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt, die eine Normalkurve p -ter Ordnung definiert. Die Gleichung

$$(136) \quad z_0 y_1^p + p z_1 y_1^{p-1} y_2 + \dots + z_p y_2^p = 0$$

stellt die zum Punkt (y_1, y_2) gehörige Schmiegunghyperebene der Kurve (135) dar. Nach No. 55 besteht der Normalbereich $B(\varphi)$ aus der Gesamtheit derjenigen Punkte des Raumes R_p , die keiner an den reellen Punkten von (135) gelegten Hyperebenen (136) angehören, was mit dem Resultat der No. 27 völlig übereinstimmt.

Wir behaupten, daß die reellen Schmiegunghyperebenen von (135) den Raum R_p in $p+1$ Teile zerlegen.

Wir gehen zu diesem Zweck von unserer Form (133) aus, wo die Koeffizienten z_α derart gewählt seien, daß keine der Wurzeln der Gleichung

$$(137) \quad \sum_{\alpha=0}^p \binom{p}{\alpha} z_\alpha \lambda^{p-\alpha} = 0$$

reell ist. Es sei q die Anzahl der Wurzeln von (137) mit positivem imaginären Teil. Offenbar ist es dann möglich, von der Form (133) stetig in eine beliebige andere binäre Form derselben Ordnung überzugehen, für welche die Zahl q denselben Wert hat, ohne daß irgend eine der Wurzeln der zugeordneten Gleichung (137) reell wird, während dies nicht möglich ist, sobald die Zahl q für die beiden Formen nicht übereinstimmt. Weil nun q die $p+1$ verschiedenen Werte $0, 1, 2, \dots, p$ annehmen kann, ist damit die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen. Wir haben daher den

Satz 25. *Der Bereich $B_0(\varphi)$ zerfällt bei der binären Form p -ter Ordnung in $p+1$ Teile.*

Zur Bestimmung der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ haben wir nach No. 53 die Resultante der Gleichungen

$$(138) \quad \begin{aligned} z_0 \lambda^p + p z_1 \lambda^{p-1} + \dots + z_p &= 0 \\ \bar{z}_0 \lambda^p + p \bar{z}_1 \lambda^{p-1} + \dots + \bar{z}_p &= 0 \end{aligned}$$

zu bilden:

$$(139) \quad \varrho(z, \bar{z}) = 0,$$

welche ein $(2p-1)$ -dimensionales Hermitesches Gebilde definiert. Man hat ferner noch eine andere Bedingung zu berücksichtigen, nämlich die, daß die Gleichungen (138) eine gemeinsame *reelle* Wurzel λ besitzen sollen. Dies findet sicher statt, wenn die gemeinsame Wurzel jener Gleichungen einfach ist, weil diese Gleichungen neben irgend einer komplexen Wurzel auch die konjugierte Größe zur gemeinsamen Wurzel haben. Die zwei- und mehrfachen gemeinsamen Lösungen von (138) genügen aber neben (139) noch einer zweiten leicht zu bildenden algebraischen Gleichung:

$$(140) \quad \varrho_1(z, \bar{z}) = 0.$$

Die Begrenzung von $B_0(\varphi)$ enthält somit sicher alle Punkte der Mannigfaltigkeit

$$(140') \quad \varrho(z, \bar{z}) = 0, \quad \varrho_1(z, \bar{z}) \neq 0.$$

58. Wir machen zum Schluß noch die für die funktionentheoretischen Zwecke wichtige Bemerkung, daß sämtliche Normalfolgen von $\Gamma(\varphi)$ vom Rang Eins sind. In der Tat reduzieren sich die zylindrischen Mannigfaltigkeiten (14) bei den binären Formen auf einen p -fachen Punkt:

$$(141) \quad (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2)^p = 0,$$

wo (ξ_1, ξ_2) das erste Element der betreffenden Normalfolge der binären Gruppe Γ bezeichnet. Das erste Element der zugeordneten Normalfolge von $\Gamma(\varphi)$ ist identisch mit dem reellen Punkt

$$z_\nu = \xi_1^{p-\nu} \xi_2^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, p)$$

der Normalkurve (135), woraus hervorgeht, daß die letztgenannte Normalfolge vom Rang Eins ist.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir näher auf die Betrachtung der niedrigsten Fälle eingehen.

Lineare Formen.

59. Ist $p = 1$ und daher (133) eine lineare Form

$$(142) \quad \varphi = z_0 y_1 + z_1 y_2,$$

so reduziert sich die Gruppe $\Gamma(\varphi)$ auf die Gruppe der korrelativen Substitutionen

$$(143) \quad z'_0 = \alpha z_0 + \gamma z_1, \quad z'_1 = \beta z_0 + \delta z_1,$$

von (132). Der Bereich $B_0(\varphi)$ besteht hier aus den Punkten der oberen und unteren Halbebene, die Begrenzung von $B_0(\varphi)$ aus den Punkten der reellen Achse. Dem Satz 24 entspricht hier der bekannte

Satz 26. *Jede Gruppe reeller Substitutionen (143), die keine infinitesimale Substitution enthält, ist außerhalb der reellen Achse normal (= eigentlich) diskontinuierlich.*

Die Modulgruppe ist die einfachste Gruppe, deren Normalbereich identisch mit dem Bereich $B_0(\varphi)$ ist.

Quadratische Formen.

60. Es sei $p = 2$ und daher (133) eine quadratische Form

$$(144) \quad \varphi = z_0 y_1^2 + 2 z_1 y_1 y_2 + z_2 y_2^2.$$

Das Gebilde $V(\varphi)$ ist hier identisch mit dem Kegelschnitt

$$(145) \quad z_0 z_2 - z_1^2 = 0,$$

die Gleichungen (137), oder

$$(146) \quad z_0 \lambda^2 + 2 z_1 \lambda + z_2 = 0,$$

repräsentieren Tangenten von (145). Um die Begrenzung von $B_0(\varphi)$ zu erhalten, haben wir die Resultante der Gleichungen

$$(147) \quad z_0 \lambda^2 + 2 z_1 \lambda + z_2 = 0, \quad \bar{z}_0 \lambda^2 + 2 \bar{z}_1 \lambda + \bar{z}_2 = 0$$

zu bilden. Diese ist gleich der Invariante der Funktionaldeterminante

$$(148) \quad \vartheta = 4 \begin{vmatrix} z_0 y_1 + z_1 y_2 & z_1 y_1 + z_2 y_2 \\ \bar{z}_0 y_1 + \bar{z}_1 y_2 & \bar{z}_1 y_1 + \bar{z}_2 y_2 \end{vmatrix}$$

der Formen φ und $\bar{\varphi}$. Man hat somit

$$(149) \quad \begin{vmatrix} z_0 & z_1 \\ \bar{z}_0 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_0 & z_2 \\ \bar{z}_0 & \bar{z}_2 \end{vmatrix}^2 = 0$$

als die gesuchte Gleichung für die Begrenzung von $B_0(\varphi)$. Dies ist eine algebraische Mannigfaltigkeit vierter Ordnung, die nach Satz 25 den Raum $R_3(z)$ in drei Teile zerlegt.

Nach No. 57 haben wir noch diejenigen Punkte von (149) zu berücksichtigen, denen zwei gemeinsame Wurzeln der Gleichungen (147) entsprechen. Dies findet statt, wenn

$$(150) \quad \frac{z_0}{z_0} = \frac{z_1}{z_1} = \frac{z_2}{z_2}$$

ist, d. h. wenn die Gleichungen (147) geeignet normiert reelle Koeffizienten z_0, z_1, z_2 besitzen. Ist dann

$$(151) \quad z_0 z_2 - z_1^2 \leq 0,$$

so sind die Wurzeln von (147) reell, sonst aber imaginär. Wir sind damit zu dem Resultat gelangt, daß der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ alle komplexen Punkte von (149) und nur diejenigen reellen Punkte angehören, die der Bedingung (150) genügen.

In der ternären Gruppe der Substitutionen

$$(152) \quad \begin{aligned} z'_0 &= \alpha^2 z_0 + 2\alpha\gamma z_1 + \gamma^2 z_2 \\ z'_1 &= \alpha\beta z_0 + (\alpha\delta + \beta\gamma) z_1 + \gamma\delta z_2 \\ z'_2 &= \beta^2 z_0 + 2\beta\delta z_1 + \delta^2 z_2 \end{aligned}$$

haben wir die bekannte Darstellung der binären Substitutionen als nichteuclidische Bewegungen der hyperbolischen Ebene, wobei der Kegelschnitt (145) die Rolle des absoluten Gebildes spielt.

Kubische Formen.

61. Wir wollen noch besonders den Fall der kubischen binären Formen

$$(153) \quad \varphi = z_0 y_1^3 + 3 z_1 y_1^2 y_2 + 3 z_2 y_1 y_2^2 + z_3 y_2^3$$

behandeln.

Das Gebilde $V(\varphi)$ wird hier von der rationalen Normalkurve dritter Ordnung

$$(154) \quad \left\| \begin{array}{ccc} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right\| = 0$$

repräsentiert. Die Schmiegungebenen von (154) besitzen die Gleichungen

$$(155) \quad z_0 \lambda^3 + 3 z_1 \lambda^2 + 3 z_2 \lambda + z_3 = 0.$$

Die Gesamtheit der reellen Schmiegungebenen umhüllen eine fünfdimensionale

algebraische Mannigfaltigkeit sechster Ordnung, welche den sechsdimensionalen Raum der komplexen Variablen (z) in vier Teile zerlegt.

Um die Gleichung der genannten Mannigfaltigkeit bequem zu erhalten, bemerken wir, daß jede gemeinsame Wurzel der Gleichungen

$$(156) \quad \begin{aligned} \varphi &= z_0 \lambda^3 + 3 z_1 \lambda^2 + 3 z_2 \lambda + z_3 = 0 \\ \bar{\varphi} &= \bar{z}_0 \lambda^3 + 3 \bar{z}_1 \lambda^2 + 3 \bar{z}_2 \lambda + \bar{z}_3 = 0 \end{aligned}$$

auch eine Wurzel derjenigen Gleichungen ist, die durch Nullsetzen der Funktionaldeterminante der Formen φ und $\bar{\varphi}$, und der ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionaldeterminante erhalten werden. Diese beiden letzteren Gleichungen sind vom dritten Grade in bezug auf $\lambda = y_1 : y_2$. Mit den Gleichungen (156) zusammen bilden sie ein System von vier kubischen Gleichungen. Damit sie eine gemeinsame Wurzel λ besitzen, muß die Determinante ihrer Koeffizienten gleich Null sein, wodurch die gesuchte Gleichung für die Begrenzung des Normalbereichs $B_0(\varphi)$ erhalten wird.

Aus dem Ausdruck

$$(157) \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} z_0 y_1^2 + 2 z_1 y_1 y_2 + z_2 y_2^2 & z_1 y_1^2 + 2 z_2 y_1 y_2 + z_3 y_2^2 \\ \bar{z}_0 y_1^2 + 2 \bar{z}_1 y_1 y_2 + \bar{z}_2 y_2^2 & \bar{z}_1 y_1^2 + 2 \bar{z}_2 y_1 y_2 + \bar{z}_3 y_2^2 \end{vmatrix},$$

der bis auf einen numerischen Faktor mit der Funktionaldeterminante der Formen φ und $\bar{\varphi}$ übereinstimmt, erhält man durch Differentiation in bezug auf y_1 und y_2 die Gleichungen

$$(158) \quad \begin{aligned} &2(z_0 \bar{z}_1 - \bar{z}_0 z_1) y_1^3 + 3(z_0 \bar{z}_2 - \bar{z}_0 z_2) y_1^2 y_2 \\ &\quad + (z_0 \bar{z}_3 - \bar{z}_0 z_3 - 3 z_1 \bar{z}_2 + 3 \bar{z}_1 z_2) y_1 y_2^2 + 2(z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) y_2^3 = 0 \\ &2(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) y_1^3 + 3(z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) y_1^2 y_2 \\ &\quad + (z_0 \bar{z}_2 - \bar{z}_0 z_2 - 3 \bar{z}_1 z_2 + 3 z_1 \bar{z}_2) y_1 y_2^2 + 2(z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) y_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Das Nullsetzen der Determinante der Koeffizienten dieser Gleichungen und der Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi &= z_0 y_1^3 + 3 z_1 y_1^2 y_2 + 3 z_2 y_1 y_2^2 + z_3 y_2^3 = 0 \\ \bar{\varphi} &= \bar{z}_0 y_1^3 + 3 \bar{z}_1 y_1^2 y_2 + 3 \bar{z}_2 y_1 y_2^2 + \bar{z}_3 y_2^3 = 0 \end{aligned}$$

gibt die Gleichung des gesuchten Hermiteschen Gebildes, dem die Gesamtheit der Randpunkte des Normalbereichs unserer kubischen binären Formentypus (153) angehört.

Durch Anwendung der Cayleyschen Symbolik hat CLEBSCH ([3], S. 94) für die obige Resultante eine sehr einfache und elegante Darstellung erhalten.

§ 19.

Quadratische Formen beliebig vieler Variablen.

62. Es sei

$$(159) \quad \varphi = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} \lambda_{\mu\nu} z_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_{\mu\mu} = 1 \\ \lambda_{\mu\nu} = 2 \quad (\mu \neq \nu) \end{array} \right)$$

eine allgemeine quadratische Form der $n+1$ Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ mit den unbestimmten Koeffizienten $z_{\mu\nu}$, welche letzteren wir als homogene Punktkoordinaten in dem $n(n+3)$ -dimensionalen Raum $R(z)$ auffassen. Die Gleichungen (127) ersetzen wir hier durch

$$(160) \quad z_{\mu\nu} = u_{\mu} u_{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n+1),$$

welche eine in $R(z)$ gelegene Hyperfläche 2^n -ter Ordnung repräsentieren.

Um den Normalbereich von (159) zu bestimmen, zerlegen wir die Gleichung $\varphi = 0$ in die reellen Gleichungen:

$$(161) \quad \sum \lambda_{\mu\nu} \xi_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu} = 0, \quad \sum \lambda_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu} = 0.$$

Nach No. 53 ist der gesuchte Normalbereich identisch mit der Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte (z) , für welche die Gebilde (161) keine reellen Schnittpunkte haben.

Wir beweisen den

Satz 27. *Der Normalbereich der quadratischen Formen ist stets zusammenhängend.*

Es seien φ_1 und φ_2 zwei reelle quadratische Gebilde (161), die keine gemeinsamen reellen Punkte besitzen. Wir zeigen zuerst, daß, wenn die beiden Gebilde reelle Punkte haben, eines derselben derart stetig geändert werden kann, daß es alle seine reellen Punkte verliert, ohne daß die beiden Gebilde während der Änderung reelle Schnittpunkte aufweisen.

Wir nehmen etwa an, daß das Gebilde φ_2 im Innern des Gebildes φ_1 liegt, wobei wir das Innere von φ_1 bzw. φ_2 durch die Ungleichungen $\varphi_1 < 0$ bzw. $\varphi_2 < 0$ definieren. Es sei λ eine reelle Größe des Intervalles $(0 \leq \lambda \leq 1)$. Wir bilden die Form

$$(162) \quad \varphi = \lambda \varphi_2 + (1 - \lambda) \varphi_1,$$

wo φ_1 die positive definite Form

$$(162') \quad \varphi_1 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2$$

bezeichnet. Für

$$(163) \quad \varphi = 0$$

ergibt sich aus (162), wenn $0 < \lambda < 1$ ist:

$$(164) \quad \varphi_2 < 0$$

d. h. die Gebilde (163) liegen im Innern von φ_2 und daher von φ_1 . Für $\lambda = 0$ ist aber: $\varphi = \varphi_2$ und für $\lambda = 1$: $\varphi = \varphi_1$. Wenn somit λ stetig von Null zu Eins wächst, variiert das Gebilde φ , stetig in der Weise, daß es alle seine reellen Punkte verliert, ohne daß es während jener Änderung reelle Schnittpunkte mit φ_1 aufweist, w. z. b. w.

Wir wollen ferner daran erinnern, daß der Raum der positiven (wie auch der negativen) definiten quadratischen Formen zusammenhängend ist. Sind nämlich φ_1 und φ_2 positive definite Formen, so ist dies auch mit den Formen

$$(165) \quad \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2$$

der Fall, wo $0 \leq \lambda \leq 1$ ist. Die den Formen (165) entsprechenden Punkte (z) sind identisch mit den Punkten der Strecke, deren Endpunkte die Formen φ_1 und φ_2 repräsentieren. Daraus geht hervor, daß der Raum der positiven (und daher auch der negativen) Formen konvex und mithin auch zusammenhängend ist.

Nach dem Vorhergehenden kann man das beliebig gegebene Paar (φ_1, φ_2) reeller quadratischer Mannigfaltigkeiten ohne gemeinsame reelle Punkte in ein beliebiges anderes Paar (ψ_1, ψ_2) von Mannigfaltigkeiten (161), deren Gleichungen durch Nullsetzen reeller, quadratischer definiten Formen erhalten werden, stetig derart überführen, daß sie beständig keine reellen Schnittpunkte aufweisen. Wir nennen diese Operation kurz T . Es sei $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ irgend ein anderes dem Paare (φ_1, φ_2) analoges Paar quadratischer Mannigfaltigkeiten und $\bar{T}$ diejenige Operation, welche das neue Paar in der eben angegebenen Weise in das Paar (ψ_1, ψ_2) überführt. Die Operation $T\bar{T}^{-1}$ führt dann die Gebilde φ_1 und φ_2 derart stetig in $\bar{\varphi}_1$ bzw. $\bar{\varphi}_2$ über, daß sie beständig keine reellen Schnittpunkte haben.

Nach dem Vorhergehenden ist der Raum $B_0(\varphi)$ bei den quadratischen Formen φ stets zusammenhängend, und zwar so, daß man zwei beliebige Punkte stets mit einer Linie verbinden kann, deren Punkte sämtlich innere Punkte von $B_0(\varphi)$ sind.

Um die Gleichung der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ explicite aufzustellen, wollen wir uns der Kürze halber auf die ternären quadratischen Formen beschränken.

Ternäre quadratische Formen.

63. Wenn (159) eine ternäre Form ist:

$$(166) \quad \varphi = z_{11}y_1^2 + z_{22}y_2^2 + z_{33}y_3^2 + 2z_{12}y_1y_2 + 2z_{13}y_1y_3 + 2z_{23}y_2y_3,$$

geht das Gebilde $V(\varphi)$ in die *Veronesesche Fläche*

$$(167) \quad \begin{array}{lll} z_{11} = u_1^2, & z_{22} = u_2^2, & z_{33} = u_3^2 \\ z_{12} = u_1u_2, & z_{13} = u_1u_3, & z_{23} = u_2u_3 \end{array}$$

über, die eine Fläche vierter Ordnung ist. Der Normalbereich $B_0(\varphi)$ besteht hier aus der Gesamtheit der außerhalb der reellen Schmiegunghyperebenen

$$(168) \quad \varphi = 0$$

der Fläche (167) gelegenen Punkte des Raumes $R_0(z)$.

Die Gleichung der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ ergibt sich in folgender Weise. Es seien

$$(169) \quad \sum_{\mu, \nu=1}^3 \lambda_{\mu\nu} \xi_{\mu\nu} y_\mu y_\nu = 0, \quad \sum_{\mu, \nu=1}^3 \lambda_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} y_\mu y_\nu = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_{\mu\mu} = 1 \\ \lambda_{\mu\nu} = 2 \quad (\mu \neq \nu) \end{array} \right)$$

die der Gleichung (168) entsprechenden reellen Gleichungen (161), die hier zwei reelle Kegelschnitte K_1 und K_2 darstellen. Damit der Punkt

$$(170) \quad z_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ angehöre, muß es in beliebiger Nähe dieses Punktes sowohl solche Punkte geben, die dem inneren von $B_0(\varphi)$ angehören und deren entsprechende Kegelschnitte K_1, K_2 keine gemeinsamen reellen Punkte haben, als auch solche Punkte, deren zugeordnete Kegelschnitte reelle Schnittpunkte besitzen. Dies ist nur dadurch möglich, daß die zum Randpunkt (170) von $B_0(\varphi)$ gehörigen Kegelschnitte (169) einander in einem reellen Punkt berühren. Dann müssen aber in diesem genannten Punkte auch die Kegelschnitte (168) und

$$(171) \quad \bar{\varphi} = \sum_{\mu, \nu=1}^3 \lambda_{\mu\nu} \bar{z}_{\mu\nu} y_\mu y_\nu = 0$$

einander berühren.

Wenn wir somit die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß die Kegelschnitte (168) und (171) einander berühren, erhalten wir eine Gleichung, deren zugeordnete Mannigfaltigkeit U die Randpunkte von $B_0(\varphi)$ enthält. Diese Mannigfaltigkeit enthält aber dazu unendlich viele Punkte, die der Begrenzung von $B_0(\varphi)$ nicht angehören. Denn ist (z) ein Punkt von M , so

besitzen die zugeordneten Kegelschnitte (169) außer den Berührungspunkten noch zwei andere Schnittpunkte, die sowohl reell als imaginär sein können. Aber nur im letzteren Falle liegt (z) auf der Berandung von $B_0(\varphi)$. Damit dies der Fall sei, muß neben der Gleichung von U noch eine Ungleichung erfüllt sein.

64. Die analytische Darstellung von U kann am leichtesten in folgender Weise geschehen (ANDOYER ([1], S. 269).

Es seien

$$(172) \quad d = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{12} & z_{22} & z_{23} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{vmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} & \bar{z}_{13} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} & \bar{z}_{23} \\ \bar{z}_{13} & \bar{z}_{23} & \bar{z}_{33} \end{vmatrix}$$

die Diskriminanten der Formen φ und $\bar{\varphi}$. Die Diskriminante der Form

$$(173) \quad \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \bar{\varphi}$$

läßt sich dann in der Form

$$(174) \quad \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^3 d + \lambda_1^2 \lambda_2 e + \lambda_1 \lambda_2^2 \bar{e} + \lambda_2^3 \bar{d}$$

schreiben, wo die Größen

$$(175) \quad e = \sum \bar{z}_{\mu\nu} \frac{\partial d}{\partial z_{\mu\nu}}, \quad \bar{e} = \sum z_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{d}}{\partial \bar{z}_{\mu\nu}}$$

simultane Invarianten der Formen φ und $\bar{\varphi}$ sind. Damit die Kegelschnitte

$$\varphi = 0, \quad \bar{\varphi} = 0$$

einander berühren, muß die Gleichung

$$(176) \quad \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

für $\lambda_1 : \lambda_2$ eine zweifache Wurzel geben. Die Bedingung hierfür ist

$$(177) \quad 27 d^2 \bar{d}^2 - 18 d \bar{d} e \bar{e} - e^2 \bar{e}^2 + 4 d \bar{e}^3 + 4 \bar{d} e^3 = 0,$$

welche die gesuchte Gleichung von U ist. Diese Gleichung stellt eine neun-dimensionale Hermitesche Mannigfaltigkeit zwölften Grades dar.

§ 20.

Bemerkungen über die höheren Formen.

65. Die obige Methode behält ihre Anwendbarkeit bei Formen beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl Variablen.

Wie oben in dem speziellen Beispiel der quadratischen Formen findet man allgemein, daß die Randpunkte des Normalbereichs $B_0(\varphi)$ auf derjenigen Mannigfaltigkeit liegen, deren Punkten Gebilde (123) zugeordnet sind, die einander in reellen Punkten (ξ, η) berühren. Wir haben also wie oben die Bedingung für die Berührung der Gebilde

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum z_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0 \\ \bar{\varphi} &= \sum \bar{z}_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0\end{aligned}$$

auszudrücken, was durch das Gleichungssystem

$$(178) \quad \begin{aligned} &\varphi = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} : \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} : \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n+1}} : \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n+1}} \end{aligned}$$

gegeben wird. Damit die Gleichungen kompatibel seien, muß ihre Resultante verschwinden. Die so erhaltene Gleichung

$$(179) \quad \varrho(z, \bar{z}) = 0$$

zwischen den Variablen $z, \bar{z}$ stellt eine Hermitesche Mannigfaltigkeit dar, die nach dem Vorhergehenden die Gesamtheit der Randpunkte des Normalbereichs $B_0(\varphi)$ enthält.

§ 21.

Gruppen komplexer Substitutionen.

66. Die im Vorhergehenden für die Gruppen reeller linearer Substitutionen hergeleiteten Sätze lassen sich auf die Gruppen komplexer linearer Substitutionen übertragen, wenn man bei der Anwendung des Hesse-Kleinschen Übertragungsprinzips die gewöhnlichen Formen durch die Formen mit konjugiert imaginären Variablen oder die Hermiteschen Formen

$$(180) \quad \begin{aligned} \psi(y, \bar{y}) &= \sum z_{\lambda, \lambda'} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \bar{y}_2^{\lambda'_2} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}} \\ &\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda'_i = p \right) \end{aligned}$$

ersetzt. Diese Formen haben wir schon in No. 18 kurz betrachtet. Um für die zugeordnete Gleichung

$$(181) \quad \psi(y, \bar{y}) = 0$$

eine in allen Fällen brauchbare geometrische Darstellung zu erhalten, haben wir die Variablen y in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt:

$$(182) \quad y_{\kappa} = \xi_{\kappa} + i\eta_{\kappa}, \quad \bar{y}_{\kappa} = \xi_{\kappa} - i\eta_{\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n+1)$$

und dann die Variablen ξ und η wieder als komplexe Variablen aufgefaßt. Dadurch geht die Gleichung (181) in die Gleichung

$$(183) \quad \psi(\xi + i\eta, \xi - i\eta) = 0$$

über, die eine im Raume R_{2n+1} der komplexen Koordinaten ξ, η gelegene Hyperfläche A_{2n} repräsentiert.

67. Wir betrachten nun die unbestimmten Koeffizienten z der Form (180) als homogene Punktkoordinaten in einem Raume $R(z)$. Dadurch erhalten wir eine umkehrbar eidentige Beziehung zwischen den Punkten (z) und den Formen (180). Jeder Substitution

$$(184) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa} y_{\kappa}, \quad \bar{y}'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,\kappa} \bar{y}_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

entspricht eine lineare Substitution

$$(185) \quad z'_i = \sum_{\kappa=1}^{v+1} c_{i,\kappa} z_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, v+1)$$

der Variablen z . Es sei Γ eine Gruppe der Substitutionen (184), die keine infinitesimale Substitution enthält. Die zugeordneten Substitutionen (185) bilden dann eine isomorphe Gruppe $\Gamma(\psi)$, die ebenfalls frei von den infinitesimalen Substitutionen ist.

Es sei σ eine beliebige Normalfolge von Γ mit den Elementen M und $\bar{M}$. Die zugeordneten Substitutionen der Gruppe $\Gamma(\psi)$ bilden dann auch eine Normalfolge. Man findet leicht, daß das zweite Element dieser Folge aus der Gesamtheit derjenigen Punkte (z) besteht, deren entsprechendes Gebilde (181) das Element M als ganzes enthält. Somit ist die Gruppe $\Gamma(\psi)$ im Raume $R(z)$ normal diskontinuierlich, wenn es Hermitesche Gebilde (181) gibt, die kein zweites Element (M) der Gruppe Γ als Ganzes enthalten. Solche Gebilde sind stets vorhanden. Denn die Ordnung der Form (180) ist nach ihrer Definition eine gerade Zahl, und es gibt stets Gebilde, die gar keine Punkte besitzen, wie z.B. diejenigen Gebilde (181), für welche

$$(186) \quad \psi(\xi + i\eta, \xi - i\eta)$$

eine reelle definite Form ist.

Wir verstehen nun analog wie bei den gewöhnlichen Formen unter dem Normalbereich $B_0(\psi)$ des Formentypus (180) den Inbegriff aller derjenigen Punkte (z) , deren entsprechendes Hermitesches Gebilde (181) keine reellen oder komplexen Punkte hat. Dieser Bereich ist dann wegen seiner Definition identisch mit dem gemeinsamen Teil der Normalbereiche aller Gruppen $\Gamma(\psi)$, wo Γ eine beliebige Gruppe reeller oder komplexer Substitutionen (187) ist, die keine infinitesimale Substitution enthält.

68. Um den Normalbereich $B_0(\psi)$ zu erhalten, haben wir die Gesamtheit derjenigen Punkte (z) zu bestimmen, für welche die Gleichungen

$$(187) \quad \psi_1(\xi, \eta) = 0, \quad \psi_2(\xi, \eta) = 0,$$

die durch Zerlegung der Gleichung (183) in ihren reellen und imaginären Teil erhalten werden, keine gemeinsamen reellen Lösungen (von der trivialen Lösung $\xi = \eta = 0$ abgesehen) haben. Es gibt aber auch eine zweite Definition des Normalbereichs $B_0(\psi)$, die der Definition in No. 55 analog ist.

Wir setzen, unter

$$(188) \quad u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$$

komplexe Variablen verstanden,

$$(189) \quad z_{\lambda, \lambda'} = (\lambda, \lambda') u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{u}_1^{\lambda'_1} \bar{u}_2^{\lambda'_2} \dots \bar{u}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}},$$

wo (λ, λ') den Koeffizienten desjenigen Gliedes der Entwicklung von

$$(190) \quad (u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1})^p (u_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_{n+1})^p$$

bezeichnet, welches in der rechten Seite von (189) vorkommt. Die Gleichungen (189) definieren ein dem Gebilde (127) analoges Gebilde $V(\psi)$, welches durch jede projektive Transformation (185) in sich selbst überführt wird. Wir können nun die Gleichung (181) als die Gleichung einer Hyperebene des Raumes $R(z)$ interpretieren, indem wir die Größen y konstant behalten. Der Schnitt dieser Hyperebene mit dem algebraischen Gebilde $V(\psi)$ genügt der Gleichung

$$(191) \quad \left(\sum_{x=1}^{n+1} u_x y_x \right)^p \left(\sum_{x=1}^{n+1} \bar{u}_x \bar{y}_x \right)^p = 0$$

oder

$$(192) \quad u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_{n+1} y_{n+1} = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die Hyperebenen (181) Schmiegunghyperebenen des Gebildes $V(\psi)$ sind.

Die vorhergehenden Ergebnisse können wir im folgenden, dem Satz 24 analogen Satz zusammenfassen.

Satz 28. *Bei jeder Hermiteschen Form $\psi(y, \bar{y})$ gibt es einen Bereich $B_0(\psi)$ im zugeordneten Raume $R(z)$, wo jede Gruppe $\Gamma(\psi)$, die einer beliebigen diskontinuierlichen Gruppe reeller oder komplexer Substitutionen zugeordnet ist, normal diskontinuierlich ist. Die dem Bereich $B_0(\psi)$ nicht angehörigen Punkte bilden stets Räume von gleicher Dimension wie der Gesamtraum. Der Bereich $B_0(\psi)$ ist auch identisch mit der Mannigfaltigkeit sämtlicher Punkte (z) , die keiner Schmiegunghyperebene des Gebildes $V(\psi)$ angehören.*

Wie bei den gewöhnlichen Formen zeigt man, daß die den Formen (180) mit konjugiert imaginären Koeffizienten (z) entsprechenden Punkte (z) im Innern oder auf der Berandung von $B_0(\psi)$ liegen, je nachdem die betreffende Form definit oder indefinit ist.

Wir führen jetzt die Transformation

$$(193) \quad z_{\lambda, \lambda'} = U_{\lambda, \lambda'} + i W_{\lambda, \lambda'}, \quad \bar{z}_{\lambda, \lambda'} = U_{\lambda, \lambda'} - i W_{\lambda, \lambda'}$$

aus. Dadurch wird das Gebilde $V(\psi)$ des Raumes $R(z)$ in ein reelles Gebilde des Raumes mit den Koordinaten U, W überführt. Den komplexen projektiven Transformationen des Raumes $R(z)$ werden dabei reelle projektive Transformationen des neuen Raumes entsprechen, die das reelle transformierte Gebilde von $V(\psi)$ in sich selbst überführen.

Wie in No. 56 können wir auch bei den Hermiteschen Formen die Existenz von Gruppen Γ nachweisen, für welche der Normalbereich der Gruppe $\Gamma(\psi)$ mit dem Normalbereich $B_0(\psi)$ übereinstimmt. Das einfachste Beispiel liefert die Gruppe I'_n aller linearen unimodularen Substitutionen (184) mit ganzzahligen Koeffizienten aus dem Zahlkörper $(1, i)$, die für $n = 1$ mit der Picardschen Gruppe übereinstimmt. Der Beweis hierfür wird ganz analog wie bei den reellen Modulgruppen ausgeführt, wenn man beachtet, daß der absolute Betrag der Determinante $|\alpha_{i, x}|$ der Koeffizienten von (187) auch im komplexen Gebiet als Inhalt eines Parallelipeds interpretiert werden kann, dessen Ecken im Nullpunkt und in den Punkten $P_x(\alpha_{x, 1}, \alpha_{x, 2}, \dots, \alpha_{x, n+1})$ ($x = 1, 2, \dots, n+1$) liegen.

Wir wählen als Beispiel die quadratischen Formen.

§ 22.

Quadratische Hermitesche Formen.

Binäre quadratische Formen.

69. Wir beginnen mit der Betrachtung der binären quadratischen Hermiteschen Form

$$(194) \quad \psi(\bar{y}, \bar{y}) = z_0 y_1 \bar{y}_1 + z_1 y_1 \bar{y}_2 + z_2 y_1 \bar{y}_2 + z_3 y_2 \bar{y}_2.$$

Das Gebilde $V(\psi)$ wird hier durch das Nullsetzen der Determinante von (194) dargestellt:

$$z_1 z_2 - z_0 z_3 = 0.$$

Dieses Gebilde wird durch die Transformation

$$(195) \quad z_0 = u_3 + u_0, \quad z_1 = u_1 + i u_2, \quad z_2 = u_1 - i u_2, \quad z_3 = u_3 - u_0,$$

die (193) in etwas geänderter Form darstellt, in das Gebilde

$$(196) \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$$

überführt, das wir als eine Kugel auffassen können. Den komplexen Substitutionen

$$y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

werden reelle Kollineationen zugeordnet, die die Kugel (196) in sich selbst transformieren. Wir haben hier die bekannte Darstellung der komplexen Kreisverwandtschaften als Bewegungen im hyperbolischen Raume (u), wo die Kugel (196) das absolute Gebilde ist.

Nach No. 30 drückt die Ungleichung

$$(197) \quad u_0 \bar{u}_0 + u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2 - u_3 \bar{u}_3 < |u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2|$$

die Bedingung dafür aus, daß der Punkt (u) keiner reellen Tangentenebene der Kugel (196) angehört. Durch die Transformation (195) wird der Raum (197) in den Raum

$$(198) \quad z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 - z_0 \bar{z}_3 - \bar{z}_0 z_3 < |z_1 z_2 - z_0 z_3|$$

überführt, welcher mit dem Normalbereich des Formentypus (194) identisch ist.

Quadratische Formen mehrerer Variablen.

70. Es sei jetzt

$$(199) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z_{\mu\nu} y_\mu \bar{y}_\nu$$

eine quadratische Hermitesche Form der $n+1$ Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ und ihrer konjugierten Größen. Wir setzen wie früher

$$(200) \quad \begin{aligned} z_{\mu\nu} &= z'_{\mu\nu} + i z''_{\mu\nu} \\ y_\mu &= \xi_\mu + i \eta_\mu, \quad \bar{y}_\mu = \xi_\mu - i \eta_\mu, \end{aligned}$$

wodurch die Form (199) in ihren reellen und imaginären Teil zerlegt wird:

$$(201) \quad \psi(y, \bar{y}) = \varphi_1(\xi, \eta) + i \varphi_2(\xi, \eta).$$

Um den Normalbereich $B_o(\psi)$ zu bestimmen, haben wir die Gesamtheit der reellen Größensysteme (z', z'') zu bestimmen, für welche die reellen quadratischen Mannigfaltigkeiten

$$(202) \quad \varphi_1(\xi, \eta) = 0, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = 0$$

keine gemeinsamen reellen Punkte haben. Man hat hier einen dem in No. 62 betrachteten analogen Fall mit dem Unterschied, daß jetzt die Gleichungen (202) bei willkürlichen Werten der Parameter z nicht die allgemeinsten Paare quadratischer Gebilde repräsentieren. Die Betrachtungen der No. 62 behalten jedoch ungeändert ihre Gültigkeit, wenn man zur Form (162') die Form

$$(203) \quad \varphi_1(\xi, \eta) = \sum_{v=1}^{n+1} (\xi_v^2 + \eta_v^2)$$

wählt, die der Hermiteschen Form

$$(204) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum_{v=1}^{n+1} y_v \bar{y}_v$$

zugeordnet ist. Man gelangt dadurch zum

Satz 29. *Der Normalbereich ist bei den quadratischen Hermiteschen Formen stets zusammenhängend.*

V. Automorphe Funktionen.

§ 23.

Existenz der automorphen Funktionen.

71. Die funktionentheoretische Abteilung unserer Arbeit zerfällt in zwei Teile.

Im ersten Teile werden allgemeine Sätze über die automorphen Funktionen bei Cremonagruppen beschränkter Ordnung hergeleitet. Es wird unter gewissen allgemeinen Bedingungen die Existenz automorpher Funktionen nachgewiesen und der Existenzbereich sowie die wesentlichen Singularitäten dieser Funktionen bestimmt.

Der zweite Teil ist der Untersuchung der arithmetischen Invarianten beliebiger gewöhnlicher und Hermitescher Formen gewidmet.

Statt homogener Variablen, die in geometrischen Betrachtungen die geeignetsten sind, wollen wir in unseren funktionentheoretischen Untersuchungen von nicht homogenen Variablen Gebrauch machen. Wird

$$(205) \quad y_i : y_{n+1} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt, so nimmt die Cremonasubstitution (102) die Form

$$(206) \quad x'_i = \frac{F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

an.

72. Wie in der Einleitung erwähnt, werden wir den Existenzbeweis der automorphen Funktionen, der Methode von POINCARÉ [24] folgend, dadurch ausführen, daß wir analytische Ausdrücke vermittle unendlicher Reihen bilden. In erster Linie wird zu diesem Zweck die von PICARD [20] gegebene Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen angewandt, die wir in der Form

$$(207) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum H(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \left\{ \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\}^m$$

schreiben, wo H eine rationale Funktion und m eine positive ganze Zahl bezeichnet, die später genauer definiert werden, und wo $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ die Gesamtheit der Substitutionen der betreffenden CremonaGruppe G durchläuft.

Es soll die Konvergenz der Reihen (207) unter der folgenden allgemeinen Bedingung untersucht werden.

Bedingung (A'). *Es gibt im Raume R_n einen $2n$ -dimensionalen Bereich D , dessen Transformierte mittels der Substitutionen der diskontinuierlichen Cremona-gruppe G , von endlich vielen derselben höchstens abgesehen, in einem endlichen oder ins Endliche transformierbaren Bereich W liegen.*

Im allgemeinen folgt aus der Bedingung (A') die normale Diskontinuität der Gruppe im Bereich D .

Es seien nämlich (A_{n-1}) beliebige außerhalb des Bereichs W gelegene Hyperflächen, deren zugeordnete Gebilde (A'_{n-1}) im projektiven Raume R_d keinen gemeinsamen Punkt haben. Die Gesamtheit der Punkte des Cremonaraumes, die keiner der Hyperflächen (A_{n-1}) oder ihren Transformaten mittels der Cremona-gruppe angehören, bilden einen in bezug auf diese Gruppe invarianten Bereich D_0 , der D als Teilbereich enthält. Der Bereich D_0 genügt aber dann der in No. 40 formulierten Bedingung (A), woraus nach Satz 20 die normale Diskontinuität der Gruppe im Bereich D_0 und daher in D eine Folge ist.

73. Bevor wir den eigentlichen Konvergenzbeweis der Reihen (207) beginnen, wollen wir eine elementare Formel herleiten, die im Folgenden eine mehrfache Anwendung finden wird.

Es sei

$$(208) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

eine ganze rationale Funktion p -ter Ordnung mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten. Die Gleichung

$$(209) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

definiert dann eine im Raume $R_n(x)$ gelegene A_{n-1}^p . Wir setzen nun

$$(210) \quad z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alle nicht negativen ganzen Zahlen durchlaufen, für welche

$$(211) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq p.$$

ist, wobei $z_{00\dots 0} = 1$ zu setzen ist. Die in dieser Weise aus (209) erhaltene Gleichung

$$(212) \quad \bar{P}(z) = \sum c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = 0$$

stellt dann eine im Raume $R(z)$ der Variablen (z) gelegene Hyperebene dar.

Nun gilt für den Abstand des Punktes (z) von der Hyperebene (212) der Ausdruck

$$(213) \quad \mathcal{A}(z, \bar{P}) = \frac{|\sum c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}|}{\sqrt{\sum' |c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}|^2}},$$

wo bei der Summierung unter dem Wurzelzeichen die Kombination $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ auszuschließen ist. Hieraus ergibt sich für den absoluten Betrag der Funktion (208) die folgende wichtige Darstellung:

$$(214) \quad |P(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \mathcal{A}(x, P) \sqrt{\sum' |c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}|^2},$$

wo $\mathcal{A}(x, P)$ statt $\mathcal{A}(z, \bar{P})$ geschrieben ist.

Es sei ferner U irgend ein abgeschlossener Bereich des Raumes $R_n(x)$, der keinen Punkt des Gebildes (209) enthält. Vermöge (210) wird dem Bereich U ein bestimmter abgeschlossener Bereich U' des Raumes $R(z)$ zugeordnet, der keinen Punkt der Hyperebene (212) enthält. Es sei $\mathcal{A}_0$ der kürzeste Abstand des Bereichs U' von der Hyperebene (212). Dann ist

$$(215) \quad \mathcal{A}(x, P) \geq \mathcal{A}_0 > 0$$

im Bereich U .

74. Indem wir jetzt den Konvergenzbeweis der Reihen (207) beginnen, schreiben wir die rationale Funktion H als Quotient zweier Polynome:

$$(216) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

wo

$$(217) \quad \begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum a_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum b_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Wegen (214) ist dann

$$(218) \quad |H(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)| = \frac{\mathcal{A}(x', P_1)}{\mathcal{A}(x', P_2)} \cdot \frac{\sqrt{\sum' |a_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}|^2}}{\sqrt{\sum' |b_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}|^2}}.$$

Wir wählen nun zum Gebilde

$$(218') \quad P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

eine beliebige außerhalb des Bereichs W gelegene Hyperfläche. Solange der Punkt (x) in dem Bereich D gewählt wird, werden die äquivalenten Punkte (x')

nach der Bedingung (A') innerhalb des Bereichs W liegen. Daher gilt im Bereich D die zu (215) analoge Ungleichung

$$(219) \quad \mathcal{A}(x', P_*) \geq \mathcal{A}_0 > 0.$$

Aus der Gleichung (218) geht aber dann hervor, daß der absolute Betrag von $H(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, wenn $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ alle Substitutionen der Gruppe G durchläuft, im Bereich D unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Daraus folgt, daß die Reihen (207) im Bereich D gleichmäßig und absolut konvergieren, sobald dies mit der speziellen, der Annahme $H \equiv 1$ entsprechenden Reihe

$$(220) \quad \sum \left\{ \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\}^m$$

der Fall ist. Wir können daher mit der Betrachtung dieser speziellen Reihe fortfahren.

75. Es sei (206) irgend eine Substitution unserer Cremonagruppe G . Die zugeordnete Funktionaldeterminante

$$(221) \quad \delta(x) = \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

läßt sich in der Form

$$(222) \quad \delta(x) = \frac{J(x)}{\{F_{n+1}(x)\}^{n+1}}$$

schreiben, wo

$$(223) \quad J(x) = \begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n+1} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Dabei stellt die Gleichung

$$(224) \quad F_{n+1}(x) = 0$$

das „Fluchtgebilde“ und die Gleichung

$$(224') \quad J(x) = 0$$

das „Jacobische Gebilde“ der Substitution (206) dar.

Es seien nun (x) und (ξ) zwei beliebige Punkte eines abgeschlossenen inneren Teilbereichs D' von D . Weil die Fluchtgebilde (224) als Transformierte des unendlich fernen Gebildes außerhalb D liegen, haben die Größen $\mathcal{A}(x, F_{n+1})$ und $\mathcal{A}(\xi, F_{n+1})$ eine von Null verschiedene untere Grenze, die nur von D' abhängt. Daraus folgt nach (214), daß für sämtliche Fluchtgebilde

$$(225) \quad \left| \frac{F_{n+1}(x)}{F_{n+1}(\xi)} \right| = \frac{\mathcal{A}(x, F_{n+1})}{\mathcal{A}(\xi, F_{n+1})} \geq \kappa > 0$$

ist, wenn (x) und (ξ) beliebig in D' variieren.

Es sei ferner τ eine im Bereich D' gelegene kleine Hypersphäre mit dem Volumen v . Wir bezeichnen mit v' das Volumen der Transformaten von τ mittels der Substitution (206). Man hat

$$(226) \quad v' = v |\delta(\xi)|^s,$$

wo ξ einen Punkt von τ bezeichnet.

Nun ist nach (222)

$$(227) \quad \frac{\delta(x)}{\delta(\xi)} = \frac{J(x)}{J(\xi)} \cdot \left(\frac{F_{n+1}(\xi)}{F_{n+1}(x)} \right)^{n+1}.$$

Wegen (225) und (226) ergibt sich hieraus

$$(228) \quad |\delta(x)|^s < \frac{1}{\kappa^{2n+2} v} \left| \frac{J(x)}{J(\xi)} \right|^s v'.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß die absolute Konvergenz der Reihe (220) für $m = 2$ von derjenigen der Reihe

$$(229) \quad \sum \left(\frac{J(x)}{J(\xi)} \right)^s v'$$

abhängt, wo ξ einen Punkt von τ bezeichnet, der mit der Substitution im allgemeinen variiert.

76. Um die absolute Konvergenz dieser letzteren Reihe zu untersuchen, bemerken wir zunächst, daß die Funktionen $J(x)$ ganze rationale Funktionen beschränkter Ordnung sind, woraus folgt, daß die Gebilde (224') durch eine endliche Anzahl ($< q$) Punkte eindeutig bestimmt werden. Es ist offenbar möglich, im Bereich D' eine endliche Anzahl außerhalb einander liegender kleiner Hypersphären

$$(230) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q$$

in der Weise zu konstruieren, daß jedes der Gebilde (224') wenigstens von einer derselben einen Abstand hat, der oberhalb einer von Null verschiedenen Größe Δ_0 liegt.

Wir fassen nun allgemein in der Summe $\sum_\nu$ diejenigen Glieder der Reihe (229) zusammen, deren zugeordnetes Gebilde (224') von τ_ν einen Abstand hat, der $\geq \Delta_0$ ist. Zur Abschätzung der Summe $\sum_\nu$ identifizieren wir τ_ν mit τ . Wir haben dann nach (214) für jedes Glied von $\sum_\nu$ und jeden Punkt x des Gebietes D' die Ungleichung

$$(231) \quad \left| \frac{J(x)}{J(\xi_\nu)} \right| = \frac{\Delta(x, J)}{\Delta(\xi_\nu, J)} < C_\nu,$$

wo ξ_ν einen Punkt von τ_ν bezeichnet und wo C_ν eine endliche Konstante ist. Daher wird

$$(232) \quad |\sum_\nu| < C_\nu^\alpha \sum v'_\nu,$$

wo $\sum v'_\nu$ die Summe der Volumina der Hypersphäre τ_ν und ihrer Transformaten bezeichnet. Diese Summe ist aber endlich, weil die Gruppe in D' normal diskontinuierlich ist und weil die Transformaten von τ_ν im Endlichen, nämlich im Bereich W , liegen. Jede der Reihen $\sum_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, q$) ist daher im Bereich D' gleichmäßig und absolut konvergent.

Weil nun jedes Glied von (229) wenigstens in einer der Summen $\sum_\nu$ vorkommt, muß auch die Reihe (229) selbst in D' gleichmäßig und absolut konvergent sein. Dies gilt dann auch betreffs der Reihe (220) und somit auch betreffs der allgemeinen Reihen (207) für $m = 2$ und dann natürlich auch für $m > 2$.

77. Im allgemeinen findet aber die Konvergenz der Reihen (207) in einem größeren Bereich statt. Wir werden nämlich den folgenden Satz beweisen.

Satz 30. *Die Reihe (207) konvergiert, wenigstens nach Fortlassen einer endlichen Anzahl Glieder, für $m \geq 2$ gleichmäßig und absolut in jedem abgeschlossenen Bereich U , der keinen Häufungspunkt der Transformaten des Gebildes (218') und keinen Häufungspunkt der Fluchtgebilde (224) enthält.*

Wir wählen im Bereich D eine endliche Anzahl von Hypersphären mit den Mittelpunkten

$$(233) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$$

derart, daß für jede Substitution der Gruppe G wenigstens eine unter ihnen außerhalb der beiden Gebilde

$$(234) \quad P_1(x') = 0, \quad J(x) = 0$$

liegt, was möglich ist, weil diese Gebilde von beschränkter Ordnung sind. Wir bilden dann den Quotienten zweier entsprechenden Glieder der Reihen $\Theta(x)$ und $\Theta(\xi)$, wo x irgend einen Punkt des Bereichs U , der als endlich vorausgesetzt werden kann, und ξ irgend einen der Punkte (233) bezeichnet. Der genannte Quotient ist dem absoluten Betrag nach gleich

$$(235) \quad \left| \frac{H(x')}{H(\xi')} \frac{\delta(x)}{\delta(\xi)} \right|^m = \left[\frac{\mathcal{A}(x, \bar{P}_1)}{\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_1)} \right]^m \left[\frac{\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_2)}{\mathcal{A}(x, \bar{P}_2)} \right]^m \left[\frac{\mathcal{A}(x, J)}{\mathcal{A}(\xi, J)} \right]^m \left\{ \frac{\mathcal{A}(\xi, F_{n+1})}{\mathcal{A}(x, F_{n+1})} \right\}^{(n+1)m},$$

wo $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ die Zähler der rationalen Funktionen $P_1(x')$ und $P_2(x')$ bezeichnen. Weil die Gebilde

$$(236) \quad \bar{P}_2 = 0, \quad F_{n+1} = 0$$

in dem abgeschlossenen Bereich U nach der Annahme keinen Häufungspunkt haben, bleiben die Quotienten

$$(237) \quad \frac{\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_2)}{\mathcal{A}(x, \bar{P}_2)}, \quad \frac{\mathcal{A}(\xi, F_{n+1})}{\mathcal{A}(x, F_{n+1})}$$

wenigstens von einem gewissen Glied ab unterhalb einer endlichen Grenze K_1 . Ferner liegt wenigstens eine der Funktionen

$$(238) \quad \frac{\mathcal{A}(x, \bar{P}_1)}{\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_1)} \cdot \frac{\mathcal{A}(x, J)}{\mathcal{A}(\xi, J)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

im Bereich U bei beliebig gewählter Substitution von G unterhalb einer endlichen Konstanten K_2 , weil nach dem Vorhergehenden die beiden Abstände $\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_1)$ und $\mathcal{A}(\xi, J)$ wenigstens für einen Wert von ν oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze bleiben. Somit ist

$$(239) \quad \sum_{\nu=1}^p \left[\frac{\mathcal{A}(\xi, \bar{P}_1)}{\mathcal{A}(x, \bar{P}_1)} \right]^m \left[\frac{\mathcal{A}(\xi, J)}{\mathcal{A}(x, J)} \right]^m > \frac{1}{K_2}.$$

Aus (235) folgt dann, mit Rücksicht auf die obige Abschätzung der Größen (237), die Ungleichung

$$(240) \quad |H(x') \delta(x)|^m < K_1^{(n+2)m} K_2 \sum_{\nu=1}^p |H(\xi') \delta(\xi)|^m,$$

die nach dem Vorhergehenden im Bereich U wenigstens von einer Stelle ab für die Glieder der Reihe (207) gültig ist.

Nach dem vorhergehenden Beweis ist jede der p Reihen

$$(241) \quad \sum H(\xi'_\nu) \{ \delta(\xi'_\nu) \}^m \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

für $m \geq 2$ absolut konvergent, weil die Punkte (ξ_ν) dem Bereich D angehören. Wegen (240) muß dann die Reihe (207) für $m \geq 2$ gleichmäßig und absolut im Bereich U konvergieren, wenigstens nachdem endlich viele Glieder fortgelassen worden sind, w. z. b. w.

78. Die Reihen (207) definieren analytische Funktionen, die den Funktionalgleichungen

$$(242) \quad \Theta(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \left\{ \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\}^{-m}$$

genügen, wo (x') eine beliebige Substitution der Gruppe G bezeichnet. Der Quotient zweier Θ -Funktionen mit einem und demselben Exponenten m ist also eine automorphe Funktion unserer CremonaGruppe.

Wir haben somit die Existenz automorpher Funktionen nachgewiesen, die in jedem Bereich meromorph sind, der keine Häufungsstelle der Gebilde

$$(243) \quad P_2(x') = 0, \quad F_{n+1}(x) = 0$$

enthält. Die Häufungsstellen der Gebilde (243) müssen ersichtlich wesentliche Singularitäten der durch die Reihen (207) definierten Transzendenten sein.

Welcher Zusammenhang findet nun zwischen dem Normalbereich der Gruppe und dem Existenzbereich ihrer automorphen Funktionen statt?

Wir gehen, um dies allgemein einzusehen, zum projektiven Raum R_n über. Es sei H eine Hyperfläche, deren Schnitt mit I vermöge (107) dem außerhalb des Bereichs W gelegenen Gebilde (218') zugeordnet ist. Wir können annehmen, daß die Transformierten von H mittels der Substitutionen der zu G geordneten projektiven Gruppe Γ keinen gemeinsamen Punkt haben, welcher Bedingung sicher alle Gruppen genügen, bei denen keine allen Substitutionen gegenüber invariante A_μ ($\mu \leq n-2$) existieren. Es sei σ eine beliebige Normalfolge von Γ mit den Elementen M und $\bar{M}$. Es sei ferner H' irgend eine der Transformierten von H , die das Element M nicht als Ganzes enthält. Die Transformierten dieser Hyperfläche mittels σ^{-1} konvergieren dann nach Satz 5 gegen eine Mannigfaltigkeit, die das Element $\bar{M}$ als Ganzes enthält. Daraus geht hervor, daß im allgemeinen jedes der zweiten Elemente der CremonaGruppe den Häufungsgebilden von (243) angehört. Die Punkte dieser Elemente können daher dem Existenzbereich der automorphen Funktionen nicht angehören. Weil

nun der Normalbereich der Gruppe nach seiner Definition aus der Menge aller zu den zweiten Elementen nicht gehörigen Punkte besteht, ist durch das Obige bewiesen, daß die automorphen Funktionen im allgemeinen nicht außerhalb des Normalbereichs der Gruppe existieren können. Sie besitzen aber im allgemeinen wesentliche Singularitäten auch in dem Normalbereich, sobald $n > 1$ ist (vgl. die Beispiele in § 27).

Wir können die zuletzt erhaltenen Resultate im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 31. *Jede der Bedingung (A') genügende Gruppe besitzt automorphe Funktionen, die vermittels der verallgemeinerten Poincaréschen Reihen in ihrem ganzen Existenzbereich darstellbar sind. Im allgemeinen ist der Existenzbereich jeder automorphen Funktion in dem Normalbereich der Gruppe enthalten.*

79. Wir wollen jetzt nachträglich untersuchen, in wie weit die Bedingung (A') für die Darstellbarkeit der automorphen Funktionen vermittels Poincaréscher Reihen notwendig ist.

Wir bemerken zu diesem Zweck, daß die Gebilde

$$(244) \quad P_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0,$$

die für Glieder von (207) algebraische Unstetigkeiten sind, nicht den ganzen Raum R_n ausfüllen dürfen, weil die durch die betreffende Reihe definierte Funktion andernfalls überall singulär wäre, was unmöglich ist. Im allgemeinen, nämlich wenn es keine allen Substitutionen der Gruppe gegenüber invariante A_μ gibt, kann man unter den Gebilden (244) ein System wählen, das keinen gemeinsamen Punkt haben. Dies ist im wesentlichen der Inhalt der in No. 40 aufgestellten Bedingung (A), die somit zur Darstellbarkeit der automorphen Funktionen mit Poincaréschen Reihen notwendig ist. Unsere Bedingung (A') setzt nun etwas mehr voraus. In derselben wird nämlich die Existenz einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit von Hyperflächen A_{n-1} vorausgesetzt (nämlich die Hyperflächen, die außerhalb des Bereichs W liegen), deren Transformierte vermittels der Substitutionen der gegebenen Gruppe einen gewissen $2n$ -dimensionalen Bereich frei lassen. Dadurch werden die Unstetigkeitsgebilde der Glieder der Reihe (207) Bedingungen unterworfen, die durch *Ungleichungen* zwischen den Koeffizienten ihrer Gleichungen ausgedrückt werden, während man andernfalls durch *Gleichungen* darstellbare Bedingungen hätte.

Wir wollen das obige Resultat durch den folgenden Satz aussprechen.

Satz 32. *Die Bedingung (A') drückt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß mit willkürlich wählbaren, d. h. durch Ungleichungen definierten algebraischen Unstetigkeitsgebilden versehene automorphe Funktionen existieren, deren analytische Darstellung durch verallgemeinerte Poincarésche Reihen möglich ist.*

80. Die vorhergehenden Betrachtungen beruhen wesentlich auf der Anwendung analytischer Ausdrücke, die wie die Reihen (207) unendliche Summen oder Produkte rationaler (oder einfacher transzendenter) Funktionen sind. Die durch solche Reihen definierten analytischen Funktionen können aber im Falle mehrerer Variablen nicht denselben Grad der Allgemeinheit haben wie bei den Funktionen einer Variablen, was eine Folge davon ist, daß die Niveaugebilde analytischer Funktionen zweier und mehrerer Variablen im allgemeinen irreduzible transzendente Mannigfaltigkeiten sind. Es ist daher a priori möglich, daß es Gruppen gibt, deren automorphe Funktionen keine analytische Darstellung vermittle der Poincaréschen oder analoger Reihen gestatten. In der Tat hat man ein solches Beispiel in den abelschen Funktionen, deren Niveaugebilde im allgemeinen irreduzible transzendente Mannigfaltigkeiten sind. Um dies zu beweisen, genügt es nach dem Vorhergehenden zu zeigen, daß die Transformierten jeder von dem unendlich fernen Gebilde verschiedenen algebraischen Mannigfaltigkeit vermöge der Substitutionen der abelschen Gruppe den ganzen Raum ausfüllen. Dies haben wir in der Tat in einem anderen Zusammenhang für den Fall zweier Variablen und für die linearen Funktionen getan ([18]; S. 95).

§ 24.

Zwei allgemeine Klassen automorpher Funktionen.

81. Es gibt zwei allgemeine Klassen diskontinuierlicher Gruppen, auf welche die obigen Ergebnisse anwendbar sind, nämlich die Gruppen mit festen Häufungsgebilden und die Gruppen mit einem endlichen invarianten Raum, die resp. in den §§ 14 und 12 untersucht worden sind.

Wir wollen das Bestehen unserer Bedingung (A') zunächst an der ersten der genannten Klassen bestätigen.

Es sei Γ eine Kollineationsgruppe, die den drei in No. 47 aufgestellten Bedingungen genügt. Es sei H irgend eine Hyperebene, die einem Punkt des Normalbereichs der korrelativen Gruppe zugeordnet ist. Diese Hyperebene enthält dann keinen Punkt der abgeschlossenen Menge (M) der ersten Elemente

von Γ . Wir denken uns eine lineare Transformation ausgeführt, durch welche die Hyperebene H ins Unendliche überführt wird. Nach Ausführung dieser Transformation werden sämtliche Punkte von (M) im Endlichen liegen.

Es sei nun D irgend ein endlicher Bereich, dessen Punkte innere Punkte des Normalbereichs von B sind. Nach Satz 6 sind die Häufungspunkte der Transformaten von D identisch mit den Punkten der Menge (M) . Weil diese Punkte im Endlichen liegen, kann man D so wählen, daß alle seine Transformaten im Innern eines endlichen Bereiches W liegen. Die Bedingung (A') ist also im vorliegenden Falle stets erfüllt.

Wir wählen jetzt als Unstetigkeitsgebilde (218') unserer Reihen Hyperflächen H , die keinen Punkt der Menge (M) enthalten, welcher Bedingung u. a. alle Hyperebenen genügen, die den Punkten des Normalbereichs von $\bar{\Gamma}$ korrelativ entsprechen. Die Häufungsgebilde der Transformaten jener Hyperflächen fallen dann nach No. 47 mit den Hyperebenen der Menge $(\bar{M})$ der zweiten Elemente von Γ zusammen. Man hat somit den

Satz 33. *Bei denjenigen Kollineationsgruppen, deren sämtliche Normalfolgen den Rang Eins besitzen und die nebst ihrer korrelativen Gruppe normal diskontinuierlich sind, gibt es durch Poincarésche Reihen darstellbare automorphe Funktionen, deren Existenzbereich mit dem Normalbereich der Gruppe identisch ist und deren wesentliche Singularitäten, die mit den zweiten Elementen der Normalfolgen der Gruppe zusammenfallen, von der Gruppe allein, nicht aber von der Wahl der Funktion selbst abhängen.*

Wir haben im vorliegenden Falle automorphe Funktionen mit *festen wesentlichen Singularitäten*, in welcher Hinsicht diese Funktionen somit eine vollkommene Analogie mit den Funktionen einer Variablen aufweisen.

Vermöge der projektiven Abbildung kann man den vorhergehenden Satz unmittelbar auf die Cremonagruppen übertragen.

Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß die Gruppe Γ ihre normale Diskontinuität noch in gewissen Teilen des invarianten Gebildes I bewährt. Durch die Transformation (204) gehen dann die automorphen Funktionen der projektiven Gruppe Γ in diejenigen der zugeordneten CremonaGruppe G über, deren Existenzbereich mit dem Normalbereich von G zusammenfällt.

Wie schon in No. 48 erwähnt wurde, gehören sämtliche eigentlich diskontinuierliche Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen zur Kategorie der Gruppen mit festen Häufungsgebilden. Die automorphen Funktionen einer Variablen subsumieren sich daher als einfachster Spezialfall unter die im Vorhergehenden betrachteten automorphen Funktionen.

82. Der Bedingung (A') genügen ferner die in § 12 untersuchten Gruppen mit einem endlichen invarianten Raum, indem dann die Bereiche D und W identisch mit dem invarianten Raum sind. Wir wählen als Unstetigkeitsgebilde (218') irgend eine außerhalb des invarianten Raumes gelegene Hyperfläche und wir gelangen zum

Satz 34. *Im allgemeinen besitzt jede Gruppe von Cremonasubstitutionen beschränkter Ordnung, die einen endlichen Bereich in sich selbst transformieren, sobald sie keine infinitesimale Substitution enthält, automorphe Funktionen, die im genannten Bereich meromorph sind.*

Die einfachste Anwendung des vorhergehenden Satzes bieten uns die Gruppen linearer Substitutionen, die einen Hauptkreis besitzen (die fuchsschen Gruppen).

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir zu einer näheren Untersuchung der wichtigsten Klassen automorpher Funktionen übergehen.

§ 25.

Hyperfuchssche Funktionen.

83. Wir beginnen mit der Betrachtung der automorphen Funktionen von Kollineationsgruppen. Werden die linearen Substitutionen

$$(245) \quad x'_i = \frac{\alpha_{i,1}x_1 + \alpha_{i,2}x_2 + \cdots + \alpha_{i,n}x_n + \alpha_{i,n+1}}{\alpha_{n+1,1}x_1 + \alpha_{n+1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}x_n + \alpha_{n+1,n+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

unimodular geschrieben, so nimmt die Poincarésche Reihe (207) die Gestalt

$$(246) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum H(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \{ \alpha_{n+1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n}x_n + \alpha_{n+1,n+1} \}^{-m(n+1)}$$

an.

Die ersten und wichtigsten allgemeinen Beispiele automorpher Funktionen mehrerer Variablen mit einer Gruppe linearer Substitutionen hat man in den *hyperfuchsschen* Funktionen, die für $n = 2$ von PICARD und für beliebiges n von FUBINI eingeführt worden sind. Unter den vorstehenden Namen versteht man die automorphen Funktionen der in § 8 betrachteten „hyperfuchsschen“ Gruppen, d. h. derjenigen Gruppen linearer Substitutionen, die eine Hermitesche quadratische Form der Charakteristik Eins, d. h. eine Form des Typus

$$(247) \quad \psi(y, \bar{y}) = y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_n\bar{y}_n - y_{n+1}\bar{y}_{n+1},$$

invariant lassen.

Nach No. 48 gehören die hyperfuchsschen Gruppen zur Kategorie der Gruppen mit festen Häufungsgebilden. Gleichzeitig besitzen sie aber auch einen endlichen invarianten Raum, nämlich

$$(248) \quad \psi(y, \bar{y}) < 0.$$

Wegen des Satzes 34 gilt daher der

Satz 35. *Jede Gruppe linearer Substitutionen, die eine Hermitesche Form (247) der Charakteristik Eins in sich selbst transformieren, besitzt, sobald keine infinitesimalen Substitutionen vorkommen, automorphe Funktionen, die in dem Normalbereich (248) der genannten Form meromorph sind.*

84. Es gibt Gruppen, deren Normalbereich mit (248) identisch ist, z. B. die Gruppen aller ganzzahligen komplexen Substitutionen, die eine Form des Typus (247) mit ganzzahligen komplexen Koeffizienten in sich selbst überführen. Die zugehörigen automorphen Funktionen haben den Bereich (248) als wahren Existenzbereich, über dessen Begrenzung hinaus keine analytische Fortsetzung möglich ist. Diese Funktionen bilden eine direkte Verallgemeinerung der automorphen Funktionen einer Variablen mit Grenzkreis, welche sich hier in der Tat als niedrigster Fall ($n = 1$) subsumieren.

Die auf S. 258 betrachteten Gruppen mit diskret liegenden singulären Tangentenhyperebenen führen zu automorphen Funktionen, die im ganzen Raum bis auf die genannten Hyperebenen existieren. Wir haben hier eine Verallgemeinerung der automorphen Funktionen mit einem Hauptkreis, der kein Grenzkreis ist.

Wir wollen hiernach näher den Fall betrachten, wo die Koeffizienten der Substitutionen reell sind. Diese Substitutionen führen neben der Hermiteschen Form (247) die reelle quadratische Form

$$(249) \quad \varphi(y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2$$

in sich selbst über.

Nach No. 30 besteht der Normalbereich der Form (249) für $n > 2$ aus dem zusammenhängenden Raum

$$(250) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \cdots + y_n \bar{y}_n - y_{n+1} \bar{y}_{n+1} < |y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2|,$$

für $n = 2$ dagegen aus dem dreiteiligen Raum

$$(251) \quad y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - y_3 \bar{y}_3 \neq |y_1^2 + y_2^2 - y_3^2|.$$

Es gibt nach No. 30 Gruppen, deren Normalbereich mit (250) bzw. (251) identisch ist, wie z. B. die Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen, die eine ganzzahlige Form des Typus (249) in sich selbst transformieren. Für diese Gruppen Γ gilt der

Satz 36. *Jede zu einer Gruppe Γ gehörige Poincarésche Reihe definiert für $n > 2$ eine analytische Funktion, die den Bereich (250) als Existenzbereich hat,*

während sie für $n = 2$ gleichzeitig drei analytische Funktionen definiert, die in je einem der drei Raumteile existieren, in welche der betreffende vierdimensionale Raum durch die Mannigfaltigkeit (251) zerlegt wird.

Beispiele von automorphen Funktionen anderer Art geben die auf S. 254 betrachteten Gruppen. Die automorphen Funktionen dieser Gruppen existieren im ganzen Raum bis auf die diskret liegenden reellen Tangentenhyperebenen des Gebildes $\varphi = 0$.

§ 26.

Eine Klasse automorpher Funktionen ohne invariante Gebilde.

85. Die in § 9 betrachteten Kollineationsgruppen ohne invariante Gebilde führen zu den ersten allgemeinen Beispielen automorpher Funktionen mehrerer Variablen, die den automorphen Funktionen einer Variablen ohne Hauptkreis analog sind.

Die genannten Gruppen genügen den drei in No. 47 aufgestellten Bedingungen und gehören daher zur Klasse der Gruppen mit festen Häufungsgebilden. Die zugehörigen automorphen Funktionen existieren im ganzen Raum bis auf die diskret liegenden Hyperebenen, welche die zweiten Elemente der Normalfolgen der Gruppe bilden und welche für die automorphen Funktionen der Gruppe feste wesentliche Singularitäten sind.

§ 27.

Zyklische Gruppen.

86. Ein sehr lehrreiches Beispiel bieten die zyklischen Gruppen linearer Substitutionen. Der Kürze halber betrachten wir nur den allgemeinen Fall, wo die determinierende Gleichung der erzeugenden Substitution keine gleichen Wurzeln besitzt. Dann läßt sich diese Substitution in der kanonischen Form

$$(252) \quad x'_i = \kappa_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

darstellen.

Wir wählen die Bezeichnung so, daß

$$(253) \quad |\kappa_1| \leq |\kappa_2| \leq \dots \leq |\kappa_n|$$

ist. Durch die lineare Transformation

$$(254) \quad \frac{x_i}{x_n} = y_i, \quad \frac{1}{x_n} = y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

kann man erreichen, daß die Größen $|\kappa_i|$ höchstens gleich Eins werden, wenn sie dieser Bedingung nicht anfangs genügen.

Wir können annehmen, daß in (253) das Ungleichheitszeichen wenigstens an einer Stelle gilt, weil die von (252) erzeugte Gruppe andernfalls endlich wäre oder eine infinitesimale Substitution enthielte. Es sei daher etwa

$$(255) \quad |\kappa_1| = |\kappa_2| = \dots = |\kappa_\mu| < |\kappa_{\mu+1}| \leq \dots < |\kappa_{n-\nu+1}| = \dots = |\kappa_n| = 1.$$

Jede unendliche Folge

$$(256) \quad S^{p_1}, \quad S^{p_2}, \dots$$

von Potenzen der Substitution (252), für welche die Grenzwerte

$$(257) \quad \omega_\lambda \equiv \lim_{\rho=\infty} p_\rho \arg \kappa_\lambda \pmod{2\pi} \quad (\lambda = n - \nu + 1, \dots, n)$$

existieren, ist eine Normalfolge vom Rang ν . Wenn die Grenzwerte (256) auch für $\lambda = 1, 2, \dots, \mu$ existieren, ist auch die inverse Folge von (256) eine Normalfolge vom Rang μ .

87. Statt der Poincaréschen Reihen (207) wählen wir hier die Reihen

$$(258) \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} H(\kappa_1^p x_1, \dots, \kappa_n^p x_n) \left(\kappa_1^p x_1 + \frac{1}{\kappa_1^p x_1} \right)^{-m},$$

die den Vorteil bieten, direkt automorph zu sein. Wir nehmen der Kürze halber an, daß H ein Quotient zweier linearer Funktionen ist:

$$(259) \quad H(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Dann ist nach der Formel (214)

$$(260) \quad |H(\kappa_1^p x_1, \dots, \kappa_n^p x_n)| = \frac{\mathcal{A}(x, Q_p)}{\mathcal{A}(x, P_p)} \frac{\sqrt{\sum_{v=1}^n |\kappa_v|^{2p} |b_v|^2}}{\sqrt{\sum_{v=1}^n |\kappa_v|^{2p} |a_v|^2}},$$

wo

$$(261) \quad Q_p(x) = \sum_{v=1}^n b_v \kappa_v^p x_v + b_{n+1} = 0$$

$$(261)' \quad P_p(x) = \sum_{v=1}^n a_v \kappa_v^p x_v + a_{n+1} = 0 \quad \left. \vphantom{\sum_{v=1}^n} \right\} \quad (p = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

die Gleichungen der Transformaten von

$$(262) \quad Q(x) = 0, \quad P(x) = 0$$

vermittels S^{-p} repräsentieren. Ist nun z. B. $a_1 \neq 0$ und $a_n \neq 0$, so bleibt der zweite Faktor der rechten Seite von (260) für alle Werte von p sicher unterhalb einer endlichen oberen Grenze. Wird dann x in irgend einem endlichen abgeschlossenen Bereich U gewählt, der keinen Häufungspunkt der Hyperebenen (261') enthält, so bleiben die Größen (260) bis auf endlich viele derselben unterhalb einer endlichen Grenze.

Nun konvergiert die Reihe

$$(263) \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(\kappa_1^p x_1 + \frac{1}{\kappa_1^p x_1} \right)^{-m}$$

wegen $|\kappa_1| < 1$ für $m > 0$ gleichmäßig und absolut in jedem endlichen Bereich, wo $x_1 \neq 0$ ist, wenigstens wenn endlich viele Glieder fortgelassen werden. Nach dem Vorhergehenden muß daher die in entsprechender Weise abgekürzte Reihe (258) im Bereich U gleichmäßig und absolut konvergieren.

88. Die Reihen (258) definieren automorphe Funktionen unserer zyklischen Gruppe, die in jedem Punkt meromorph sind, der keine Häufungsstelle der Gebilde (261') ist. Diese Gebilde sind algebraische Unstetigkeiten der betreffenden Funktionen. Ihre Häufungspunkte sind dann wesentliche Singularitäten.

Nach dem Vorhergehenden bestehen diese Singularitäten aus der Gesamtheit der den verschiedenen Normalfolgen (256) der Gruppe entsprechenden linearen Mannigfaltigkeiten

$$(264) \quad \sum_{\lambda=n-r+1}^n a_\lambda e^{i\omega_\lambda} x_\lambda + a_{n+1} = 0$$

und

$$(265) \quad \sum_{\lambda=1}^{\mu} a_\lambda e^{i\omega_\lambda} x_\lambda = 0.$$

Wir betrachten etwa die Gleichungen (265). Für $\mu = 1$ stellen sie alle die Hyperebene $x_1 = 0$ dar. Für $\mu = 2$ hat man die Gleichung

$$(266) \quad a_1 e^{i\omega_1} x_1 + a_2 e^{i\omega_2} x_2 = 0.$$

Hier sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nach dem die Zahl $\frac{1}{2\pi} \arg \frac{\omega_2}{\omega_1}$ rational oder irrational ist. Im ersten Falle kann nach (257) der Ausdruck $e^{i(\omega_1 - \omega_2)}$ nur endlich viele Werte annehmen, und die Gleichungen (266) stellen daher eine endliche Anzahl Hyperebenen dar. Im zweiten Falle

liegen nach einem bekannten Satze von KRONECKER [11] die kleinsten positiven Reste modulo 2π der Zahlen $p \arg \frac{x_2}{x_1}$ ($p = \pm 1, \pm 2, \dots$) überall dicht im Intervalle $(0, 2\pi)$, woraus folgt, daß die unendlich vielen Mannigfaltigkeiten (267) zusammen das ganze $(2n-1)$ -dimensionale Gebilde

$$(267) \quad |a_1 x_1| = |a_2 x_2|$$

repräsentieren, welches den Raum R_n in zwei Teile zerlegt.

Es sei schließlich $\mu \geq 3$. Wir begnügen uns damit, die beiden extremen Fälle zu behandeln.

Die eine extreme Möglichkeit ist, daß alle Zahlen $\frac{1}{2\pi} \arg \frac{x_\lambda}{x_1}$ ($\lambda = 2, 3, \dots, \mu$) rational sind. Wie oben hat man dann endlich viele Hyperebenen (265).

Der entgegengesetzte extreme Fall ist derjenige, wo zwischen den Größen $\frac{1}{2\pi} \arg \frac{x_\lambda}{x_1}$ keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten stattfindet oder, was dasselbe ist, wenn keine Gleichungen der Form

$$(268) \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_\mu^{q_\mu} = 1$$

gelten, wo die Exponenten ganze Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden. Nach dem Kroneckerschen Satz approximieren die Größensysteme

$$(269) \quad p \arg x_\lambda \pmod{2\pi} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \mu; p = 1, 2, 3, \dots)$$

dann alle Systeme von μ Zahlen, die sämtlich im Intervalle $(0, 2\pi)$ liegen. Die zu den Gebilden (265) gehörigen Punkte liegen daher überall dicht in dem Raum, der durch die Gleichung

$$(270) \quad \sum_{\lambda=1}^{\mu} e^{it_\lambda} a_\lambda x_\lambda = 0$$

dargestellt wird, wenn darin die reellen Größen t_λ unabhängig voneinander die Intervalle $(0, 2\pi)$ durchlaufen. Der betreffende Raum ist offenbar der Ort derjenigen Punkte, für welche die Gleichungen

$$(271) \quad |a_\kappa x_\kappa| \leq \sum_{\lambda=1}^{\mu'} |a_\lambda x_\lambda| \quad (\kappa = 1, 2, \dots, \mu)$$

gleichzeitig gelten, wo in $\sum'$ der Index $\lambda = \kappa$ auszuschließen ist. Diejenigen Punkte, die den Ungleichungen (271) nicht genügen, bilden einen zusammenhängenden Bereich, wie leicht einzusehen ist.

Indem wir mit den Gleichungen (264) analog verfahren, gelangen wir zum

Satz 37. *Ist in (257) wenigstens eine der Zahlen μ und ν größer als zwei, so füllen die wesentlichen Singularitäten der automorphen Funktionen im allgemeinen Bereiche aus, die von gleicher Dimension wie der Gesamtraum sind, und die durch ein System von Ungleichungen der Form (271) darstellbar sind.*

Wenn dagegen eine der Größen μ und ν gleich zwei, die andere gleich zwei oder eins ist, bilden die wesentlichen Singularitäten nur $(2n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, die durch (267) und analoge Gleichungen repräsentiert werden können.

Schließlich hat man im Falle $\mu = \nu = 1$ die Hyperebene $x_1 = 0$ und die unendlich ferne Hyperebene als einzige wesentliche Singularitäten.

Finden Relationen der Form (268) statt, so sind die wesentlichen Singularitäten von geringerer Mächtigkeit.

§ 28.

Hyperabelsche Funktionen.

89. Unter den automorphen Funktionen, die zu Gruppen nichtlinearer Substitutionen gehören, sind die bekanntesten die *hyperabelschen* Funktionen, d. h. die automorphen Funktionen der in § 13 betrachteten Gruppen reeller Substitutionen

$$(272) \quad x'_i = \frac{\alpha_i x_i + \beta_i}{\gamma_i x_i + \delta_i}; \quad D_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Es gibt hier einen invarianten Bereich:

$$(273) \quad I(x_1) > 0, \quad I(x_2) > 0, \dots, \quad I(x_n) > 0,$$

der durch eine Transformation der Form (272) auf den endlichen Bereich

$$(274) \quad |\xi_1| < 1, \quad |\xi_2| < 1, \dots, \quad |\xi_n| < 1$$

abgebildet werden kann. Wegen des Satzes 34 kann man im vorliegenden Falle den folgenden Satz aufstellen.

Satz 38. *Jede Gruppe reeller Substitutionen (272), die keine infinitesimale Substitution enthält, besitzt automorphe Funktionen, die im Bereich (273) meromorph sind (die hyperabelschen Funktionen).*

Wir denken uns die Substitutionen (272) so normiert, daß

$$D_1 D_2 \dots D_n = 1$$

wird. Dann nehmen die Reihen (207) folgende Gestalt an:

$$(275) \quad \sum H(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) (\gamma_1 x_1 + \delta_1)^{-2m} \dots (\gamma_n x_n + \delta_n)^{-2m}.$$

Um die Bedingungen für die Konvergenz dieser Reihen zu finden, gehen wir zum Raum der Variablen (ξ) über. Die Poincarésche Reihe (275) der transformierten Gruppe ist nach § 23 in jedem inneren Teilbereich von (274) für $m \geq 2$ gleichmäßig und absolut konvergent, wenn der Nenner $P(\xi)$ der rationalen Funktion $H(\xi)$ weder im Innern noch auf der Berandung des Bereichs (274) Nullpunkte aufweist, was z. B. durch die Wahl

$$(276) \quad P(\xi) = \sum_{v=1}^n c_v \xi_v + c_{n+1}$$

erreicht wird, wenn man

$$(277) \quad \sum_{v=1}^n |c_v| < |c_{n+1}|$$

annimmt. Beim Rückgang zu den Variablen (x) findet man, daß es für die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihen (275) in jedem abgeschlossenen Bereich des Raumes (273) hinreichend ist, daß $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ endlich bleibt, wenn alle Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ reell sind, und ferner, daß

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) x_1^m x_2^m \dots x_n^m$$

bei unbegrenzt wachsenden Variablen endlich bleibt.

90. Unter den hyperabelschen Funktionen sind in erster Linie diejenigen zu nennen, deren Gruppe den Bereich (110) als Normalbereich hat. Für diese Funktionen, zu denen u. a. die höheren Modulfunktionen gehören, ist (273) der wahre Existenzbereich.

Man kann aber auch Beispiele von hyperabelschen Funktionen finden, die nicht jeden Punkt der Begrenzung von (273) als wesentlich singuläre Stelle haben. Dann gibt es im allgemeinen wesentliche Singularitäten außerhalb des Bereiches (273), die beweglich, d. h. von der Wahl der Funktion H in der Reihe (275) abhängig sind. Dies ist z. B. mit den zyklischen Gruppen der Fall, wenn einige der Funktionen (272) aperiodische elliptische Substitutionen repräsentieren.

§ 29.

Andere Beispiele.

91. Die in No. 46 besprochenen Gruppen quadratischer Substitutionen gehören zur Kategorie der Gruppen mit einem endlichen invarianten Raum, woraus folgt, daß unsere funktionentheoretischen Resultate bei ihnen anwendbar sind. Die hierher gehörigen automorphen Funktionen hat GIRAUD in seiner These ausführlich untersucht. Das wichtigste Beispiel dieser Funktionen bilden die Quotienten der Thetanullwerte bei den abelschen Funktionen, wenn man sie in ihrer Abhängigkeit von den Normalperioden der abelschen Integrale betrachtet.

Die in § 15 untersuchten Gruppen der Hyperkugelverwandtschaften führen zu automorphen Funktionen mit festen wesentlichen Singularitäten. Diese Singularitäten bestehen nach der allgemeinen Theorie aus den Minimalhyperkegeln (118), die im betreffenden Raum diskret liegen.

In diesem Zusammenhang können schließlich die automorphen Funktionen der *Jonquièresschen Gruppen* genannt werden, die in einem interessanten Verhältnis zu den automorphen Funktionen einer Variablen stehen [19]. Es handelt sich hier um die Gruppen der Substitutionen der Form

$$(278) \quad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad y' = \frac{c_0 y + c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \dots + c_{n+1}}{(\gamma x + \delta)^n},$$

die nach einem zuerst von ENRIQUES ([5]; S. 342) bewiesenen Satz neben den Kollineationsgruppen und den Gruppen der Kreisverwandtschaften sowie ihrer Transformierten die einzigen Gruppen von Cremonasubstitutionen zweier Variablen sind, die in endlichen kontinuierlichen Cremonagruppen als Untergruppen enthalten sind.

§ 30.

Eine neue Darstellung automorpher Funktionen bei gewissen Gruppen.

92. Wir wollen hier zum Abschluß eine neue Art unendlicher Reihen einführen, die zur analytischen Darstellung automorpher Funktionen in gewissen wichtigen Fällen dienen können, unabhängig davon, ob die Bedingung (A') erfüllt ist oder nicht.

Es sei

$$(279) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$$

eine indefinite quadratische Form mit reellen ganzzahligen Koeffizienten. Es seien ferner $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1})$ und $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{n+1})$ zwei Punkte der Mannigfaltigkeit

$$(280) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0,$$

deren n erste Koordinaten paarweise übereinstimmende ganze Zahlen sind:

$$(281) \quad \eta_i = \bar{\eta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

während die letzten Koordinaten η_{n+1} und $\bar{\eta}_{n+1}$ konjugierte quadratische Irrationalitäten bezeichnen. Das Produkt

$$(282) \quad \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \eta_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \bar{\eta}_i \right),$$

dessen Faktoren gleich Null gesetzt Tangentenhyperebenen von (280) darstellen, geht dann bei Multiplikation mit einer geeigneten ganzen Zahl in eine zerfallende quadratische Form

$$(283) \quad \psi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z_{\mu, \nu} y_\mu y_\nu$$

über, deren Koeffizienten reelle ganze Zahlen sind.

Wir denken uns jetzt auf (283) die Gesamtheit aller linearen Substitutionen mit reellen ganzzahligen Koeffizienten ausgeübt, die die Form (279) invariant lassen. Dadurch erhalten wir eine unendliche Anzahl mit (283) arithmetisch äquivalenter Formen

$$(284) \quad \psi(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z'_{\mu, \nu} y_\mu y_\nu,$$

unter denen unendlich viele mit einander identische vorkommen können.

93. Wir bilden jetzt die Reihe

$$(285) \quad J(y) = \sum \frac{1}{\left(\sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z'_{\mu, \nu} y_\mu y_\nu \right)^q},$$

wo die äußere Summierung über die Gesamtheit der von einander verschiedenen Formen (284) zu erstrecken ist. Um die Konvergenz jener Reihe zu untersuchen, bemerken wir zunächst, daß die Gleichungen

$$(286) \quad \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z'_{\mu, \nu} y_\mu y_\nu = 0$$

Paare reeller Tangentenhyperebenen von (280) darstellen. Es sei (279) eine Form der Charakteristik 1 oder 2. Dann gibt es nach § 6 einen $2n$ -dimensio-

nalen Bereich, der Normalbereich B der Form (279), der keinen Punkt von (286) enthält.

Wir behaupten, daß die Reihe (285) für hinreichend großes ϱ in jedem abgeschlossenen Bereich B' , dessen Punkte im Innern von B liegen, gleichmäßig und absolut konvergiert.

Wir führen eine geeignete reelle ganzzahlige Substitution aus derart, daß B' von keiner Koordinatenhyperebene geschnitten wird. Wir zerlegen dann die Reihe (285) in $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Teilreihen, indem wir allgemein in $\Sigma_{\mu,\nu}$ diejenigen Glieder zusammenfassen, in welchen $z'_{\mu,\nu}$ dem absoluten Betrage nach der kleinste unter den Koeffizienten ist. (Sind mehrere kleinste Koeffizienten vorhanden, so kann ein beliebiger von ihnen zum kleinsten Koeffizienten gewählt werden.) Wir betrachten irgend eine dieser Teilreihen, z. B. $\Sigma_{n+1,n+1}$, die dem letzten Koeffizienten $z_{n+1,n+1}$ zugeordnet ist. Wir setzen $y_i: y_{n+1} = x_i$ und wir machen Gebrauch von der allgemeinen Formel (214). Für das allgemeine Glied von $\Sigma_{n+1,n+1}$ erhalten wir dann die Gleichung

$$(287) \quad |\Sigma z'_{\mu,\nu} y_\mu y_\nu| = |y_{n+1}|^2 \mathcal{A}(x, z') \sqrt{\Sigma' |z'_{\mu,\nu}|^2},$$

wo $\mathcal{A}(x, z')$ den Abstand des Punktes (x) von der dem Gebilde (286) zugeordneten Hyperebene

$$(288) \quad \sum_{\mu,\nu=1}^{n+1} z'_{\mu,\nu} t_{\mu,\nu} = 0$$

des Raumes (t) bezeichnet und wo bei der Summierung unter dem Wurzelzeichen die Kombination $\mu = \nu = n+1$ auszuschließen ist.

Nun ist nach unserer Annahme $y_{n+1} \neq 0$ im Bereiche B' . Ferner hat $\mathcal{A}(x, z')$ in B' eine von Null verschiedene untere Grenze. Das allgemeine Glied von $\Sigma_{n+1,n+1}$ ist somit dem absoluten Betrage nach kleiner als das mit einer gewissen endlichen Konstanten multiplizierte entsprechende Glied der Reihe

$$(289) \quad \sum \frac{1}{\{\Sigma' |z_{\mu,\nu}|^2\}^{\frac{\varrho}{2}}}.$$

Ferner ist, weil $z_{n+1,n+1}$ der kleinste unter den Koeffizienten ist,

$$(290) \quad \Sigma' |z_{\mu,\nu}|^2 \geq \frac{1}{2} \Sigma |z_{\mu,\nu}|^2,$$

wo rechts die Summe über alle Koeffizienten des betreffenden Gliedes zu erstrecken ist. Die Glieder von (289) sind daher kleiner als die mit einer Konstanten multiplizierten entsprechenden Glieder der Summe

$$(291) \quad \sum \frac{1}{\left\{ \sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} |z_{\mu, \nu}|^2 \right\}^{\frac{\varrho}{2}}}.$$

Nun ist die Reihe

$$\sum \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{n \frac{(n+1)}{2}}^2)^{\frac{\varrho}{2}}},$$

wo die Zahlen m unabhängig von einander alle ganze Zahlen durchlaufen (mit Ausschluß der Kombination $m_1 = m_2 = \dots = m_{n \frac{(n+1)}{2}} = 0$), konvergent, sobald

$$(292) \quad \varrho > \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für diese Werte von ϱ konvergiert also sicher die Reihe (291) und somit auch die Teilreihe $\Sigma_{n+1, n+1}$ von (285). Dasselbe gilt offenbar auch für die übrigen Teilreihen, und es ist somit unter der Bedingung (292) die Reihe (285) selbst im Bereich B' gleichmäßig und absolut konvergent.

94. Die Reihen (285) stellen im Bereich B ganze Funktionen dar, die ungeändert bleiben, wenn auf die Variablen y irgend eine ganzzahlige Substitution ausgeübt wird, die (279) invariant läßt, weil dabei nur die Glieder jener Reihe unter einander permutiert werden. Sie definieren also automorphe Formen der Gruppe der genannten homogenen ganzzahligen Substitutionen. Es seien $J_{\varrho_1}(y)$ und $J_{\varrho_2}(y)$ irgend zwei Formen dieser Art mit den Exponenten ϱ_1 bzw. ϱ_2 . Der Quotient

$$J_{\varrho_1}^{\varrho_2}(y) : J_{\varrho_2}^{\varrho_1}(y)$$

stellt dann eine automorphe Funktion der inhomogenen Gruppe dar, deren Existenzbereich mit dem Normalbereich der Form (279) identisch ist. Denn die Tangentenhyperebenen (286), die für die Glieder der Reihe (285) Unstetigkeitsgebilde sind, besitzen jede reelle Tangentenhyperebene von (280) als Häufungsgebilde, wie man leicht zeigen kann.

Auf die ganzzahligen Formen des Typus (55) angewandt führt die obige Methode zu einer neuen Darstellung der zugehörigen automorphen Funktionen, die neben der Darstellung mittels Poincaréscher Reihen angewandt werden kann.

Wichtiger ist aber der Umstand, daß die Reihen (285) auch bei Gruppen reeller Substitutionen, die eine Form der Charakteristik zwei (68) in sich selbst transformieren, zur Bildung automorpher Funktionen dienen können, die im

ganzen Normalbereich der Form existieren, was vermittle der Poincaréschen Reihen nicht möglich ist. Wegen der Resultate der No. 31 kann man im vorliegenden Fall den folgenden Satz aufstellen.

Satz 39. *Bei den Gruppen reeller ganzzahliger Substitutionen, die eine ganzzahlige Form des Typus (68) in sich selbst transformieren, stellt jede Reihe (285) im Falle $n > 3$ eine automorphe Form dar, die den Raum (72) zum Existenzbereich hat; im Falle $n = 3$ dagegen repräsentiert jede derartige Reihe gleichzeitig drei automorphe Formen, deren Existenzbereiche mit je einem der Raumteile zusammenfallen, die durch (73) definiert werden.*

Die obige Methode kann unmittelbar bei Hermiteschen Formen der Charakteristik Eins mit komplexen ganzzahligen Koeffizienten angewandt werden. Man gelangt dadurch zu einer neuen Methode zur analytischen Darstellung der hyperfuchsschen Funktionen.

VI. Arithmetische Invarianten.

§ 31.

Allgemeine Definitionen.

95. Das vorliegende letzte Kapitel ist der Untersuchung gewisser automorpher Funktionen gewidmet, die in der arithmetischen Formentheorie eine hervorragende Rolle spielen. Unsere Betrachtungen stehen in engem Zusammenhang mit dem in Kap. IV entwickelten Hesse-Kleinschen Übertragungsprinzip.

Es sei

$$(293) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \sum z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

eine Form beliebiger Ordnung der Variablen

$$(294) \quad y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

und mit den unbestimmten Koeffizienten z . Es sei ferner Γ_n die reelle Modulgruppe des Raumes R_n mit den homogenen Koordinaten (294), d. h. die Gruppe aller reellen ganzzahligen unimodularen Substitutionen

$$(295) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa} y_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Durch diese Substitutionen wird aus (293) eine unendliche Anzahl Formen

$$(296) \quad \varphi(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}) = \sum z'_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

erhalten, die mit der Form (293) arithmetisch äquivalent genannt werden und deren Gesamtheit eine Formenklasse (φ) bildet. Zwischen den Koeffizienten der transformierten (296) und der ursprünglichen Formen herrschen dabei die Relationen

$$(297) \quad z'_i = \sum_{\kappa=1}^{\nu+1} c_{i,\kappa} z_{\kappa} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu+1),$$

deren Koeffizienten $c_{i,\kappa}$ ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der entsprechenden Modulsubstitution (295) sind, deren Ordnung gleich derjenigen der Form (293) ist. Die Substitutionen (297) bilden eine mit der Modulgruppe isomorphe Gruppe, die wir mit $\Gamma_n(\varphi)$ bezeichnen.

96. Unter den Invarianten der Form (293) versteht man gewöhnlich rationale Funktionen der Koeffizienten (z), die bis auf eine Potenz der Determinante der Substitution ungeändert bleiben, wenn die Variablen (294) einer beliebigen linearen Substitution unterworfen werden. Die Bestimmung dieser Invarianten ist eine Aufgabe der algebraischen Invariantentheorie. Zu dieser Aufgabe kann man eine Analogie in der Theorie der automorphen Funktionen finden, indem man nach der Existenz von analytischen Funktionen der Koeffizienten der Form (293) fragt, die ungeändert bleiben, wenn man die Variablen (294) der Form nicht allen linearen Substitutionen, sondern nur den Substitutionen einer diskontinuierlichen Gruppe Γ unterwirft. Jene Funktionen wären, wenn sie existieren, automorphe Funktionen derjenigen projektiven Gruppe $\Gamma(\varphi)$, die vermöge des Hesse-Kleinschen Übertragungsprinzips durch Vermittlung der Form φ der Gruppe Γ zugeordnet wird.

Indem wir uns vorbehalten, in einem anderen Zusammenhang auf diese Fragen näher einzugehen, wollen wir im Folgenden näher denjenigen Fall betrachten, wo Γ mit der Modulgruppe Γ_n oder einer Untergruppe derselben identisch ist. Die zugeordneten automorphen Funktionen bilden eine Klasse transzendenter Invarianten, die in der Arithmetik der Formen von hervorragender Bedeutung sind. Wir können für sie die folgende Definition aufstellen:

Definition. *Unter einer arithmetischen Invariante der Form φ soll jede analytische Funktion*

$$(298) \quad I(z_1, z_2, \dots, z_{\nu})$$

der Koeffizienten z_λ der Form φ verstanden werden, die den Substitutionen (297) der Gruppe $\Gamma_n(\varphi)$ gegenüber un geändert bleibt. Jede arithmetische Invariante ist m. a. W. eine analytische Funktion der Koeffizienten z_λ , die ihren Wert behält, wenn die Form φ durch irgend eine arithmetisch äquivalente Form ersetzt wird.

In analoger Weise kann man die arithmetischen Invarianten für die Hermiteschen Formen definieren, wobei statt der reellen Modulgruppe Γ_n die Gruppe Γ_n^* aller unimodularen Substitutionen (295) mit ganzzahligen komplexen Koeffizienten des Körpers $(1, i)$ zu wählen ist.

Die folgenden Betrachtungen haben den Zweck, die Existenz arithmetischer Invarianten bei beliebigen gewöhnlichen und Hermiteschen Formen nachzuweisen und ihre wesentlichen Singularitäten zu studieren. Es handelt sich hier um eine sehr weitgehende Verallgemeinerung der analogen Betrachtungen, die POINCARÉ in seiner Arbeit „*Sur les invariants arithmétiques*“ [27] im Falle der binären linearen und quadratischen Formen ausgeführt hat.

In der analytischen Darstellung der arithmetischen Invarianten können die Poincaréschen Reihen nur im Falle der binären Formen verwertet werden. Im allgemeinen Falle ist es uns als zweckmäßig erschienen, arithmetische Invarianten durch unendliche Reihen darzustellen, die eine Verallgemeinerung der bekannten Reihen von DIRICHLET [4]

$$(299) \quad \sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

bilden. Diese verallgemeinerten Dirichletschen Reihen besitzen die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sie die arithmetischen Invarianten in jedem Falle in dem ganzen Existenzbereich darstellen. Dieser wichtige Satz ist eine direkte Folgerung der in Kap. IV entwickelten geometrischen Betrachtungen, und wir haben in demselben eine interessante Anwendung des Hesse-Kleinschen Prinzips in der transzendenten Funktionentheorie.

§ 32.

Binäre Formen.

97. Bevor wir zu der Betrachtung der Formen beliebig vieler Veränderlichen übergehen, wollen wir für sich die binären Formen behandeln, die schon nach dem Vorhergehenden eine gewissermaßen besondere Stellung einnehmen.

Es sei

$$(300) \quad \varphi(y_1, y_2) = \sum_{\lambda=0}^p \binom{p}{\lambda} y_1^{p-\lambda} y_2^\lambda$$

eine allgemeine binäre Form p -ter Ordnung. Die Gruppe Γ_1 ist die gewöhnliche Modulgruppe mit den Substitutionen

$$(301) \quad y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \quad \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right| = 1.$$

Indem wir die Koeffizienten

$$(302) \quad z_0, z_1, z_2, \dots, z_p$$

als homogene Punktkoordinaten des Raumes $R_p(z)$ auffassen, können wir die den Substitutionen (301) entsprechenden Substitutionen

$$(303) \quad z'_i = \sum_{\kappa=0}^p c_{i,\kappa} z_\kappa \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p)$$

als reelle Kollineationen des Raumes $R_p(z)$ interpretieren, welche die rationale Normalkurve p -ter Ordnung

$$C_p: \quad z_i = u_1^{p-i} u_2^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p)$$

in sich selbst überführen.

Nach No. 58 sind alle Normalfolgen der Gruppe $\Gamma_1(\varphi)$ vom Range Eins. Die Punkte (M_0) fallen mit den reellen Punkten der Kurve C_p zusammen. Die Elemente $(\bar{M}_{p-1})$ sind identisch mit den an den Punkten (M_0) gelegten Schmiegunghyperebenen von C_p . Es gibt Punkte im Raume $R_p(z)$, die keiner dieser Hyperebenen angehören, indem die letzteren nur eine $(2p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Ferner gibt es Hyperebenen L_{p-1} , die keinen der Punkte (M) enthalten, nämlich alle Hyperebenen

$$(304) \quad \sum_{\kappa=0}^p a_\kappa z_\kappa = 0,$$

welche die Normalkurve C_p in nicht reellen Punkten schneiden, m. a. W. für welche die Gleichung

$$(305) \quad \sum_{\nu=0}^p a_\nu \lambda^{p-\nu} = 0$$

keine reellen Wurzeln besitzt. Die Gruppe $\Gamma_1(\varphi)$ ist also mit ihrer korrelativen Gruppe normal diskontinuierlich, und sie gehört daher zu der in § 14 betrachteten Kategorie von Gruppen mit festen Häufungsgebilden.

Wir setzen

$$(306) \quad z_\kappa : z_0 = x_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, p),$$

wodurch wir für die Substitutionen (303) von $\Gamma_1(\varphi)$ die inhomogene Darstellung

$$(307) \quad x'_i = \frac{c_{i,0} + c_{i,1} x_1 + c_{i,2} x_2 + \dots + c_{i,p} x_p}{c_{0,0} + c_{0,1} x_1 + c_{0,2} x_2 + \dots + c_{0,p} x_p} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

erhalten. Es sei $H(x_1, x_2, \dots, x_p)$ eine rationale Funktion, die in den reellen Punkten von C_p endlich bleibt und bei welcher die Ordnung der Zähler wenigstens um $(p+1)m$ Einheiten kleiner als diejenige der Nenner ist. Dann ist die Reihe

$$(308) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum H(x'_1, x'_2, \dots, x'_p) \left\{ \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} \right\}^m$$

für $m \geq 2$ in jedem abgeschlossenen Bereich, dessen sämtliche Punkte dem Innern des Bereichs $B_0(\varphi)$ angehören, wenigstens nach Fortlassen endlich vieler Glieder, gleichmäßig und absolut konvergent. Der Ausdruck (308) definiert eine Θ -Funktion der inhomogenen Gruppe $\Gamma_*(\varphi)$, die der Funktionalgleichung

$$(309) \quad \Theta(x'_1, x'_2, \dots, x'_p) = \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p) \left\{ \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} \right\}^{-m}$$

genügt.

98. Wir bilden jetzt die Funktion

$$(310) \quad J(z_0, z_1, \dots, z_p) = \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p) z_0^{-m(p+1)}.$$

Wird

$$(311) \quad H(z_0, z_1, \dots, z_p) = H(x_1, x_2, \dots, x_p) z_0^{-m(p+1)}$$

gesetzt, so ergibt sich aus (308), wegen der Relation

$$(312) \quad \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} = \frac{1}{(c_{0,0} + c_{0,1} x_1 + \dots + c_{0,p} x_p)^{p+1}},$$

für (310) die analytische Darstellung

$$(313) \quad J(z_0, z_1, \dots, z_p) = \sum H(z'_0, z'_1, \dots, z'_p),$$

wo $(z'_0, z'_1, \dots, z'_p)$ die Gesamtheit der Substitutionen der homogenen Gruppen $\Gamma_*(\varphi)$ durchläuft. Diese Reihen stellen direkt arithmetische Invarianten unserer binären Form (300) dar, indem allgemein

$$(314) \quad J(z'_0, z'_1, \dots, z'_p) = J(z_0, z_1, \dots, z_p)$$

ist. Diese Invarianten sind homogene Funktionen der Variablen $z_0, z_1, \dots, z_p$ von der Dimension $-m(p+1)$.

Nach den früheren Resultaten ist jede reelle Schmiegunghyperebene der rationalen Normalkurve C_p ein wesentlich singuläres Gebilde für die durch die Reihen (308) und daher auch durch (313) definierten Funktionen. Nach Satz 25 zerlegen die fraglichen Hyperebenen den Raum $R_p(z)$ in $p+1$ Teile, die keinen Zusammenhang mit einander haben. Wir haben daher den

Satz 40. *Jede Reihe (313) definiert gleichzeitig $p+1$ arithmetische Invarianten der binären Form p -ter Ordnung (300), die je einen der $p+1$ Teile des Raumes $R_p(z)$ zum Existenzbereich haben, in welche der Gesamtraum durch die reellen Schmiegunghyperebenen der rationalen Normalkurve p -ter Ordnung C_p zerlegt wird.*

99. Wir betrachten als Beispiele die niedrigsten Fälle.

Für $p = 1$ reduziert sich (300) auf die lineare Form

$$(315) \quad z_0 y_1 + z_1 y_0.$$

Die Substitutionen (303) sind hier:

$$(316) \quad z'_0 = \alpha z_0 + \gamma z_1, \quad z'_1 = \beta z_0 + \delta z_1,$$

und ihre Gruppe ist die Modulgruppe. Die Reihen (313) haben im vorliegenden Falle die Gestalt

$$(317) \quad J(z_0, z_1) = \sum H(\alpha z_0 + \gamma z_1, \beta z_0 + \delta z_1),$$

und sie stellen die Modulformen dar. Jede Reihe definiert gleichzeitig zwei analytische Funktionen, die in der oberen bzw. unteren Halbebene von $z_1 : z_0$ existieren.

Für $p = 2$ geht (300) in die binäre quadratische Form

$$(318) \quad \varphi(y_1, y_2) = z_0 y_1^2 + 2z_1 y_1 y_2 + z_2 y_2^2$$

über. Die Substitutionen (297) haben den Ausdruck

$$(319) \quad \begin{aligned} z'_0 &= \alpha^2 z_0 + \alpha \gamma z_1 + \gamma^2 z_2, \\ z'_1 &= \alpha \beta z_0 + (\alpha \delta + \beta \gamma) z_1 + \gamma \delta z_2, \\ z'_2 &= \beta^2 z_0 + \beta \delta z_1 + \delta^2 z_2. \end{aligned}$$

Diese Substitutionen stellen reelle Kollineationen dar, welche den Kegelschnitt

$$(320) \quad z_0 z_2 - z_1^2 = 0$$

in sich überführen. Die Reihen (313):

$$(321) \quad J(z_0, z_1, z_2) = \sum H(z'_0, z'_1, z'_2)$$

repräsentieren Formen, die zu den automorphen Funktionen der in No. 30 betrachteten Gruppen für $n = 2$ in analogem Verhältnis stehen wie die Modulformen (317) zu den automorphen Funktionen einer Variablen. Jede Reihe (321) definiert drei analytische Funktionen, die je in einem der drei Räume existieren, in welche die reellen Tangenten des Kegelschnittes (320) den ganzen Raum zerlegen.

100. Es gibt noch eine zweite Methode zur Bildung arithmetischer Invarianten der binären Formen, die bei allen in lineare Faktoren zerlegbaren Formen anwendbar ist.

Wir schreiben die Form (300) in Faktoren zerlegt:

$$(322) \quad \varphi(y_1, y_2) = C(y_1 + x_1 y_2)(y_1 + x_2 y_2) \dots (y_1 + x_p y_2).$$

Ist

$$(323) \quad \varphi(y'_1, y'_2) = C'(y_1 + x'_1 y_2)(y_1 + x'_2 y_2) \dots (y_1 + x'_p y_2)$$

die Transformierte von (322) mittels der Substitution (301), so gelten die Relationen

$$(324) \quad x'_i = \frac{\delta x_i + \beta}{\gamma x_i + \alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Diese Substitutionen bilden eine hyperabelsche Gruppe. Jede automorphe Funktion dieser Gruppe kann als eine arithmetische Invariante unserer Form (322) angesehen werden.

Im vorliegenden Falle besitzen die Reihen (207) den Ausdruck

$$(325) \quad \sum H(x'_1, x'_2, \dots, x'_p) (\gamma x_1 + \alpha)^{-2m} (\gamma x_2 + \alpha)^{-2m} \dots (\gamma x_p + \alpha)^{-2m}.$$

Diese Reihen konvergieren nach No. 89 für $m \geq 2$ gleichmäßig und absolut in jedem Bereich, wo keine der Größen x_i ($i = 1, 2, \dots, p$) reell ist, wenigstens nach Fortlassung endlich vieler Glieder, wenn die rationale Funktion H den folgenden Bedingungen genügt:

1°. $H(x_1, x_2, \dots, x_p)$ soll endlich bleiben, wenn alle Koordinaten x_i reell sind.

2°. Das Produkt

$$(326) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_p) x_1^m x_2^m \dots x_p^m$$

soll einen bestimmten endlichen Wert haben, wenn die Größen $x_1, x_2, \dots, x_p$ unbegrenzt wachsen.

Zwischen den beiden Klassen der Invarianten der Form (300) herrscht eine einfache Relation. Werden nämlich die beiden Ausdrücke (300) und (322) der

Form miteinander verglichen, so gelangt man zu den Gleichungen

$$(327) \quad z_i : z_0 = \sum x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

wo rechts die i -te elementare symmetrische Funktion der Größen x_v auftritt. Durch die rationale Transformation (327) gehen die Invarianten der No. 97 in die zuletzt betrachteten Invarianten über.

Eine nähere Untersuchung der obigen Invarianten findet man in der oben zitierten Arbeit von POINCARÉ [27].

Die vorhergehenden Betrachtungen können unmittelbar dahin verallgemeinert werden, daß man die Modulgruppe durch eine beliebige in der komplexen Ebene diskontinuierliche Gruppe reeller linearer Substitutionen ersetzt. Man gelangt dadurch zu einer Verallgemeinerung des Äquivalenzbegriffs und der arithmetischen Invarianten von binären Formen. Wir wollen hierauf jedoch hier nicht näher eingehen.

§ 33.

Darstellung der arithmetischen Invarianten beliebiger Formen durch verallgemeinerte Dirichletsche Reihen.

101. Wir werden in diesem Paragraphen Reihen aufstellen, die zur analytischen Darstellung arithmetischer Invarianten der Formen

$$(328) \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \sum z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

beliebiger Ordnung p und einer beliebigen Anzahl der Variablen y dienen können.

Unsere Reihen haben den Ausdruck

$$(329) \quad I(z) = \sum_{y_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{y_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y_{n+1}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \right\}^s},$$

wo die Größen $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ voneinander unabhängig alle positiven und negativen Zahlen durchlaufen, ohne gleichzeitig zu verschwinden.

Um die Konvergenz der Reihe (329) zu untersuchen, deuten wir die Größen z wie vorher als homogene Punktkoordinaten in einem Raume $R(z)$. Die Gleichungen

$$(330) \quad \sum z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

stellen dann nach No. 55 reelle Schmiegunghyperebenen des Gebildes

$$(331) \quad V(\varphi): \quad z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} = (\lambda) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

dar. Indem man in (330) die Größen y alle oben genannten ganzen Wertkombinationen annehmen läßt, wird man eine abzählbare Menge Hyperebenen erhalten, die nach No. 56 jede reelle Schmiegunghyperebene des Gebildes (331) zum Häufungsgebilde haben.

Wir setzen nun, um nicht homogene Variablen zu erhalten,

$$(332) \quad z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} : z_{\lambda_1^0 \lambda_2^0 \dots \lambda_{n+1}^0} = x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}},$$

wobei $z_{\lambda_1^0 \lambda_2^0 \dots \lambda_{n+1}^0} \neq 0$ angenommen wird. Durch Anwendung der Formel (214) erhält man dann die Relation

$$(333) \quad \left| \sum' x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} + y_1^{\lambda_1^0} y_2^{\lambda_2^0} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}^0} \right| \\ = \mathcal{A}(x, y) \sqrt{\sum' |y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}|^2},$$

wo $\mathcal{A}(x, y)$ den Abstand des Punktes (x) von der Hyperebene (330) bezeichnet und wo in beiden Seiten in der Summierung das Wertsystem

$$(334) \quad \lambda_1 = \lambda_1^0, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0, \quad \dots, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^0$$

auszuschließen ist.

102. Wir nehmen nun an, daß die Form (328), wenn $n > 2$ ist, von gerader Ordnung ist. Dann gibt es nach Satz 24 im Raum $R(z)$ Punkte, die keiner reellen Schmiegunghyperebene von (331) angehören und deren Gesamtheit den Normalbereich $B_0(\varphi)$ bildet. Es sei U ein beliebiger abgeschlossener Bereich, dessen sämtliche Punkte im Innern von $B_0(\varphi)$ liegen. Wir behaupten, daß man stets durch Übergang zu einer mit φ arithmetisch äquivalenten Form erreichen kann, daß keine der Größen z_λ in U verschwindet.

Es sei nämlich σ eine Normalfolge ersten Ranges der Gruppe $\Gamma(\varphi)$, deren erstes Element mit irgend einem außerhalb der Koordinatenhyperebenen liegenden Punkt zusammenfällt. Nach Satz 6 konvergieren dann die Transformaten der genannten Hyperebenen mittels der inversen Substitutionen von σ gegen das zweite Element von σ , welches eine Hyperebene ist, die keinen inneren Punkt von $B_0(\varphi)$ enthält. Man kann somit eine Substitution S der Folge σ finden derart, daß die Transformaten sämtlicher Koordinatenhyperebenen $z_\lambda = 0$ mittels S^{-1} außerhalb des Bereichs U liegen. Wird dann die Form φ durch die arithmetisch äquivalente Form $S(\varphi)$ ersetzt, so bleiben alle Koeffizienten z_λ im Bereich U von Null verschieden, w. z. b. w.

Nun gilt im Bereich U die Ungleichung

$$(335) \quad \Delta(x, y) \geq \Delta_0 > 0,$$

wo Δ_0 der kürzeste Abstand der Berandungen von U und $B_0(\varphi)$ ist. Wir denken uns jetzt das System der Zahlen (334) so gewählt, daß keine derselben gleich p und daher alle übrigen gleich Null sind. Dann enthält die Summe in der rechten Seite von (333) u. a. alle Glieder der Form y_x^p ($x = 1, 2, \dots, n+1$), und es gilt daher die Ungleichung

$$(336) \quad \sum' |y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}|^2 \geq \sum_{x=1}^{n+1} y_x^{2p}.$$

Aus (334), (335) und (336) folgt, daß die Glieder der Reihe (329) dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die mit der endlichen Größe $\varepsilon_0^{-s} \Delta_0^{-s}$, wo ε_0 das von Null verschiedene Minimum von

$$(337) \quad \varepsilon_0^{\lambda_1} \lambda_2^{\lambda_2} \dots \lambda_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

im Bereich U bezeichnet, multiplizierten entsprechenden Glieder der Reihe

$$(338) \quad \sum_{y_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{y_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y_{n+1}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{x=1}^{n+1} y_x^{2p} \right\}^{\frac{s}{2}}}.$$

Nun konvergiert bekanntlich diese letztere Reihe für

$$(339) \quad s > \frac{n+1}{p}.$$

Nach dem Obigen ist dann die Reihe (329) im Bereich U gleichmäßig und absolut konvergent.

Wir haben daher den

Satz 41. Die Reihe (329) konvergiert für $s > \frac{n+1}{p}$ gleichmäßig und absolut in jedem abgeschlossenen Bereich, der im Innern des Normalbereichs $B_0(\varphi)$ gelegen ist. Vorausgesetzt wird dabei, daß im Falle $n > 2$ die Ordnung p der Form φ eine gerade Zahl ist, weil bei Formen ungerader Ordnung kein Normalbereich $B_0(\varphi)$ existiert.

103. Die Reihen (329) definieren analytische Funktionen der Variablen ε_λ , die im Bereich $B_0(\varphi)$ regulär sind. Ferner sind die reellen Schmiegunghyper-ebenen des Gebildes $V(\varphi)$, welche die Begrenzung von $B_0(\varphi)$ bilden, als Häufungs-gebilde der Mannigfaltigkeiten (330), die algebraische Unstetigkeitsgebilde ein-

zelter Glieder von (329) sind, wesentliche Singularitäten der durch die Reihen (329) definierten Funktionen.

Es sei nun

$$(340) \quad \varphi'(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \sum z'_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

eine beliebige mit (328) arithmetisch äquivalente Form, die daraus vermittle einer Substitution

$$(341) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\kappa} y_\kappa \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

der Modulgruppe Γ_n erhalten wird:

$$(342) \quad \varphi(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n+1}) = \varphi'(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}).$$

Lassen wir in (341) die Variablen y voneinander unabhängig alle ganzen Zahlen durchlaufen, ohne daß jedoch alle gleichzeitig Null werden, so werden die Variablen y' alle solchen ganzen Wertkombinationen gerade einmal annehmen. Daraus folgt, daß die absolut konvergente Reihe (329) nur ihre Glieder miteinander vertauscht, wenn die Koeffizienten $z_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}$ von (328) durch die Koeffizienten der mit (328) arithmetisch äquivalenten Form (340) ersetzt werden. M. a. W. stellen die Ausdrücke (329) arithmetische Invarianten unserer Form (328) dar.

Satz 42. *Die Reihen (329) definieren arithmetische Invarianten der Form (328), die im Normalbereich regulär sind. Die Randpunkte von $B_0(\varphi)$ sind für die Funktionen (329) wesentlich singuläre Stellen.*

Nach der in No. 54 gemachten Bemerkung verhalten sich die Funktionen regulär in jedem reellen Punkt (z), der einer definiten Form entspricht, während die den indefiniten reellen Formen entsprechenden Punkte (z) wesentliche Singularitäten für die Funktionen (329) sind. Die Reihen (329) haben wie die Poincaréschen Reihen die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sie zur analytischen Darstellung der durch dieselben definierten analytischen Funktionen in ihrem ganzen Existenzbereich dienen können.

Reihen der Form (329) hat MELLIN [12] in einer kürzlich erschienenen Abhandlung als Funktionen des Exponenten s untersucht, wodurch eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der Dirichletschen Reihen erhalten wird.

Wir wollen als Beispiele die Fälle $n = 1$ und $p = 2$, d. h. die binären Formen beliebiger Ordnung und die quadratischen Formen beliebig vieler Variablen etwas näher betrachten.

$$\underline{n = 1.}$$

104. Für die binären Formen nimmt die Reihe (329) den Ausdruck

$$(343) \quad \sum_{y_1 = -\infty}^{+\infty} \sum_{y_2 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} z_x y_1^{p-x} y_2^x \right\}^s}$$

an, und zwar ist sie für

$$(344) \quad s > \frac{2}{p}$$

absolut und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich konvergent, der keinen Punkt der reellen Tangentenhyperebenen der rationalen Normalkurve C_p enthält. Jede Reihe (343) definiert gleichzeitig $p+1$ analytische Funktionen, von denen jede je in einem zusammenhängenden Teil des Normalbereichs des Formtypus (300) existiert.

Für $p = 1$ erhält man aus (343) die Reihen

$$(345) \quad \sum_{y_1, y_2 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 y_1 + z_1 y_2)^s},$$

welche eine wichtige Rolle bei den elliptischen Funktionen spielen. Spezielle Fälle dieser Reihen sind die bekannten Reihen

$$(346) \quad g_2 = \sum_{y_1, y_2 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 y_1 + z_1 y_2)^4}, \quad g_3 = \sum_{y_1, y_2 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 y_1 + z_1 y_2)^6}$$

der Weierstraßschen Invarianten, durch welche bekanntlich die Funktionen (345) bei ganzem Werte von s rational dargestellt werden können.

Für $p = 2$ haben die Reihen (343) den Ausdruck

$$(347) \quad \sum_{y_1, y_2 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 y_1^2 + 2z_1 y_1 y_2 + z_2 y_2^2)^s}.$$

Diese Reihen spielen bei DIRICHLET [4] bei der Bestimmung der Klassenanzahl der binären quadratischen Formen eine wichtige Rolle. Wegen des Satzes 25 definiert jede der Reihen (347) gleichzeitig drei verschiedene analytische Funktionen, die je in einem der Raumteile existieren, in welche der Gesamttraum durch die reellen Tangenten des Kegelschnittes

$$(348) \quad z_0 z_2 - z_1^2 = 0$$

zerlegt wird.

$$\underline{p = 2.}$$

105. Wir wählen als zweites Beispiel die quadratischen Formen von beliebig vielen Veränderlichen

$$(349) \quad \varphi(y) = \sum_{i, \kappa=1}^{n+1} z_{i\kappa} y_i y_\kappa.$$

Die Reihen (329) haben hier die Gestalt

$$(350) \quad I(z) = \sum_{y_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{y_{n+1}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{i, \kappa=1}^{n+1} z_{i\kappa} y_i y_\kappa \right\}^s},$$

und sie konvergieren für $s > \frac{n+1}{2}$ in jedem inneren Teilbereich des Normalbereichs von (349) gleichmäßig und absolut. Nach Satz 27 definiert jede Reihe (350) für $s > \frac{n+1}{2}$ eine einzige analytische Funktion, die den Normalbereich des Formentypus (349) zum Existenzbereich hat.

Die Reihen (350) hat MINKOWSKI [13] in seinen Untersuchungen über die quadratischen Formen einer beliebigen Anzahl Variablen zu analogem Zweck angewandt wie DIRICHLET die Reihen (347).

§ 34.

Hermitesche Formen.

106. Die obigen Betrachtungen können dahin verallgemeinert werden, daß man statt der gewöhnlichen Formen die Formen mit konjugiert imaginären Variablen oder die Hermiteschen Formen zum Ausgangspunkt bei der Bildung arithmetischer Invarianten wählt.

Es sei

$$(351) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum z_{\lambda, \lambda'} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \bar{y}_2^{\lambda'_2} \cdots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}}$$

eine Hermitesche Form der Ordnung $2p$, wo also

$$(352) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{n+1} = p$$

ist. Ferner sei Γ'_n die Gruppe aller unimodularen Substitutionen

$$(353) \quad y'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \alpha_{i, \kappa} y_\kappa, \quad \bar{y}'_i = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \bar{\alpha}_{i, \kappa} \bar{y}_\kappa \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

mit den ganzzahligen komplexen Koeffizienten

$$(354) \quad \alpha_{i,x} = a_{i,x} + \sqrt{-1} \cdot b_{i,x} \quad (a, b \text{ reelle ganze Zahlen}).$$

Indem wir auf (351) die Gesamtheit der Substitutionen von Γ'_n anwenden, erhalten wir eine unendliche Anzahl mit (351) arithmetisch äquivalenter Formen

$$(355) \quad \psi'(y, \bar{y}) = \sum_{z_{\lambda, \lambda'}} y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}},$$

deren Koeffizienten mit den ursprünglichen Koeffizienten durch lineare Relationen

$$(356) \quad z'_i = \sum c_{i,x} z_x$$

zusammenhängen, wobei die Koeffizienten $c_{i,x}$ ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der Modulsubstitutionen (353) sind.

Definition. Unter einer arithmetischen Invariante der Hermiteschen Form (351) soll jede analytische Funktion $I(z)$ der Koeffizienten (z) der Form verstanden werden, die ungeändert bleibt, wenn man die Größen (z) durch die Koeffizienten einer beliebigen arithmetischen äquivalenten Form (355) ersetzt:

$$(357) \quad I(z') = I(z).$$

Die arithmetischen Invarianten sind m. a. W. automorphe Funktionen der Gruppe aller Substitutionen (356), die den Substitutionen (353) der komplexen Modulgruppe Γ'_n in obiger Weise zugeordnet sind.

107. Die Reihen (329) können unmittelbar auch zur Darstellung analytischer Invarianten Hermitescher Formen angewandt werden. Sie haben jetzt den Ausdruck

$$(358) \quad I(z) = \sum_{y'_1, y''_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y'_{n+1}, y''_{n+1} = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{z_{\lambda, \lambda'}} y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}} \right\}^s},$$

wo die reellen und imaginären Teile der komplexen ganzen Zahlen

$$(359) \quad y_x = y'_x + i y''_x \quad (x = 1, 2, \dots, n+1)$$

von einander unabhängig alle reellen ganzen Zahlen durchlaufen, ohne jedoch alle gleichzeitig zu verschwinden.

Um die Konvergenz der Reihen (358) zu untersuchen, setzen wir

$$(360) \quad z_{\lambda, \lambda'} : z_{\lambda^0, \lambda'^0} = x_{\lambda, \lambda'},$$

wo $\varepsilon_{\lambda^0, \lambda'^0}$ den Koeffizienten irgend eines Gliedes bezeichnet, das nicht die Form $y_x^p \bar{y}_x^p$ hat. Wie in No. 101 können wir dann

$$(361) \quad \left| \sum' x_{\lambda, \lambda'} y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}} + y_1^{\lambda_1^0} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}^0} \bar{y}_1^{\lambda_{n+1}^{10}} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda_{n+1}^{10}} \right| \\ = \mathcal{A}(x, y) \sqrt{\sum' |y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}}|^2}$$

setzen, wo $\mathcal{A}(x, y)$ den Abstand des Punktes (x) von der Hyperebene

$$(362) \quad \sum \varepsilon_{\lambda, \lambda'} y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}} = 0$$

bezeichnet und wo auf beiden Seiten bei der Summierung das System $\lambda = \lambda^0$, $\lambda' = \lambda'^0$ auszuschließen ist.

Es sei nun U ein beliebiger abgeschlossener Bereich, dessen Punkte im Innern des Normalbereichs von (351) liegen. Dann gilt im Bereich U eine Ungleichung der Form

$$(363) \quad \mathcal{A}(x, y) \geq \mathcal{A}_0 > 0.$$

Wir können ferner durch Übergang zu einer äquivalenten Form wie bei den gewöhnlichen Formen stets erreichen, daß alle Koeffizienten ε und daher auch $\varepsilon_{\lambda^0, \lambda'^0}$ in U von Null verschieden bleiben. Wie in No. 102 kann man dann nachweisen, daß die Reihe (358) in U gleichmäßig und absolut konvergiert, sobald die Reihe

$$(364) \quad \sum_{y'_1, y''_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y'_{n+1}, y''_{n+1} = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum' |y_1^{\lambda_1} \dots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \bar{y}_1^{\lambda'_1} \dots \bar{y}_{n+1}^{\lambda'_{n+1}}|^2 \right\}^{\frac{s}{2}}}$$

konvergent ist. Nach dem Obigen sind aber die Glieder dieser Reihe resp. kleiner als diejenigen der Reihe

$$(365) \quad \sum_{y'_1, y''_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y'_{n+1}, y''_{n+1} = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{x=1}^{n+1} |y_x|^{2p} \right\}^{\frac{s}{2}}}$$

und also a fortiori kleiner als die mit der endlichen Größe $\mathcal{A}_0^{-s} |\varepsilon_{\lambda^0, \lambda'^0}|^{-s}$ multiplizierten Glieder der Reihe

$$(366) \quad \sum_{y'_1, y''_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{y'_{n+1}, y''_{n+1} = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left\{ \sum_{x=1}^{n+1} (y_x^{2p} + y_x'^{2p}) \right\}^{\frac{s}{2}}}.$$

Diese letztere Reihe ist aber für

$$(367) \quad s > \frac{2n+1}{p}$$

konvergent. Wie in No. 102 kann man daraus den Schluß ziehen, daß die Reihe (364) unter der Bedingung (367) in jedem abgeschlossenen Bereich, dessen Punkte innere Punkte des Normalbereichs $B_0(\psi)$ sind, gleichmäßig und absolut konvergiert.

Die Reihen (364) definieren somit analytische Funktionen, die in dem Normalbereich $B_0(\psi)$ regulär sind, während alle Randpunkte dieses Bereichs, als Häufungspunkte der Gebilde (362), welche algebraische Unstetigkeiten für die einzelnen Glieder sind, wesentlich singuläre Stellen der Funktion sind. Diese Funktionen sind arithmetische Invarianten der Form (351), indem sie ungeändert bleiben, wenn die Koeffizienten z der Form ψ durch die Koeffizienten irgend einer mit ψ hinsichtlich der Gruppe Γ_n' äquivalenten Form ersetzt werden.

Wir haben somit den

Satz 43. *Die Reihen (358) stellen für $s > \frac{2n+1}{p}$ arithmetischen Invarianten der Hermiteschen Form (351) dar, die den Normalbereich $B_0(\psi)$ als wahren Existenzbereich haben und die in diesem Bereich regulär sind.*

108. Es liege im speziellen eine quadratische Hermitesche Form

$$(368) \quad \psi(y, \bar{y}) = \sum z_{ik} y_i \bar{y}_k$$

vor. Die zugeordnete Reihe (358) lautet:

$$(369) \quad I(z) = \sum_{y', y''=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\{\sum z_{ik} y_i \bar{y}_k\}^s},$$

welche Reihe nach (367) für $s > n + \frac{1}{2}$ in jedem inneren Teilbereich des Normalbereichs von (368) gleichmäßig und absolut konvergiert. Nach dem Satz 29 definiert die Reihe (369) stets eine einzige analytische Funktion.

Im niedrigsten Falle $n = 1$ erhält man aus (369) arithmetische Invarianten der binären quadratischen Hermiteschen Form

$$(370) \quad \psi(y, \bar{y}) = z_0 y_1 \bar{y}_1 + z_1 y_1 \bar{y}_2 + z_2 \bar{y}_1 y_2 + z_3 y_2 \bar{y}_2.$$

Durch die Transformation (195) gehen diese Invarianten in die automorphen Formen der Gruppen der ganzzahligen reellen Kollineationen über, die (196) in sich selbst transformieren.

§ 35.

Schlussbemerkungen.

109. Die Reihen (329) sind nicht die einzigen, die zur analytischen Darstellung arithmetischer Invarianten dienen können. Um allgemeinere Reihen zu erhalten, gehen wir von einer eindeutigen analytischen Funktion $F(\varphi)$ von φ aus. Ist die Reihe

$$(371) \quad \sum_{y_1, y_2, \dots, y_{n+1} = -\infty}^{+\infty} F\{\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})\}$$

in irgend einem Bereich des Raumes $R(z)$ gleichmäßig konvergent, so stellt dieselbe eine analytische Funktion dar, die eine arithmetische Invariante von φ ist. Die Reihen (329) werden aus (371) durch die Annahme $F = \varphi^{-s}$ erhalten. Zu einer anderen bemerkenswerten Klasse der Reihen (371) gelangt man durch die Annahme $F = e^{\varphi}$. Die betreffenden Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem Bereich des Raumes $R(z)$, dessen Punkten Formen φ mit negativ definitem reellen Teil entsprechen. Speziellen Fällen dieser Reihen begegnet man in der Theorie der abelschen Funktionen. In der Tat reduzieren sich die genannten Reihen bei den quadratischen Formen auf die Reihen

$$\sum_{y_1, y_2, \dots, y_{n+1} = -\infty}^{+\infty} e^{\sum_{\mu, \nu=1}^{n+1} z_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu}},$$

welche die Thetanullwerte repräsentieren.

110. Wir bemerken zum Abschluß, daß die vorhergehenden Betrachtungen in mehreren Richtungen verallgemeinert werden können.

Indem man Formensysteme statt einer einzigen Form betrachtet, kann die obige Methode zur Aufstellung simultaner arithmetischer Invarianten der Formensysteme angewandt werden. Man kann auch mehrere Reihen der Variablen in den Formen einführen und auf dieselben verschiedene Substitutionen anwenden. Ein sehr wichtiges Beispiel erhält man, wenn man für die Koeffizienten der auf die verschiedenen Variablensysteme bezogenen linearen Substitutionen konjugierte ganze Zahlen in einem System konjugierter algebraischer Zahlkörper wählt. Man gelangt dadurch zu arithmetischen Invarianten, die zu den algebraischen Zahlkörpern in analogem Verhältnis stehen wie die im Vorhergehenden untersuchten Invarianten zu dem Körper der rationalen Zahlen und dem quadratischen Körper mit den Einheiten 1 und i .

Literaturverzeichnis.

- [1] ANDOYER, H., *Leçons sur la théorie des formes*, tome I, Paris (1900).
 - [2] BLUMENTHAL, O., *Über die Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen*, Math. Ann., Bd. 56 (1903); Bd. 58 (1904).
 - [3] CLEBSCH, A., *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig (1872).
 - [4] DIRICHLET, G. L., *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres*, Journal de Crelle, tome 18.
 - [5] FANO, G., *Kontinuierliche geometrische Gruppen*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III Bd., A B 4 b (1907).
 - [6] FUBINI, G., *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Pisa, 1908.
 - [7] GIRAUD, G., *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris (1920).
 - [8] HESSE, O., *Ein Übertragungsprinzip*, Journal für Math., Bd. 66 (1866).
 - [9] KLEIN, F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen (1872).
 - [10] — und FRICKE, R., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, I. II, Leipzig und Berlin (1912).
 - [11] KRONECKER, L., *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen*, Werke, Bd. III, 1 (1899).
 - [12] MELLIN, H., *Über die analytische Fortsetzung von Funktionen, welche durch gewisse allgemeine Dirichletsche Reihen definiert sind*, Annales academiae scientiarum fennicae, ser. A, tom. XX, No. 10 (1923).
 - [13] MINKOWSKI, H., *Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz*, Gesammelte Abhandlungen, II Bd., XXI (1911).
 - [14] MONTEL, P., *Sur les familles de fonctions analytiques*, Annales de l'école normale, 3. série, 29 (1912).
 - [15] MYRBERG, P., *Über die automorphen Funktionen zweier Veränderlichen*, Acta mathematica, Bd. 43 (1922).
 - [16] — *Zur Theorie der automorphen Funktionen beliebig vieler Veränderlichen*, Acta societatis scientiarum fennicae, tom. L, No. 3 (1922).
 - [17] — *Über die Singularitäten der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen*, V^e Congrès des mathématiciens scandinaves à Helsingfors (1922).
 - [18] — *Über die automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Math. Annalen, Bd. 93 (1924).
 - [19] — *Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquièrescher Gruppen zweier Veränderlichen*, Math. Zeitschrift, Bd. 21 (1924).
 - [20] PICARD, E., *Sur une classe de groupes de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions*, Acta mathematica, Bd. 2 (1882).
 - [21] — *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires*, Acta mathematica, Bd. II 2 (1883).
 - [22] — *Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsienues correspondantes*, Acta mathematica, Bd. 5 (1884).
 - [23] — *Sur les fonctions hyperabéliennes*, Journal de mathématiques, 4^e série, t. I (1885).
 - [24] POINCARÉ, H., *Mémoire sur les fonctions fuchsienues*, Acta Mathematica, Bd. 1 (1882).
 - [25] — *Mémoire sur les fonctions kleinéens*, Acta mathematica, Bd. 3 (1883).
 - [26] — *Sur les groupes hyperfuchsienues*, Comptes rendus etc., t. 98 (1884).
 - [27] — *Sur les invariants arithmétiques*, Journal für Mathematik, Bd. 129 (1905).
-