ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER KINEMATISCHEN GEOMETRIE.

VON

J. HJELMSLEV

in KOPENHAGEN.

Einleitung.

Bei vielen bekannten Untersuchungen über kinematische Geometrie und andere Teile der Infinitesimalgeometrie herrschen unvollkommene Vorstellungen betreffend die Tragweite der Resultate. Die Untersuchungen sind entweder überhaupt nicht klar aufgefasst worden, oder sie werden auf solche Fälle beschränkt, die durch Bequemlichkeiten der angewandten Methode bestimmt werden.

Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchung steht der Cauchy'sche Satz, dass jede Bewegung in der Ebene durch eine Rollbewegung erzeugt werden kann. Es wird hier der Versuch gemacht, einen Beitrag zu geben, um den Inhalt und die Tragweite dieses Satzes und anderer verwandter Sätze kennen zu lernen.

I.

Der Momentanpol.

1. Wir wählen unseren Ausgangspunkt in dem üblichen Satz: Zwei gleichsinnig kongruente Figuren in derselben Ebene können durch eine Drehung (oder Parallelverschiebung) zur Deckung gebracht werden. Es sei nun eine ebene Bewegung in solcher Weise definiert, dass zwei Punkte A, B gegebene Kurven (A), (B) beschreiben, etwa so, dass die beiden veränderlichen Punkte A, B eindeutige und stetige Abbilder einer stetig wachsenden reellen Veränderlichen t sind, indem der Abstand AB dabei einen konstanten Wert behält. Fassen wir einen dritten

Punkt C ins Auge, welcher mit A und B fest verbunden ist; so ist zunächst klar, dass auch dieser Punkt (wenn nicht fest) eine Kurve, (C), beschreiben muss, indem seine Lage in eindeutiger und stetiger Weise dem Wert t entspricht. Wenn nun die Kurven (A), (B) in den betrachteten Punkten A, B bestimmte Tangenten aufweisen, und diese Tangenten nicht beide senkrecht auf der geraden Linie AB stehen, so muss die dritte Kurve (C) im Punkte C auch eine bestimmte Tangente haben, auf jeden Fall bis auf eine einzige Ausnahmslage des Punktes C. Der Beweis hierfür gestaltet sich folgendermassen:

Es sei $A' B' C'$ eine folgende Lage der Figur $A B C$ (vgl. Fig. 1), und es sei O' der Rotationspol der beiden kongruenten Figuren $A' B' C'$ und $A B C$. O' liegt dann auf den Mittelsenkrechten der drei Strecken AA', BB', CC', und da die beiden ersten von diesen Mittelsenkrechten gegen zwei verschiedene Grenzlagen konvergieren, nämlich die Normalen der Kurven (A) und (B) in A und B, wenn $A' B' C'$ nach $A B C$ konvergiert, so folgt, dass ihr Schnittpunkt O' auch einer bestimmten Grenzlage zustreben muss, nämlich dem Schnittpunkt O der beiden genannten Kurvennormalen in A und B, und hieraus folgt wiederum, dass die Mittelsenkrechte von CC' gegen eine bestimmte Grenzlage CO konvergieren muss, wobei allerdings vorauszusetzen ist, dass C nicht nach O fällt. Man ersieht zugleich, dass die Halbstrahlen AA', BB', CC', welche von A, B, C ausgehen und die Punkte A', B', C' enthalten, denselben Umlaufsinn um O' in der Ebene bestimmen, und es müssen deshalb ihre Grenzlagen die entsprechende Eigenschaft bezüglich O aufweisen. Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Wenn eine unveränderliche ebene Figur sich in ihrer Ebene bewegt und zwei Punkte A, B der Figur Kurven mit bestimmten Tangenten in A und B beschreiben, und diese Tangenten nicht beide senkrecht auf $A B$ stehen, so beschreibt jeder dritte Punkte C der Figur (auf jeden Fall bis auf eine einzige Ausnahme) eine Kurve mit bestimmter Tangente in C.*

Sämmtliche Normalen der Bahnkurven gehen für die augenblickliche Lage $A B C$ der Figur durch einen und denselben Punkt O, den Schnittpunkt der Normalen der beiden von A und B beschriebenen Kurven. Dieser Punkt wird als Momentanpol der Figur für die Lage A B C bezeichnet.

Die Bahnkurve desjenigen Punktes der Figur, welcher im Augenblick nach O fällt, hat unter den gemachten Voraussetzungen nicht notwendig eine bestimmte Tangente in O.

Ist A von O verschieden, und hat die von A beschriebene Kurve entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten in A, so wird die entsprechende Eigenschaft auch den übrigen Bahnkurven zukommen (die von O beschriebene Kurve ausgenommen) und zusammengehörige Halbtangenten in $A, B, C, \ldots$ bestimmen denselben Umlaufssinn um O.

2. Jede gerade Linie l in der Figur $A\,B\,C$ besitzt einen bestimmten *Charakteristikpunkt,* d. h. eine bestimmte Grenzlage des Schnittpunktes von l mit der entsprechenden Linie l' der Figur $A'\,B'\,C'$, wenn $A'\,B'\,C'$ gegen $A\,B\,C$ konvergiert. Da nämlich der Rotationspol O' der beiden Figuren gleich weit von l und l' absteht, muss er auf der Halbierungslinie eines der beiden Winkeln zwischen l und l' liegen, und es folgt hieraus, dass der Schnittpunkt von l mit l' gegen die senkrechte Projektion von O auf l konvergieren muss.

Wenn die Kurven (A), (B) stetig variierende, für jeden inneren Punkt entgegengesetzt gerichtete, Halbtangenten besitzen, so werden, wie aus unseren obigen Betrachtungen hervorgeht, auch die von den übrigen Punkten der Figur (O ausgenommen) beschriebenen Kurven die gleiche Eigenschaft haben, und die Charakteristikpunkte der durch die Bewegung entstehenden verschiedenen Lagen einer geraden Linie l der Figur erzeugen eine Kurve. Es ist aber unsicher ob diese Kurve Tangenten besitzt, und wir können deshalb auf Grund der hier gemachten Voraussetzungen noch nicht von einer Hüllkurve im gewöhnlichen Sinne sprechen.

II.

Schmiegungskreise.

3. Wenn eine Kurve in einem Punkte P eine bestimmte Tangente besitzt, kann man von einem oder mehreren *Schmiegungskreisen* in diesem Punkte sprechen. Man versteht darunter eine Grenzlage eines Kreises, welcher die Kurve in P berührt und durch einen anderen von P verschiedenen und nach P konvergierenden Kurvenpunkt Q hindurchgeht. Je nachdem Q von der einen oder anderen Seite gegen P konvergiert, spricht man von einem Schmiegungskreise in P nach der einen oder anderen Seite. Im allgemeinen gibt es in jedem Punkte P der Kurve nach jeder Seite hin unendlich viele Schmiegungskreise. Es kann aber der Fall eintreffen, dass nur ein Schmiegungskreis in P vorhanden ist. Dieser Fall ist besonders wichtig, und wir wollen die folgenden Untersuchungen im wesentlichen auf diesen Fall beschränken; doch sei ausdrücklich hervorgehoben,

dass man die Behandlung der allgemeineren Fälle durch dieselben Hülfsmittel, die für den speziellen Fall angewandt werden, ohne Schwierigkeiten durchführen kann. Es kommt nur darauf an, den Grenzübergang des Nachbarpunktes P' nach P in der Weise zu vollziehen, dass P' eine Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ durchläuft, die so herausgewählt wird, dass die entsprechende Grenzlage des Kreises eindeutig wird, um dann alle mögliche solche Punktfolgen in Betracht zu ziehen.

4. Wir nehmen nun wie früher an, dass zwei Punkte A, B einer beweg-

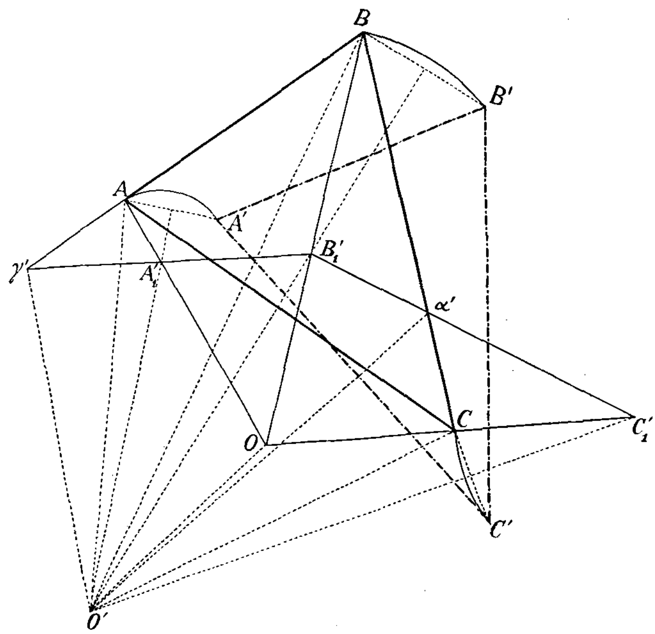

Fig. 1.

lichen Figur in der Ebene zwei Kurven (A), (B) durchlaufen, welche in A und B bestimmte Tangenten haben, deren keine nunmehr senkrecht zu AB ist; es folgt hieraus, dass weder A noch B nach dem Momentanpol O fällt. Ferner setzen wir voraus, dass die Kurven in A und B bestimmte Schmiegungskreise haben. Die Mittelpunkte dieser Kreise seien mit A_1 und B_1 bezeichnet; sie liegen auf den beiden Normalen AO, BO der Kurven (A), (B) und sollen zunächst als von O verschieden vorausgesetzt werden; ferner nehmen wir an, dass A_1 nicht nach A und B_1 nicht nach B fällt. Die Punkte A, B sollen natürlich im Endlichen liegen; A_1, B_1 und O hingegen können auch unendlich ferne Lagen annehmen.

Wir wollen nun untersuchen, ob von einem beliebigen dritten von O verschiedenen Punkt C der beweglichen Figur eine Bahn mit bestimmtem Schmiegungskreis in C beschrieben werden muss, und in bejahendem Falle, wie dieser Kreis konstruiert werden kann.

5. Es gehe die Figur $A\,B\,C$ in die neue Lage $A'\,B'\,C'$ über (Fig. 1). Der Rotationspol O' der beiden Figuren liegt auf den drei Mittelsenkrechten von AA', BB' CC', und diese Mittelsenkrechten schneiden AO, BO, CO in A'_1, B'_1, C'_1. Die drei letztgenannten Punkte sind die Mittelpunkte von drei Kreisen, welche die von A, B, C beschriebenen Kurven in A, B, C berühren und ausserdem durch A', B', C' gehen. Wenn $A'\,B'\,C'$ gegen $A\,B\,C$ konvergiert, so werden die genannten Kreise gegen Schmiegungskreise der drei Bahnen konvergieren; A_1', B_1' konvergieren dabei nach bestimmten Grenzlagen A_1, B_1, und wir werden nun zusehen, ob auch C_1' einer bestimmten Grenzlage zustreben muss.

Da O' nach O konvergiert, können wir nach unseren oben gemachten Voraussetzungen annehmen, dass O' — während des Grenzüberganges, auf jeden Fall zuletzt, von A, B, A'_1, B_1' und von dem Schnittpunkt γ' der beiden Geraden $A\,B$, $A'_1\,B'_1$ verschieden ist. Wir können ferner annehmen, dass O', auf jeden Fall zuletzt, von O verschieden ist. Es müssten sonst bei dem Grenzübergange immer solche Lagen $A'\,B'\,C'$ vorkommen, wo $A'_1\,O'$, $B'_1\,O'$ mit AO, BO zusammenfielen, was augenscheinlich bedeuten würde, dass die betreffende Lage $A'\,B'\,C'$ mit $A\,B\,C$ zusammenfiele; derartige Lagen sind aber, wenn sie vorkommen, bei dem vorliegenden Grenzübergang auszuschliessen, wenn überhaupt in solchen Fällen unsere Grenzbestimmungen irgend einen Sinn haben sollen.

6. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen können wir nun die folgende Betrachtung durchführen:

Von O' aus projizieren wir die drei Eckenpaare des von den geraden Linien $A\,A'_1$, $B\,B'_1$, $A\,B$, $A'_1\,B'_1$ gebildeten vollständigen Vierseits. Die hierdurch erzeugten Linienpaare

$$O'A,\ O'B'_1;\quad O'A'_1,\ O'B;\quad O'\gamma',\ O'O$$

gehören nach dem bekannten Desargues'schen Satz derselben Involution an; da aber der Winkel von $O'A$ nach $O'A'_1$ und der Winkel von $O'B$ nach $O'B'_1$ einander gleich sind, weil beide Winkel die Hälfte des Drehwinkels von der Lage $A\,B\,C$ nach der Lage $A'\,B'\,C'$ ausmachen, so haben die Winkel des ersten von den obengenannten drei Linienpaaren dieselben Halbierungslinien wie die Winkel des zweiten Linienpaares, und es folgt hieraus, dass alle drei Linienpaare

Winkel mit gemeinsamen Halbierungslinien einschliessen müssen. Es wird sonach der Winkel von $O'A$ nach $O'\gamma'$ gleich dem Winkel von $O'B'_1$ nach $O'O$ mit entgegengesetzten Vorzeichen. Wir drücken dies in Zeichen so aus:

$$(O'A,\ O'\gamma') = -(O'B'_1,\ O'O).$$

Wenn O' nach O konvergiert, wird γ' nach dem Schnittpunkt γ von AB mit A_1B_1 konvergieren (Fig. 2), und die Linie $O'O$ muss dann nach der obigen Gleichung einer Grenzlage t zustreben, derart, dass

$$(OA,\ O\gamma) = -(OB,\ t).$$

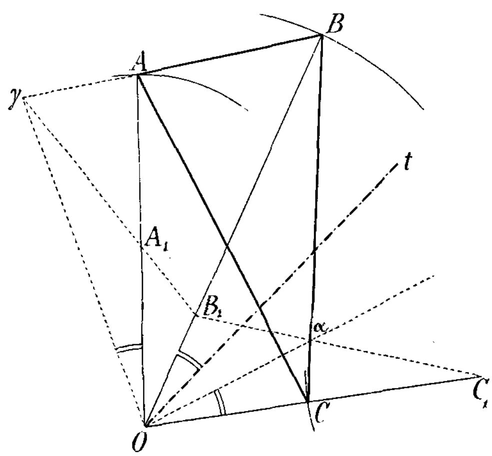

Fig. 2.

Dabei ist allerdings vorausgesetzt, dass O nicht unendlich fern liegt. Für diesen Fall ergibt sich aber sofort, wenn man die in Betracht kommenden von O' ausgehenden veränderlichen Linien mit einer beliebigen (nicht durch O gehenden) festen Geraden schneidet, dass die gefundene Beziehung doch auch hier aufrecht erhalten werden kann, wenn man nur unter $(OA,\ O\gamma)$ und $(OB,\ t)$ die Abstände zwischen den in den Klammern vorkommenden Linien versteht. Die Linie t ist somit in jedem Falle eindeutig bestimmt.

Es sei beiläufig hervorgehoben, dass t bei unseren Annahmen notwendigerweise von den beiden Geraden OA, OB verschieden sein muss.

Für den allgemeinen Fall, wo O nicht unendlich fern liegt, soll noch eine Bemerkung hinzugefügt werden, welche für die folgenden Untersuchungen von Nutzen sein wird. $A'B'C'$ kann durch die bei der vorgelegten Bewegung bestimmten Lagen der Figur auf zwei wesentlich verschiedene Weisen gegen ABC konvergieren, je nachdem A' gegen A von der einen oder anderen Seite auf der von A beschriebenen Bahnkurve konvergiert, und die Mittelsenkrechte zu AA' wird offenbar während des Grenzüberganges die gerade Linie t in einem Punkte schneiden, welcher auf der einen oder anderen Seite von O liegt, je nachdem der eine oder der andere Bewegungssinn für den gegen A konvergierenden Punkt A' gewählt wird. Hieraus schliesst man weiter, dass in den beiden Fällen der Halbstrahl OO', welcher von O ausgeht und O' enthält, gegen den einen oder den anderen von den beiden Halbstrahlen konvergiert, in welche t durch den Punkt O zerlegt wird.

7. Indem wir nun zu unserer Untersuchung betreffend der Grenzlage des Punktes C'_1 zurückkehren, setzen wir im folgenden voraus, dass C nicht auf der Linie OB liegt (Fig. 1). Die Linien BB'_1 und CC'_1 sind dann verschieden, und keine von ihnen fällt mit BC zusammen. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden BC und $B'_1 C'_1$ mit α', so ergibt sich wie oben:

$$(O'C,\ O'\alpha') = -(O'B'_1,\ O'O);$$

man erhält sonach eine bestimmte Grenzlage α für α', derart, dass (Fig. 2)

$$(OC,\ O\alpha) = -(OB,\ t).$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der oben gefundenen, so hat man

$$(OC,\ O\alpha) = (OA,\ O\gamma),$$

wodurch α, und somit die Grenzlage C_1 des veränderlichen Punktes C'_1, eindeutig bestimmt wird.

Die hierdurch erzielte Konstruktion des Mittelpunktes C_1 des Schmiegungskreises für die von C beschriebene Bahn in C ist, wie man sieht, mit der bekannten Bobillier'schen Konstruktion identisch. Auf Grund dieser Konstruktion lässt sich dann natürlich die ganze Verwandschaft der beiden Figuren $ABC\cdots$ und $A_1 B_1 C_1 \cdots$ studieren, was wir doch hier nicht weiter zu verfolgen brauchen. Wir beschränken uns auf die Formulierung des folgenden Satzes:

Satz 2. *Wenn die Punkte A, B einer beweglichen Figur in der Ebene zwei Kurven mit bestimmten Tangenten in A und B beschreiben, deren keine senkrecht zu AB ist; wenn ferner diese Kurven in A und B bestimmte Schmiegungskreise haben, deren Mittelpunkte von dem Momentanpol verschieden sind, und wenn keiner* *dieser Kreise den Radius Null hat, so wird jeder beliebige Punkt C der Figur (mit Ausnahme des Momentanpols) eine Bahn beschreiben, welche eine bestimmte Tangente und einen bestimmten Schmiegungskreis in C besitzt. Der Mittelpunkt C_1 dieses Kreises ist nach der Bobillierschen Konstruktion zu finden.*

Für den Fall, dass der Momentanpol unendlich fern liegt, wird diese Konstruktion in einfacher Weise modifiziert (vgl. die Bemerkung oben (6)).

8. Auch in einzelnen Fällen, die bei unserer Untersuchung ausgeschlossen wurden, wäre es leicht unsere Überlegungen durchzuführen. Wir erwähnen ins besondere die folgenden zwei Spezialfälle:

1. *A_1 fällt nach O, B_1 ist aber von O verschieden.* Es folgt dann aus den oben gegebenen Betrachtungen, dass wenn O' von A'_1 verschieden ist, die Linie t (die Grenzlage von OO') mit AO zusammenfällt. Fällt O' nach A'_1, ist die Gerade OO' mit AO identisch. Für alle Fälle gilt es also, dass $OO' \rightarrow t = AO$. Es lässt sich dann ohne Schwierigkeit die Bobillier'sche Konstruktion auch hier verwerten.

Danach schliesst man indirekt, dass wenn beide Punkte A_1 und B_1 nach O fallen, der Punkt C_1 auch nach O fallen muss, jedenfalls wenn C nicht auf OA oder OB liegt (vgl. unten).

2. *A_1 fällt nach A, B_1 ist von B verschieden.* Die Linie t fällt dann mit OB zusammen, α fällt nach C, d. h. C_1 fällt nach C, wenn nur C nicht auf OB gelegen angenommen wird. Für den Fall, wo C auf OB liegt, weisen wir auf den folgenden Satz hin.

9. **Satz 3.** *Wenn einer bestimmten Lage einer beweglichen Figur der Ebene ein bestimmter Momentanpol O entspricht, und die Bahn eines (nicht nach O fallenden) Punktes A einen bestimmten Schmiegungskreis besitzt, so werden alle Punkte $ABC\cdots$ der geraden Linie OA (O ausgenommen) Kurven mit bestimmten Schmiegungskreisen beschreiben, und die Mittelpunkte $A_1 B_1 C_1 \cdots$ dieser Kreise bilden eine Punktreihe projektiv mit $ABC\cdots$, derart, dass die beiden Punktreihen zusammenfallende Doppelpunkte in O haben.*

Beweis: Die gerade Linie l mit der Punktreihe $ABC\cdots$ gehe in einer benachbarte Lage l' mit der entsprechenden Punktreihe $A'B'C'\cdots$ über (Fig. 3). Der Rotationspol der beiden kongruenten Reihen $ABC\cdots$ und $A'B'C'\cdots$ sei O'. Den Schnittpunkt von l mit l' bezeichnen wir mit S'; rechnet man diesen Punkt mit zur Reihe $A'B'C'\cdots$, findet man einen entsprechenden Punkt S in der Reihe $A\,B\,C\cdots$ Lässt man l' gegen l konvergieren, wird O' gegen O konvergieren, und ebenso auch S' gegen S.

Die Mittelpunkte $A'', B'', C'', \ldots S''$ der Strecken $AA', BB', CC', \ldots SS'$ liegen in einer geraden Linie l'', deren Schnittpunkt S'' mit l bei dem Grenzübergang nach O konvergiert. Projiziert man von O' aus die drei Eckenpaare des von den Linien l, l'', AA'', BB'' gebildeten vollständigen Vierseits, so entstehen 3 Linienpaare, welche einer Involution angehören. Diese Linienpaare werden von l in 3 Punktepaaren geschnitten, von denen das erste Paar A'_1, B bei dem

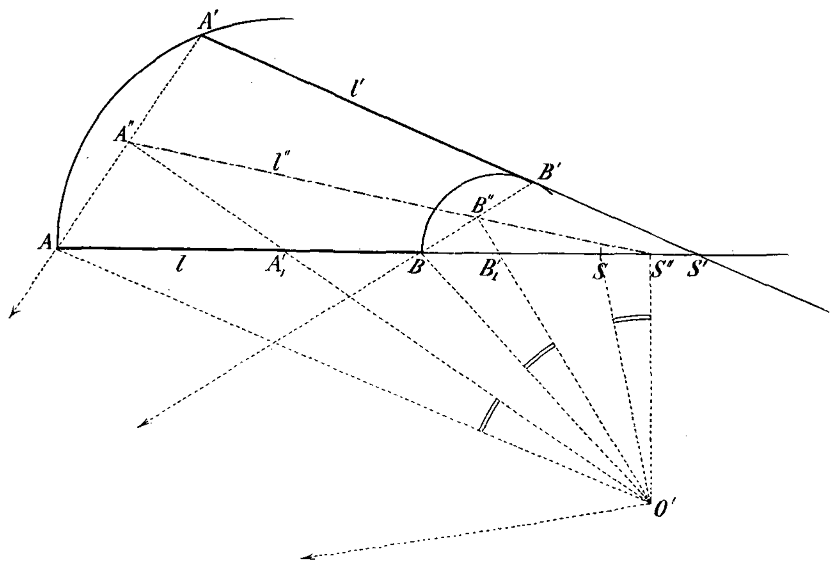

Fig. 3.

Grenzübergang nach A_1, B konvergiert, während das zweite Paar in den einzigen Punkt O zusammenrückt; von den beiden Punkten des dritten Punktepaares A, B_1 fällt ein Punkt nach A und der andere muss dann gegen eine bestimmte Grenzlage B_1 konvergieren, derart, dass die Punktepaare A_1, B; A, B_1 einer Involution mit dem Doppelpunkt O angehören. Der so bestimmte Punkt B_1 ist der Mittelpunkt des Schmiegungskreises in B. Das gewonnene Resultat wird bequemer so ausgesprochen: Die Punkte A, A_1; B, B_1 sind zusammengehörige Punktepaare zweier kollokalen projektiven Punktreihen mit zusammenfallenden Doppelpunkten in O.

Der besondere Fall, wo A_1 nach O fällt, macht keine Schwierigkeit. Der Grenzübergang führt hier sofort zu dem Resultat, dass B_1 auch nach O fällt. Den Punkten $A\,B\,C\cdots$ der geraden Linie $O\,A$ (O ausgenommen) entsprechen somit konzentrische Schmiegungskreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt nach O fällt.

10. Nach den hier gewonnenen Resultaten lässt sich nunmehr der Satz 2 durch die folgenden Sätze 4, 5 vervollständigen:

Satz 4. *Bei jeder ebenen Bewegung mit einem bestimmten Momentanpol O gibt es ausserhalb dieses Punktes im allgemeinen keinen Punkt, dessen Bahn einen bestimmten Schmiegungskreis mit dem Radius Null besitzt. Existiert aber ein solcher Punkt, so gibt es deren unendlich viele, indem entweder alle Punkte der Ebene (O nicht mitgenommen) die genannte Eigenschaft haben, oder auf jeden Fall alle Punkte mit Ausnahme der Punkte einer gewissen geraden Linie durch O.*

Satz 5. *Wenn bei einer ebenen Bewegung mit einem bestimmten Momentanpol O zwei Punkte A, B vorhanden sind, welche nicht mit O auf einer geraden Linie liegen, und deren Bahnkurven konzentrische Schmiegungskreise mit dem Mittelpunkt O haben, so werden alle Bahnkurven (die Bahn von dem augenblicklich nach O fallenden Punkte ausgenommen) konzentrische Schmiegungskreise mit dem Mittelpunkt O haben.*

Das einfachste Beispiel einer solchen Bewegung ist die Drehung um einen festen Punkt O.

11. Den Punkt, der im Augenblick im Momentanpol O liegt, haben wir bisher von unseren Untersuchungen ausgeschlossen. Über die von diesem Punkt beschriebene Bahn lässt sich aber für den allgemeinen Fall, welcher im Satz 2 behandelt wurde, folgendes aussagen: Da der in Rede stehende Punkt O durch Drehung um den Rotationspol der beiden Figuren ABC, $A'B'C'$ in eine folgende Lage übergeführt werden kann, welche gegen O konvergiert, indem der Drehwinkel nach Null konvergiert, so ergibt sich sofort, dass *die beschriebene Bahn in O eine bestimmte Tangente senkrecht zu t haben muss.* Wenn nun die Halbtangenten der von A beschriebene Kurve in A entgegengesetzt gerichtet sind, so folgt, dass die Drehung um O' von ABC nach $A'B'C'$ in der einen oder der anderen Richtung vor sich geht, je nachdem der Punkt O' von den einen oder anderen Seite nach O konvergiert, und daher müssen *die beiden Halbtangenten der in Rede stehenden Bahnkurve in O zusammenfallen.* Fallen hingegen die Halbtangenten der Kurve (A) zusammen, so muss ungekehrt die Bahnkurve in O entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten haben.

Wie man für die Konstruktion von Schmiegungskreisen die Tangente der Bahnkurve in O verwerten kann, ist nunmehr auch klar.

III.

Stetig gekrümmte Kurven.

12. **Satz 6.** *Wenn ein ebener Bogen β ohne Doppelpunkte in jedem Punkte eine bestimmte Tangente, und in jedem inneren Punkte entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten hat, und wenn ausserdem jeder Punkt des Bogens einen bestimmten mit dem Punkt stetig variierenden Schmiegungskreis besitzt, dessen Radius von Null verschieden ist, so wird der Schmiegungskreis in einem beliebigen Punkt P des Bogens die eindeutig bestimmte Grenzlage eines veränderlichen Kreises γ darstellen, welcher den Bogen in einem Punkt A berührt und durch einen anderen Punkt B des Bogens hindurchgeht, indem A und B in beliebiger Weise längs der Kurve nach P konvergieren.*

Beweis: Der Kreis γ berührt den Bogen β in A und geht ausserdem durch den Punkt B dieses Bogens hindurch. Zunächst nehmen wir nun an, dass der auf β zwischen A und B abgeschnittene Bogen keinen anderen Punkt als A und B mit γ gemein hat. Ferner lassen wir A und B innerhalb einer gewissen kleinen Umgebung von P variieren, derart, dass die Tangenten je zweier beliebiger Punkte des Bogens β innerhalb dieser Umgebung einen spitzen Winkel bilden, welcher einen gewissen kleinen im voraus gewählten Wert ε nicht überschreitet; es folgt dann hieraus, dass die Tangente in A und die Sekante AB einen spitzen Winkel $\leqq \varepsilon$ bilden.

Auf dem Kreis γ fassen wir nun den dem Punkt A diametral gegenüberliegenden Punkt Q ins Auge. Mittels einer Inversion, d. h. einer Transformation durch reziproke Radien, mit dem Zentrum Q führen wir den Teilbogen AB von β in einen neuen Bogen $A'B'$ über. Dieser ganz im Endlichen liegende Bogen hat keine Doppelpunkte, besitzt in jedem Punkt eine bestimmte Tangente und in jedem inneren Punkt entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten; die Halbtangente in dem Endpunkte A' geht durch den anderen Endpunkt hindurch, weil diese Halbtangente durch Transformation des entsprechenden Halbkreises AQ entsteht; ferner hat die Tangente in A' keinen anderen Punkt als A' und B' mit dem Bogen $A'B'$ gemein, weil der Kreis γ keine anderen Punkte als A und B mit dem Bogen AB gemein hat. Aus diesen Tatsachen schliessen wir, dass der Bogen $A'B'$ wenigstens einen Wendepunkt C' enthalten muss,[1] und der entsprechende Punkt C des urspünglichen Bogens AB hat dann die Eigenschaft, dass ein Kreis k, der den Bogen in C berührt und durch Q geht, die Umgebung von C auf dem Bogen AB in zwei Teile zerlegt, einen Teil innerhalb und einen ausserhalb des Kreises, indem die beiden Teile in C an einander stossen. Dieser Kreis k muss aber dann mit dem Schmiegungskreis des Bogens AB in C zusammenfallen: sonst müssten nämlich die beiden Bogen AC und CB in O verschiedene Schmiegungskreise haben (innerhalb und ausserhalb des Kreises k). Es ergibt sich so, dass durch den Punkt Q ein Schmiegungskreis k an den Bogen β gelegt werden kann, derart, dass der Berührungspunkt C auf β dem Teilbogen AB von β angehört.

Wir erinnern aber nun daran, dass wir oben die Voraussetzung gemacht haben, dass der Teilbogen AB von β keinen von A und B verschiedenen Punkt mit dem Kreis γ gemein hat. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so können zwei Fälle eintreten:

1. Es gibt einen Teilbogen AB_1 von AB, welcher keine von A und B_1 verschiedene Punkte mit γ gemein hat.

2. Der Kreis γ hat unendlich viele Punkte mit dem Bogen AB gemein, und diese Punkte haben eine Häufungsstelle in A.

Im ersten Fall kann durch den Punkt Q ein Schmiegungskreis an den Bogen AB_1 hindurchgelegt werden, und im zweiten Fall ist der Kreis γ mit dem Schmiegungskreis in A identisch. Es gilt also in allen Fällen der Satz:

Durch Q geht immer wenigstens ein Kreis k, welcher mit dem Schmiegungskreis in einem Punkt C des Bogens AB zusammenfällt.

Wenn nun A und B nach P konvergieren, wird der Punkt C ebenfalls nach P konvergieren, und der Kreis k muss dann gegen den Schmiegungskreis in P konvergieren. Hieraus folgt aber, dass der Punkt Q gegen den dem Punkte P diametral gegenüberliegenden Punkt des letztgenannten Kreises konvergieren muss, und da der Kreis γ in jeder Lage durch seinen Durchmesser AQ bestimmt ist, so folgt, dass γ gerade dem Schmiegungskreise in P zustreben muss, was zu beweisen war.

[1] Vgl. J. Hjelmslev, Contribution à la géometrie infinitesimale de la courbe réelle (Bulletin de l'Académie royale de Danemark, 1911, No. 5), S. 456.

Es lässt sich ebenso nachweisen, dass ein Kreis durch 3 beliebige nach P konvergierende Punkte von β notwendig nach dem Schmiegungskreis von β in P konvergieren muss.

13. **Satz 7.** *Der Mittelpunkt O des Schmiegungskreises in P ist die Grenzlage des Schnittpunktes S der beiden Normalen p und q in P und Q, wenn Q nach P konvergiert.*

Die Mittelsenkrechte von PQ schneidet die beiden Normalen p und q (Fig. 4) in M und N. Diese Punkte sind die Mittelpunkte zweier Kreise, welche beide durch P und Q hindurch gehen, der eine Kreis berührt die Kurve in P, und

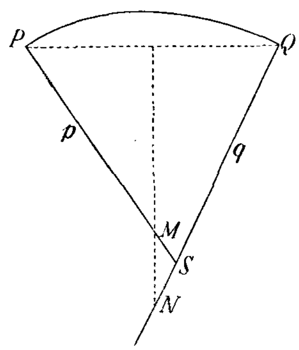

Fig. 4.

der andere in Q. Wenn $Q \to P$, müssen die beiden Punkte M und N nach dem Mittelpunkt O des Schmiegungskreises konvergieren (Satz 6), und wenn O nicht unendlich fern liegt, zeigt die Figur unmittelbar, dass auch S nach O konvergiert. Für den Fall, wo O unendlich fern liegt, braucht man nur zu bemerken, dass jede im Endlichen liegende Grenzlage von S auch notwendig gemeinsame Grenzlage für M und N sein müsste. (Beiläufig sei hier bemerkt, dass zusammenhörende Grenzlagen für M, N, S immer so liegen müssen, dass die Punktepaare PS, MN nach harmonischen Punktepaaren konvergieren).

Dass der Schmiegungskreis auch Krümmungskreis wird (im gewöhnlichen Sinne des Wortes), wird nunmehr leicht bestätigt.

14. **Satz 8.** *Wenn eine Kurve in jedem Punkte P eine bestimmte mit dem Punkte stetig variierende Tangente besitzt, und diese für innere Punkte entgegengesetzte Halbtangenten aufweist, und wenn die Kurve ausserdem in P eine eindeutig*

bestimmte, endliche, mit dem Punkte stetig variierende Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ *hat, so hat die Kurve in P einen bestimmten Schmiegungskreis mit dem Radius* ϱ.

Aus der Fig. 4 ersieht man sofort, dass

$$\varrho = \lim \frac{PQ}{< PSQ} = \lim \frac{PS}{\sin (PQS)} = \lim PS,$$

woraus folgt, dass der Punkt S nach einer bestimmten Grenzlage O auf der Normalen p konvergiert, wobei $PO = \varrho$. Dass diese Grenzlage O, wenn $\varrho \neq \infty$, notwendig auf einer bestimmten Seite von P liegt, folgt daraus, dass wenn Schwingungen von S hin und her möglich wären, ϱ notwendig den Wert ∞ annehmen müsste. Ferner sieht man, dass der Mittelpunkt M eines Kreises, welcher die Kurve in P berührt und durch Q hindurch geht, einer Normalen der Kurve in einem inneren Punkt R des Bogens PQ angehört. Der Punkt M ist folglich Schnittpunkt zweier Kurvennormalen (in P und R), und wenn $Q \to P$, hat man auch $R \to P$, und sonach $M \to O$, d. h. der Kreis mit dem Mittelpunkt O und Radius OP ist ein Schmiegungskreis in P und ist der einzig mögliche Schmiegungskreis in diesem Punkt.

15. **Satz 9.** *Wenn eine Kurve in jedem Punkt P eine bestimmte mit dem Punkt stetig variierende Tangente hat, welche (wenn der Punkt ein innerer Punkt ist) entgegengesetzte Halbtangenten aufweist, und wenn ausserdem für jeden Punkt P der Kurve eine bestimmte, von P verschiedene, mit P stetig variierende Grenzlage O des Schnittpunktes der Normalen p in P und der Normalen q in einem anderen nach P konvergierenden Punkt Q existiert, so hat die Kurve im Punkte P einen bestimmten Schmiegungskreis mit dem Mittelpunkt O.*

Es sei nämlich S der Schnittpunkt der beiden Normalen. Es ergibt sich dann aus Fig. 4:

$$\lim \frac{PQ}{\sin (PSQ)} = \lim \frac{QS}{\sin (QPS)} = \lim QS = PO,$$

also

$$\lim \frac{PQ}{(pq)} = PO,$$

und nach Satz 8 ist hiermit der Beweis vollendet.

Die in den Sätzen 6—9 behandelten Kurven sollen im folgenden als *stetig gekrümmte Kurven* bezeichnet werden.

16. Auf einer stetig gekrümmten Kurve können *Wendepunkte* oder *Wellenpunkte* (d. h. Punkte, wo die Tangente unendlich viele Punkte mit der Kurve gemein hat, ohne ein zusammenhängendes Stück der Kurve zu enthalten) nur entstehen, wo der Krümmungsradius unendlich gross ist. In der Umgebung eines Punktes, wo der Krümmungsradius endlich ist, muss die Kurve konvex sein.

Punkte mit unendlich grossem Krümmungsradius liegen nirgends dicht auf der Kurve, es sei denn, dass die Kurve eine geradlinige Strecke enthält. Es folgt hieraus, dass jede stetig gekrümmte Kurve aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von konvexen Bogen (und geradlinigen Strecken), mit zugehörigen Grenz- und Häufungspunkten, besteht.

17. Schliesslich wollen wir die *Parallelkurven* der stetig gekrümmten Kurven untersuchen. Wir betrachten eine Bewegung in der Ebene, welche solcherweise bestimmt wird, dass ein Punkt M einen stetig gekrümmten Bogen AB durchläuft, während eine gerade Linie durch M sich so bewegt, dass sie stets Normale der Kurve bleibt. Der Momentanpol dieser Bewegung ist der Charakteristikpunkt der Normalen, also der Krümmungsmittelpunkt O des Bogens AB in M.

Ein beliebiger Punkt P auf der Normalen beschreibt eine Kurve, welche als Parallelkurve des Bogens AB bezeichnet werden soll. Solange M und P auf derselben Seite des Momentanpols O liegen (inbesondere auch wenn O unendlich fern ist), haben die von M und P beschriebenen Bogen gleichgerichtete Halbtangenten und gemeinsame Normale MP, deswegen auch gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt. Die von P beschriebene Kurve wird in diesem Falle stetig gekrümmt. Da die vorwärts laufenden Halbtangenten der beiden Kurven gleich gerichtet sind, und die zurück laufenden ebenso, muss jedem konvexen Bogen von AB ein konvexer Bogen der Parallelkurve entsprechen, und die konkaven Seiten dieser Bogen haben gemeinsame Richtung.

18. In dem Falle, wo M und P auf entgegengesetzter Seite von O liegen, ändert sich die Sache so, dass die einander entsprechenden Halbtangenten der beiden Kurven entgegengesetzte Richtungen haben. Die von P beschriebene Parallelkurve ist doch immerhin eine stetig gekrümmte Kurve, und jedem konvexen Bogen auf AB entspricht ein konvexer Bogen auf der Parallelkurve. Die konkaven Seiten dieser Bogen sind einander zugekehrt.

19. Wenn nun aber P nach dem Momentanpol O fällt, ist die Sache nicht so einfach. Wir wollen zunächst annehmen:

1) MN ist ein Teilbogen von AB, so gewählt, dass der Winkel zwischen zwei vorwärts laufenden Halbtangenten des Bogens stets unter einer gewissen Schranke ε liegt $\left(\varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$.

2) PQ ist der entsprechende Bogen der Parallelkurve.

3) Der Krümmungsradius MP des Bogens MN in M ist kleiner als die anderen Krümmungsradien dieses Bogens.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt dann sofort, das jeder Teilbogen P_1Q von PQ eine stetig gekrümmte Kurve ist, deren vorwärts laufende Halbtangenten mit den entsprechenden Halbtangenten des Bogens MN gleichgerichtet sind. Ferner leuchtet ein, dass der Bogen P_1Q keine Doppelpunkte aufweisen kann, weil die Schwankung der vorwärts laufende Halbtangente klein ist ($< \varepsilon$). Aus demselben Grunde folgt, dass auch P selbst kein Doppelpunkt ist. Der ganze Bogen PQ ist somit doppelpunktsfrei.

Wir wollen nun beweisen, dass der Bogen PQ in P eine bestimmte Halbtangente besitzt, welche dieselbe Richtung hat wie die Halbtangente des Bogens MN in M. Der Teilbogen PP_1 von PQ enthält notwendig einen inneren Punkt R, dessen vorwärts laufende Halbtangente dieselbe Richtung hat wie der Halbstrahl PP_1, und der Bogen MN muss dann einen entsprechenden Punkt S enthalten, dessen vorwärts laufende Halbtangente genau dieselbe Richtung hat. Wenn nun $P_1 \to P$, hat man auch $S \to M$, und die Halbtangente in S wird nach der Halbtangente in M konvergieren. Der Halbstrahl PP_1 muss somit nach einer hierzu parallelen Grenzlage konvergieren, d. h. der Bogen PQ hat in P eine Halbtangente mit derselben Richtung wie die Halbtangente des Bogens MN in M.

20. Bei diesen Überlegungen war vorausgesetzt, dass der Krümmungsradius in M kleiner ist als die übrigen Krümmungsradien des Bogens MN. Hätten wir vorausgesetzt, dass der Krümmungsradius in M grösser ist, als die übrigen Krümmungsradien des Bogens MN, so würde man auf ganz dieselbe Weise schliessen können, dass die Halbtangenten in P und M entgegengesetzte Richtungen haben.

21. Wir haben so das folgende Resultat gewonnen:

Satz 10. *Wenn der Krümmungsradius MP in einem Punkt M einer stetig gekrümmten Kurve für eine gewisse Umgebung von M grösser ist als die Krümmungsradien der Nachbarpunkte nach der einen Seite hin, aber kleiner als die*

Krümmungsradien der Nachbarpunkte nach der anderen Seite hin, so wird die Parallelkurve der gegebenen Kurve in P eine Spitze erster Art aufweisen, indem sie nämlich in der Umgebung von P aus zwei konvexen Bogen, mit gemeinsamer Halbtangente in P, besteht, deren konkave Seiten entgegensetzte Richtungen haben. Die Halbtangente in P ist senkrecht zu MP.

Wenn hingegen der Krümmungsradius MP (für die Umgebung von M) ein Maximum oder Minimum ist, so wird die Parallelkurve in P einen einfachen Konvexpunkt aufweisen, dessen Tangente senkrecht auf MP steht.

Wenn schliesslich der Krümmungsradius MP nach rechts oder nach links kein Extremum ist, so wird die Existenz der Tangente der Parallelkurve in Frage gestellt. Indessen ist immerhin klar, dass eine der möglichen Tangenten (Grenzlagen der Sekanten) senkrecht auf MP steht.

Endlich dürfen wir nicht den Fall unerwähnt lassen, wo der Krümmungsradius konstant ist, d. h. wo die gegebene Kurve ein Kreis ist. Die Parallelkurven sind auch Kreise. Eine von ihnen schrumpft doch in einen einzigen Punkt zusammen, und in diesem Falle ist natürlich von einer Tangente keine Rede mehr.

IV.

Die einfache Bewegung.

22. Wir kommen nun zu dem eigentlichen Hauptsatz der ebenen kinematischen Geometrie, nämlich dem Satz, dass jede stetige Bewegung in der Ebene, abgesehen von Drehungen und Translationen, auf eine Rollbewegung zurückgeführt werden kann. Dieser Satz kann aber innerhalb der teoretischen Geometrie nicht ohne Beschränkungen festgehalten werden. Es ist nicht schwierig, einfache Beispiele von Bewegungen aufzufinden, deren Darstellung durch eine Rollbewegung unmöglich wird. Nehmen wir z. B. einen beliebigen konvexen Bogen β ohne Knickpunkte und definieren eine Bewegung solcherweise, dass ein Punkt P der beweglichen Figur den Bogen β beschreibt, während eine durch P gehende gerade Linie l der Figur stets den Bogen β berührt; diese Bewegung wird auf jeden Fall nicht durch eine Rollbewegung herstellbar sein, wenn β nicht in jedem Punkt (wenigstens zur Rechten und zur Linken) einen bestimmten Schmiegungskreis besitzt, und da β leicht so konstruiert werden kann, dass diese Bedingung nicht erfüllt wird, so erkennt man, dass der obengenannte Satz nicht allgemeine Gültigkeit haben kann.

23. Es entsteht nun aber die Frage, wie man bestimmte Grenzen für die Gültigkeit des Satzes angeben kann, und es wird in dieser Hinsicht in erster Linie darauf ankommen, einfache hinreichende Bedingungen aufzustellen. Im folgenden soll nun eine umfassende Klasse von Bewegungen, die wir als *einfache Bewegungen* bezeichnen wollen, behandelt werden, wo die Zurückführung auf eine Rollbewegung stets möglich ist.

Definition der einfachen Bewegung. *Eine ebene Bewegung soll einfach heissen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Es gibt zwei Punkte A, B, deren Bahnkurven (A), (B) stetig gekrümmt sind.*

2) *Die Bahnnormalen in A und B sind niemals zu einander parallel (oder zusammenfallend), und ihr Schnittpunkt fällt nicht mit A oder B oder mit dem Mittelpunkt des Schmiegungskreises der von A oder B beschriebenen Bahn zusammen.*

24. Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 11. *Jede einfache Bewegung kann durch eine Rollbewegung dargestellt werden.*

Die fest liegende Kurve bei dieser Rollbewegung wird als Ort des Momentanpols in der festen Figur erzeugt, und die rollende Kurve entsteht als Ort des Momentanpols in der beweglichen Figur. Jede dieser beiden Kurven ist eine stetig gerichtete Kurve, d. h. sie hat in jedem Punkt eine bestimmte mit dem Punkte stetig variierende Tangente, und in jedem inneren Punkt entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten.

Ehe wir zum Beweise dieses Satzes übergehen, bemerken wir, dass die von A und B beschriebenen Kurven (A) und (B) zufolge unserer Voraussetzung, dass die Tangente längs jeder dieser Kurven sich stetig verändert, und dass in jedem inneren Punkt die Halbtangenten entgegengesetzt gerichtet sind, in eine endliche Anzahl Bögen zerlegt werden können, deren jeder doppelpunktfrei ist. Der Beweis des Satzes 11 kann deswegen auf den Fall beschränkt werden, wo die genannten Kurven keine Doppelpunkte haben, und dies soll daher im folgenden vorausgesetzt werden.

25. Es seien nun die Punkte A, B bei der Bewegung in die neuen Lagen A', B' übergeführt, und es werde der Rotationspol der beiden kongruenten Figuren AB, $A'B'$ mit O' bezeichnet. (Fig. 5). O' wird als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der beiden Strecken AA', BB' bestimmt. Die Bahnnormalen in A und B schneiden einander in O, dem Momentanpol für die Lage AB der

Figur. Die Bahnnormalen in A' und B' schneiden einander in P', dem Momentanpol für die Lage $A'B'$ der Figur. Wenn $A'B'$ gegen AB konvergiert, so wird O' nach O konvergieren, und die Grenzlage des Halbstrahls OO' konstruiert man wie früher gezeigt mit Hilfe der Mittelpunkte A_1, B_1 der den Punkten A, B entsprechenden Schmiegungskreise. Die gefundene Grenzlage geht von O aus und ist von OA und OB verschieden (6).

Für die Lage $A'B'$ der Figur ist der Momentanpol P'. Wenn $A'B'$ gegen AB konvergiert, wird P' nach O konvergieren, und nach dem im Abschnitt III, 12

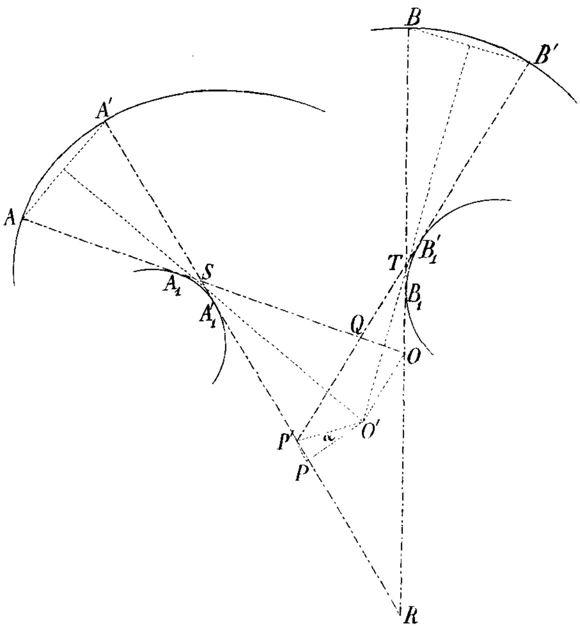

Fig. 5.

bewiesenen Hilfssatz (Satz 6) werden die Mittelpunkte der beiden Kreise, welche die Kurven (A), (B) in A', B' berühren und durch A, B hindurchgehen, gegen A_1, B_1 konvergieren, und die Linie $P'O'$ wird dann gegen dieselbe Grenzlage wie OO' konvergieren (vgl. den Beweis des Satzes 2, S. 148 unten). Hingegen ersieht man, dass der Halbstrahl $P'O'$ einer Grenzlage zustrebt, welche der Grenzlage des Halbstrahls OO' entgegengesetzt gerichtet ist.

Es ergiebt sich so, dass der Winkel $OO'P'$ gegen π konvergiert, und dass infolge dessen der Halbstrahl OP' derselben Grenzlage zustrebt wie der Halbstrahl OO' und wir haben hiermit das wichtige Resultat gewonnen, dass die Kurve f, welche als Ort des Momentanpols $(O, P' \ldots)$ in der festen Figur entsteht, eine bestimmte Tangente in jedem Punkte besitzt, und dass sie in jedem inneren Punkte entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten hat. Die Tangente t der Kurve f in O ist dieselbe Gerade t, die als Grenzlage der Linie OO' entsteht, und die Konstruktion dieser Geraden ist schon früher angegeben worden.

26. Danach gehen wir zur Betrachtung der Kurve r über, welche in einer bestimmten Lage der beweglichen Figur als Ort derjenigen Punkte entsteht, die durch die Bewegung in die Momentanpole übergehen. Wir wählen die bestimmte Lage AB der Figur. Der Momentanpol ist hier O; die Kurve r geht sonach durch O. Die übrigen Punkte der Kurve sind solche, die, mit der Figur AB fest verbunden, einmal in einen Punkt übergehen werden, welcher für die betreffende Lage der Figur Momentanpol wird. Einen Punkt P von r konstruiert man demnach, indem man AB in eine neue Lage $A'B'$ übergehen lässt, den Momentanpol P' für diese Lage findet, und sodann die Lage P ermittelt, in welche P' gelangt, wenn $A'B'$ in die Lage AB zurückgeführt wird, und P' dabei mit $A'B'$ in fester Verbindung verbleibt. Dies kann folgendermassen ausgeführt werden: Man ermittelt zunächst den Rotationspol O' der beiden Figuren AB, $A'B'$; sodann dreht man P' um O' um einen Winkel α derart, dass A' durch diese Drehung in A übergeführt wird. P' geht dann in den gesuchten Punkt P über. Auf diese Weise findet man zu jedem beliebigen Punkt P' der Kurve f einen entsprechenden Punkt P der Kurve r.

Wie wir oben gesehen haben, wird bei dem Grenzübergang von $A'B'$ nach AB der Winkel $P'O'O$ gegen π konvergieren, und da ferner der Winkel $P'O'P = \alpha$ gegen Null konvergiert, so folgt, dass der Winkel $PO'O$ gegen π konvergieren muss. Dies bedeutet aber, dass die Grenzlage des Halbstrahls OO' auch als die einzig mögliche Grenzlage des Halbstrahls OP ausfallen muss, und die Kurven r und f haben sonach in O gemeinsame Halbtangenten. Es folgt zugleich, dass die Kurve r in jedem Punkte eine bestimmte, mit dem Punkt stetig veränderliche, Tangente und in jedem inneren Punkt entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten hat.

27. Wenn die Kurve r in fester Verbindung mit der Figur AB folgt, so wird sie in jeder Lage die Kurve f berühren. Kommt z. B. P' nach P, so berühren die beiden Kurven einander in P. Um nun zu beweisen, dass diese Bewegung in Wirklichkeit mit einer Rollbewegung von r auf f identisch ist, müssen wir noch zeigen, dass die zwischen den beiden Kurven r und f bestehende Verwandschaft, welche durch die Überführung der Punkte P' der Kurve f in die entsprechenden Punkte P der Kurve r auf der oben angegebenen Weise bestimmt wird, die charakteristische Eigenschaft hat, dass einander entspre-

chende Bogenlängen der beiden Kurven einander gleich sind. Um dies zu zeigen erinnern wir zunächst daran, dass bei dem oben genannten Grenzübergang die beiden Winkel $OO'P$ und $OO'P'$ gegen π konvergieren, und da ferner $O'P = O'P'$, schliesst man sofort, dass

$$\frac{OP}{OP'} \to 1 .$$

Man kann also sagen, dass zusammengehörige Punkte P, P' auf den Kurven r, f eine solche Punkt-Korrespondenz erzeugen, dass das Verhältnis zusammengehörigen Sehnen (Bogen) der beiden Kurven dem Grenzwert 1 zustrebt, wenn die Sehnen (Bogen) selbst gegen Null konvergieren. Hieraus folgt aber sofort, dass entsprechende Bogen einander gleich sind.

28. Unter der *Charakteristik* der Bewegung für die Lage AB der Figur verstehen wir den Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\theta}{s}$ zwischen dem gegen Null konvergierenden Winkel θ, durch welchen die Figur AB um O' in die Lage $A'B'$ gedreht wird, und dem Bogen $s = \widehat{OP}$ der Kurve r, welcher von den beiden den Lagen AB, $A'B'$ entsprechenden Momentanpolen O, P begrenzt wird, indem $A'B'$ gegen AB konvergiert. Der Drehwinkel wird dabei mit einem Vorzeichen gerechnet in Übereinstimmung mit einem festgelegten Umlaufssinne in der Ebene, und das Vorzeichen von s wird mittels eines festen Umlaufssinnes auf der Kurve r bestimmt. Es leuchtet ein, dass venn die Kurven r und f bestimmte Krümmungen haben, die Charakteristik mit der Differenz dieser Krümmungen in den entsprechenden Punkten der Kurven r und f gleichbedeutend wird; aber auch in dem Falle, wo diese Kurven keine bestimmte Krümmungen haben, wird die Charakteristik einen bestimmten Wert haben, wenn nur die Bewegung eine einfache Bewegung ist. Dies soll im folgenden gezeigt werden.

29. Aus der Figur (Fig. 1) erhält man:

$$\frac{\frac{1}{2}\theta}{OO'} = \frac{(O'A,\ O'A'_1)}{OO'} = \frac{(OA,\ O'A'_1) - (OA,\ O'A)}{OO'},$$

oder

$$\lim \frac{\frac{1}{2}\theta}{OO'} = \lim \frac{\sin (OA,\ O'A'_1)}{OO'} - \lim \frac{\sin (OA,\ O'A)}{OO'};$$

durch Betrachtung der Dreiecke $OO'A$, $OO'A_1$ ergibt sich sonach

$$\lim \frac{\frac{1}{2}\theta}{OO'} = \frac{\sin(t,\ OA)}{OA_1} - \frac{\sin(t,\ OA)}{OA}.$$

Ganz denselben Wert erhält man für $\lim \frac{\frac{1}{2}\theta}{O'P}$, wenn man die Lage $A'B'$ betrachtet, und hieraus folgert man in einfacher Weise, dass die Charakteristik k den folgenden Wert erhält

$$k = \lim \frac{\theta}{OP} = \sin\ (t,\ OA)\left(\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA}\right).$$

30. Das gefundene Resultat bezeichnet eine Verallgemeinerung der Euler-Savary'schen Formel.[1] Es zeigt sich, dass die Charakteristik stets von 0 und ∞ verschieden ist, und da sie sich stetig ändern muss, so bleibt sie während der ganzen Bewegung von konstantem Vorzeichen. Es ergibt sich so, dass jede gerade Linie der Figur während der Bewegung ihre Richtung monoton verändert.

Für $(t,\ OA) = \frac{\pi}{2}$, $OA_1 = \infty$, hat man:

$$OA = -\frac{1}{k},$$

d. h.

Satz 12. *Der Durchmesser des Wendekreises ist gleich dem reziproken Wert der Charakteristik* (numerisch gerechnet).[2]

Es folgt hieraus, dass diejenigen Kreise der beweglichen Figur, welche durch die Bewegung in die Wendekreise übergeführt werden, einen endlichen Bereich der Ebene bedecken, und jeder Punkt ausserhalb dieses Bereichs eine überall konvexe Bahn beschreiben muss. Also:

Satz 13. *Bei jeder einfachen Bewegung gibt es immer unendlich viele Punkte, welche überall konvexe Bahnen beschreiben.*

---

[1] Vgl. des Verf. Darstellende Geometrie, Leipzig 1914, S. 163.

[2] Über den Wendekreis und seine Bedeutung für die Konkavität der Bahnkurven vgl. d. Verf. Darstellende Geometrie, Leipzig 1914, S. 165—166.

31. Um die Gestalt der Bahnkurve eines beliebigen Punktes M bequem überblicken zu können, wollen wir eine Kurve definieren, die als *Krümmungsbild* von M in der beweglichen Figur bezeichnet werden soll. Diese Kurwe wird folgendermassen aus der Kurve r abgeleitet. Auf jeder geraden Linie, welche den Punkt M mit einem beliebigen Punkt O der Kurve r verbindet, bestimmen wir denjenigen Punkt M_1, welcher durch die Rollbewegung in den Krümmungsmittelpunkt der von M beschriebenen Bahn übergeht, wenn O in seinen entsprechenden Punkt auf f hineinrollt. Der geometrische Ort K_M der so bestimmten Punkte M_1, wenn O auf der Kurve r variiert, ist das Krümmungsbild von M. Der Abstand MM_1 ist gleich dem Krümmungsradius der von M beschriebenen Bahnkurve (M) in dem Augenblick, wo O Momentanpol wird. Verändert sich der Abstand MM_1 monoton, wenn O sich monoton auf der Kurve r bewegt, so verändert sich der Krümmungsradius von (M) monoton. Hat MM_1 ein Maximum oder Minimum, hat der Krümmungsradius von (M) auch ein Maximum oder Minimum. Rückt M_1 ins Unendliche, derart dass die entsprechende Lage von MO einen Vorzeichenwechsel für MM_1 bezeichnet, hat die Bahnkurve (M) in dem entsprechenden Punkt einen Wendepunkt. Wir können dann folgenden Satz aufstellen:

Satz 14. *Wenn das Krümmungsbild K_M mit jedem beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt nach M fällt, höchstens eine endliche Anzahl gemeinsamer Punkte hat, und höchstens eine endliche Anzahl unendlich ferner Punkte enthält, so wird die von M beschriebene Bahn eine einfache Kurve, die von einer endlichen Anzahl konvexer monoton gekrümmter Bogen zusammengesetzt ist.*

32. Für die beiden Polkurven r und f bleibt noch eine wichtige Tatsache hervorzuheben. Aus Fig. 5 geht hervor, dass insofern P und P' verschieden sind, die Richtung ihrer Verbindungslinie gegen die Richtung der gemeinsamen Normalen beiden Polkurven in O strebt, wenn P und P' nach O konvergieren. Hieraus folgt zunächst, dass die beiden Polkurven nicht unendlich viele gemeinsame Punkte mit O als Häufungsstelle aufweisen können. In der Tat: Nehmen wir an, dass eine Folge $P_1, P_2, \ldots$ von solchen gemeinsamen Punkten mit dem Häufungspunkt O vorhanden wäre, so müssten diese Punkte auf den beiden Polkurven r und f, jedenfalls von einem gewissen Zeigerwert an, sich selbst entsprechen; wenn nicht, gäbe es eine Teilfolge $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots$, und auf f eine entsprechende Folge $P'_{i_1}, P'_{i_2}, \ldots$, derart, dass die Gerade $P_{i_s} P'_{i_s}$ für $s \to \infty$ nach der gemeinsamen Tangente der Polkurven in O konvergieren würde. Das wider-

spricht aber der Tatsache, dass die Gerade PP' notwendig gegen die Normale der Polkurven in O konvergieren muss.

Es folgt also hieraus, dass die gemeinsame Folge P_1, $P_2, \ldots$ nur unter der Voraussetzung existieren könnte, dass die hierdurch auf den beiden Kurven r und f abgeschnittenen Bogen $P_n P_{n+1}$ (jedenfalls von einem gewissen Wert n an) für jedes n einander gleich wären. Infolgedessen müssten denn auf den beiden Bogen $P_n P_{n+1}$ zwei einander entsprechende Punkte Q_n und Q'_n der Kurven r und f mit einander parallelen Tangenten existieren; denn zwei veränderliche Punkte Q und Q', welche die beiden Bogen solcherweise durchlaufen, dass die Bogen $P_n Q$ und $P_n Q'$ einander gleich sind, würden sicher einmal in derartige Lagen gelangen, dass der Abstand QQ' ein Maximum erreichte (der Abstand QQ' fängt nämlich mit dem Wert Null an und endigt auch mit dem Wert Null), und hier müssten die beiden Tangenten in Q und Q' notwendig zu einander parallel sein. Die Punktfolgen Q_n, $Q_{n+1}, \ldots$ und Q'_n, $Q'_{n+1}, \ldots$ auf den Kurven r und f müssten somit immer parallele Tangenten in entsprechenden Punkten aufweisen. Das würde aber bedeuten, dass die Charakteristik der Bewegung im Punkt O den Wert Null annehmen müsste. Das ist aber nicht der Fall. Hierdurch ist also tatsächlich bewiesen, dass die beiden Kurven r und f keine unendliche Folge von gemeinsamen Punkten mit einer Häufungsstelle in O haben können. Aus der Figur geht ferner hervor, dass die Richtung des Halbstrahls PP' derselben Grenzlage zustrebt, ob $A'B'$ von den einen oder von der anderen Seite in AB übergeht. Wir haben also den folgenden Satz:

Satz 15. *Die beiden Polkurven einer einfachen Bewegung berühren einander im Momentanpol O derart, dass die Kurven in der Umgebung von O keine weitere Punkte gemein haben, und derart, dass die Kurven sich in O nicht durchdringen.*

33. Die Bahnkurve desjenigen Punktes, dessen augenblickliche Lage mit dem Momentanpol zusammenfällt, hat eine Spitze. Wie die beiden von dieser Spitze ausgehenden Zweige der Bahnkurve aussehen, wird von den Krümmungseigenschaften der Kurve r in der Umgebung des Punktes abhängen.

In der Nähe des Momentanpols O wählen wir einen Punkt A der Kurve r heraus. Der Wendekreis hat den Durchmesser $\frac{1}{k_0}$. Liegt A innerhalb bezw. ausserhalb des Wendekreises, wird die Bahnkurve von A ihre konkave Seite dem Punkte O ab- bezw. zukehren. Die Tangente t der Polkurven in O bildet mit der Geraden AO einen kleinen Winkel $\alpha = (t, OA)$. Für die Konkavität der Bahnkurve von A wird es nun darauf ankommen, ob

$$\frac{\sin \alpha}{OA} > -k_0, \text{ oder } \frac{\sin \alpha}{OA} < -k_0.$$

Insofern bei dem Grenzübergang $O \rightarrow A$, die eine oder die andere dieser beiden Bedingungen durchweg erfüllt ist, wird der Punkt einen durchweg konvexen Bogen AA' beschreiben, wenn A bei der Rollbewegung von der gegebenen Anfangslage in die Lage A' auf f hineinrollt, und dieser Bogen wird, den beiden Bedingungen entsprechend, ihre konkave Seite dem Punkte O bezw. zu- oder abkehren.

Ist hingegen bei dem Grenzübergang abwechselnd

$$\frac{\sin \alpha}{OA} \gtrless -k_0,$$

so wird der Bogen AA' eine unendliche Menge von Wellen mit einer Häufungsstelle in A' aufweisen.

Die Grösse $\frac{\sin \alpha}{OA}$ bedeutet offenbar den reziproken Wert des mit bestimmtem Vorzeichen gerechneten Durchmessers eines Kreises, welcher durch die Punkte A und O hindurch geht und die Kurve r in O berührt.

Es folgt nun der Satz:

Satz 16. *Ist A ein Punkt der Kurve r und O ein Nachbarpunkt derselben Kurve, und ist bei dem Grenzübergang $O \rightarrow A$ der Durchmesser desjenigen Kreises, welcher durch O und A hindurch geht und die Kurve r in O berührt, entweder durchweg kleiner als $-\frac{1}{k_0}$ oder durchweg grösser als $-\frac{1}{k_0}$, wo k_0 die Charakteristik im Punkte O als Momentanpol bedeutet, so wird die Bahnkurve, welche durch Abrollen des Bogens AO auf den entsprechenden Bogen $A'O'$ von f entsteht, überall konvex sein, und ihre konkave Seite dem Punkte O' ab- bezw. zukehren.*

Ist hingegen der Durchmesser des erwähnten veränderlichen Kreises abwechselnd grösser und kleiner als $-\frac{1}{k_0}$, so wird die Bahnkurve von A unendlich vielen Wendepunkte mit einer Häufungsstelle in A haben können.

34. Wenn die Kurven r und f stetig gekrümmt sind, und die dem Punkte A entsprechenden Krümmungsradien mit ϱ_1 bezw. ϱ_2 bezeichnet werden, so ist die Charakteristik k_A für A als Momentanpol

$$k_A = \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}$$

und der Durchmesser des erwähnten veränderlichen Kreises wird dem Grenzwert $2\varrho_1$ zustreben. Nach den gewonnenen Resultaten wird es bezüglich der Konkavität der Bahnkurve von A darauf ankommen, ob

$$\frac{1}{2\varrho_1} \neq \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2},$$

d. h.

$$\varrho_1 \neq \frac{1}{2}\varrho_2.$$

In diesen Fällen wird die Bahnkurve in A eine Spitze erster Art aufweisen. Ist z. B. $\varrho_1 > \frac{1}{2}\varrho_2 > 0$, wird die rechts (bezw. links) gehende Rollbewegung den linken (bezw. rechten) Zweig der Spitze erzeugen.

Ist $\varrho_1 = \frac{1}{2}\varrho_2$, wird es von den Nachbarpunkten abhängen, wie die Spitze gestaltet wird. Ein einfaches Beispiel hat man in dem elementaren Fall, wo die Polkurven Kreise sind mit den Radien ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_1 = \frac{1}{2}\varrho_2$.

35. Wenn die Kurven r und f nicht stetig gekrümmt sind, können, für $O \rightarrow A$, unendlich viele Grenzlagen desjenigen Kreises, welcher durch A und O hindurch geht und in O die Kurve r berührt, existieren. Wenn aber sämmtliche Grenzwerte ϱ des Radius dieses Kreises (rechts und links) der Bedingung genügen, dass durchweg $\frac{1}{2\varrho} < -k_A$, oder durchweg $\frac{1}{2\varrho} > -k_A$, hat die Bahnkurve in A eine Spitze erster Art. Wenn die Grenzlagen links der einen Bedingung entsprechen, die Grenzlagen rechts der anderen, so hat die Bahnkurve eine Spitze zweiter Art. Die übrigen Fälle werden in ähnlicher Weise behandelt.

36. Eine beliebige einfache Bewegung kann durch Wahl der Polkurven r und f folgendermassen hergestellt werden. Wir wählen zwei Bogen AB und AB' mit gemeinsamer Halbtangente a in A und mit stetig variierenden Halbtangenten. Die beiden Bogen seien durch die natürlichen Gleichungen

$$\theta = \theta(s), \quad \theta_1 = \theta_1(s)$$

dargestellt, indem s die Bogenlänge von A bis zu einem beliebigen P resp. P' bedeutet, während θ und θ_1 die Totalkrümmungen der Bogen AP resp. AP' bezeichnen (d. h. die Winkel, welche die vorwärts laufende Halbtangenten in P und P' mit der Halbtangente in a bilden; die Winkel werden natürlich mit Vorzeichen gerechnet, nach einem festen Umlaufssinn in der Ebene). Wenn nun $\theta(s)-\theta_1(s)$ nach s differenzierbar ist und die Abgeleitete positiv und stetig ist, so wird die Rollbewegung, die dadurch entsteht, dass die Kurve r auf die Kurve f rollt, eine einfache Bewegung darstellen. Es folgt dies daraus, dass die Krümmung der Bahnkurven nach der erweiterten Euler-Savary'schen Formel zu bestimmen ist.[1]

37. Eine einfache Bewegung lässt sich auch so bestimmen, dass man die Kurve f als Ort des Drehpols O beliebig wählt (natürlich so, dass sie in jedem Punkt eine mit dem Punkt stetig variierende vorwärts laufende Halbtangente besitzt), und sodann den Drehwinkel θ der beweglichen Figur von der Anfangslage aus gerechnet als Funktion $\theta=\varphi(s)$ von der Bogenlänge s, von dem Anfangsdrehpol aus auf f gerechnet bis zum Momentanpol, angibt. Dabei muss $\varphi(s)$ eine Funktion mit positiver stetigen Derivierten sein.

V.

Die Hüllkurve einer geraden Linie.

38. Wir betrachten eine einfache Rollbewegung. Die Polkurven r und f berühren einander in O. Die gerade Linie g in der beweglichen Figur hat den Charakteristikpunkt A, wobei $OA \perp g$ (Fig. 6). Durch die Bewegung entsteht ein geometrischer Ort der Charakteristikpunkte der verschiedenen Lagen von g, und dieser Ort wird eine bestimmte Kurve sein, wenn nicht die gerade Linie g durch einen festen Punkt hindurch geht. Der letztgenannte Fall soll hier (für jedes Intervall der Bewegung) ausgeschlossen werden. Der Ort der Charakteristikpunkte soll als Charakteristikkurve von g bezeichnet werden. In der Figur konstruieren wir nun einen neuen Punkt der Kurve. Wir wählen einen Punkt P vorwärts auf der rollenden Kurve r und suchen den entsprechenden Punkt P' auf f ($\widehat{OP'}=\widehat{OP}$). Denken wir uns nun r so weit auf f weiter rollen, dass P in P' übergeht, kann der durch diese Rollbewegung erzeugte Lagenwechsel der Figur auch mittels einer Drehung erzielt werden. Der Drehpol sei O' und der Drehwinkel θ. Den der neuen Lage g' von g entsprechenden Charakteristik-

[1] Vgl. die früheren Arbeiten des Verfassers: Die Geometrie der Wirklichkeit, Acta mathematica Bd. 40, S. 56; und Darstellende Geometrie, Leipzig 1914, Kap. 7, § 189—190; die l. c. verwendeten Methoden können hier unmittelbar verwertet werden.

punkt findet man, indem man eine Senkrechte PB zu g zieht, und sodann den Punkt B um O' um den Winkel θ dreht. Der gesuchte Punkt werde mit C bezeichnet.

Wenn nun die Halbstrahlen AB und BC einen und denselben Umlaufssinn um O' in der Ebene bestimmen, und wenn diese Bedingung stets erhalten bleibt, wenn P nach O konvergiert, so wird der Halbstrahl AC derselben Grenzlage zustreben wie die beiden Halbstrahlen AB und BC, nämlich demjenigen Halbstrahl auf g, welcher von A ausgeht und nach derjenigen Seite um O herum-

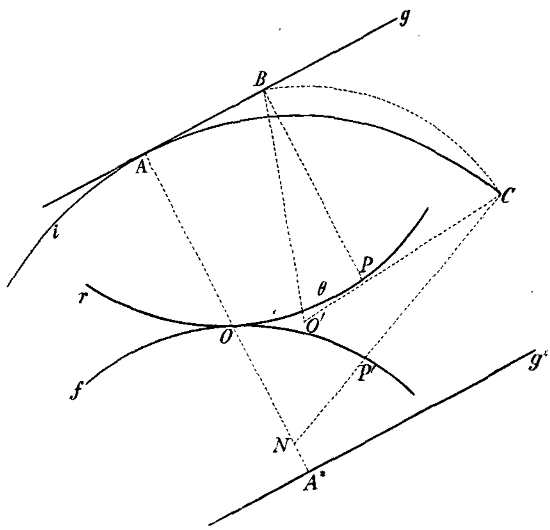

Fig. 6.

dreht, welche mit der Drehrichtung der Rollbewegung übereinstimmt. Dieser Halbstrahl ist somit Halbtangente der Charakteristikkurve in A. In ähnlicher Weise zeigt man durch Betrachtung der Rollbewegung nach rückwärts, dass der entgegengesetzte Halbstrahl die andere Halbtangente in A wird.

Wenn die Gerade g nicht auf die Tangente der beiden Polkurven in O senkrecht steht, werden die oben angegebenen Bedingungen zutreffen, wenn nicht für g selbst, so jedenfalls für eine zu g parallele Gerade, derart gewählt, dass O zwischen den beiden Parallelen liegt (vgl. die beiden Geraden g und g^* in der Figur). Man schliesst hieraus, dass die Charakteristikkurve von g entweder selbst eine überall konvexe Kurve ist oder die Parallelkurve einer überall konvexen Kurve.

39. Für den Fall, wo die Gerade g auf der Tangente der Polkurven in O

senkrecht steht, hat man (mit denselben Bezeichnungen wie oben), wenn g nicht durch O hindurch geht:

$$\frac{AB}{OP} \to 0, \quad \frac{\theta}{OP} \to k (\neq 0),$$

also

$$\frac{AB}{\theta} \to 0,$$

und

$$\frac{AB}{BC} \to 0.$$

Hieraus folgt, dass die Halbstrahlen AC und BC derselben Grenzlage zustreben, d. h. g muss in diesem Falle ihre Charakteristikkurve immer berühren. Wenn g nicht durch O hindurch geht, wird sie also immer eine gewöhnliche Tangente (d. h. Tangente mit entgegengesetzten Halbtangenten) der Charakteristikkurve sein. Es ist somit für alle Fälle bewiesen:

Satz 17. *Die Charakteristikkurve einer geraden Linie g ist entweder eine überall konvexe Kurve oder Parallelkurve einer überall konvexen Kurve.*

40. Im ersten Falle, wo die Charakteristikkurve selbst überall konvex ist, ist diese Kurve auch eine Hüllkurve für g, d. h. sie wird von jeder Lage von g berührt. Im zweiten Falle, wo die Charakteristikkurve eine Parallelkurve einer überall konvexen Kurve ist, ohne selbst überall konvex zu sein, wird dies nicht immer zutreffen. Um das näher zu untersuchen kehren wir zu unseren obigen Betrachtungen über die Halbstrahlen AB, BC und AC zurück. Wenn auch AB und BC bei dem Grenzübergang zuletzt nicht demselben Umlaufssinn um O' entsprechen, so muss der Halbstrahl AC doch notwendig sich derselben Grenzlage nähern wie BC wenn nur $\frac{AB}{BC}$ nicht dem Grenzwert 1 zustrebt. Der einzige Fall, wo es zweifelhaft sein könnte, ob eine Gerade g, welche nicht durch den Momentanpol hindurch geht, ihre Charakteristikkurve berührt, ist also der, wo

$$\frac{OP \sin(t, OA)}{OA \, . \, \theta} \to -1,$$

also

$$\frac{\sin(t, OA)}{OA} \to -k,$$

d. h. die Gerade g geht durch den zum Wendepol in Bezug auf den Momentanpol symmetrischen Punkt R hindurch. Der Punkt R soll als *Rebroussementspol* bezeichnet werden. Es folgt nun der folgende Satz:

Satz 18. *Wenn die gerade Linie g in einem Intervall der Bewegung niemals durch den Momentanpol oder den augenblicklichen Rebroussementspol hindurch geht, so ist ihre Charakteristikkurve eine überall konvexe Kurve. Diese Kurve ist Hüllkurve von g.*

41. Die Gerade g berührt ihre Charakteristikkurve in A (Fig. 6). Die Normale in A ist OA, die Normale in C ist $P'C$. Der Schnittpunkt der beiden Normalen ist N. Bei dem Grenzübergang $C \to A$ wird N einer bestimmten Grenzlage zustreben. Dies folgt daraus, dass der Winkel $(OA,\ P'C) = \theta$, und infolgedessen

$$ON \to \lim \frac{OP'}{\theta} \sin (t,\ OA) = \frac{\sin (t,\ OA)}{k}.$$

Die Charakteristikkurve hat somit eine bestimmte Krümmung in A, und *ihr Krümmungsmittelpunkt fällt auf dem Rebroussementskreis* (d. h. auf dem zum Wendekreis bezüglich des Momentanpols symmetrischen Kreis). Man sieht hieraus, dass wenn O und R auf derselben Seite von g liegen, die konkave Seite der Charakteristikkurve dem Punkt O zugekehrt ist. Wenn aber O und R durch g getrennt sind, wird die konkave Seite der Charakteristikkurve vom Punkte O abgekehrt sein.

42. Um nun die Gestalt der Charakteristikkurve bequem überblicken zu können, definieren wir eine Kurve, welche als *Rebroussementskurve* in der *beweglichen* Figur bezeichnet werden soll. Diese Kurve wird folgendermassen aus der Kurve r abgeleitet: Auf der Normalen eines willkürlichen Punktes O der Kurve r tragen wir eine Strecke

$$OR = \frac{1}{|k|}$$

derart ab, dass der rechte Winkel von der vorwärts laufenden Halbtangente von r bis zur Halbgeraden OR mit der Drehrichtung der vorwärts gehenden Rollbewegung übereinstimmt. Der Ort der so konstruierten Punkte R (wenn O auf r variiert) ist die Rebroussementskurve. Im folgenden wird (für jedes Intervall der Bewegung), vorausgesetzt, dass diese Kurve nicht in einen einzigen Punkt zusammenschrumpft (dieser Fall wird nur eintreten können, wenn die Polkurven r und f in Kreise übergehen, deren Radien sich wie 2 : 1 verhalten).

43. Wenn nun eine gerade Linie g einen einzigen Punkt R mit der Rebroussementskurve gemein hat, ohne durch den entsprechenden Momentanpol O hindurch zu gehen, derart dass die Rebroussementskurve die Gerade g durchschneidet, so wird die Charakteristikkurve von g in dem Augenblick, wo R Rebroussementspol wird, eine Spitze erster Art haben. Wenn hingegen die Gerade g eine Stützgerade der Rebroussementskurve ist, so wird die Charakteristikkurve einen gewöhnlichen Konvexpunkt aufweisen. Es folgt dies unmittelbar aus unseren obigen Bemerkungen über die Konkavität der Kurve.

44. Geht die Gerade g durch den Momentanpol O hindurch, ohne den Rebroussementspol zu enthalten, so schneidet ihre Normale in O den Rebroussementskreis in einem Punkt O_1, und es ist ersichtlich, dass g bei der Rollbewegung eine konvexe Charakteristikkurve erzeugt, deren konkave Seite dem Punkte O_1 zugekehrt ist.

45. Geht die Gerade g in einem gewissen Moment durch die beiden Punkte O und R hindurch, kommt es immerhin darauf an zu untersuchen, ob die Lagenverhältnisse der veränderlichen Punkte O und R zu g wechseln oder nicht, wenn man zu den Nachbarlagen O' und R' übergeht. Es wird hierfür entscheidend sein, ob die Schnittpunkte der Nachbarnormalen OR und $O'R'$ der Kurve r bei dem Grenzübergang $O' \to O$, $R' \to R$, zuletzt stets auf der Strecke $O'R'$ selbst, oder stets auf der Verlängerung dieser Strecke liegen. Wenn z. B. die Kurve r konvex ist und ihre konkave Seite von R abgekehrt ist, fällt der Schnittpunkt von OR und $O'R'$ immer auf die Verlängerung von $O'R'$ über O' hinaus, und das hat zur Folge, dass die augenblickliche Lage $g (= OR)$ die Charakteristikkurve in O berührt derart, dass die Nachbarlagen der geraden Linie die Punkte O' und R' nicht trennen. Die Charakteristikkurve hat sonach eine Spitze erster Art in O.

Ist die Kurve r konvex und die konkave Seite der Kurve dem Punkt R zugekehrt, kommt es offenbar darauf an, ob bei dem Grenzübergang $O' \to O$, $R' \to R$ die Mittelkrümmung des Bogens OO' sich dem Wert $OR = \frac{1}{k}$ nähern kann oder nicht, d. h., ob das Verhältniss der Totalkrümmungen entsprechender Bogen auf r und f bei dem Grenzübergang dem Grenzwert $\frac{1}{2}$ zustreben kann oder nicht. Kommt unter den möglichen Grenzwerten des genannten Verhältnisses die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht vor, so wird die Charakteristikkurve in der Nähe von O nach jeder Seite hin einen konvexen Bogen enthalten und die beiden Bogen berühren die Gerade g in O. Wenn die Grenzwerte des genannten Verhältnisses rechts und links alle $< \frac{1}{2}$ oder alle $> \frac{1}{2}$, hat die Kurve eine Spitze erster Art in O; sind die Grenzwerte rechts $< \frac{1}{2}$, links $> \frac{1}{2}$, oder umgekehrt, hat die Kurve einen Wendepunkt in O. Nur wenn das Verhältniss der Totalkrümmungen entsprechender Bogen der Kurven r und f sich dem Wert $\frac{1}{2}$ nähern kann, kann es geschehen, dass Singularitäten auf der Charakteristikkurve sich häufen.

Ist die Kurve r stetig gekrümmt, also auch die Kurve f, wird der oben erwähnte kritische Fall nur eintreten können, wenn das Verhältniss der Krümmungsradien der beiden Kurven $= 2$ ist. Der einfachste Fall ist der, wo die Kurven Kreise sind. Die gerade Linie g geht dann durch einen festen Punkt hindurch. Schon in diesem elementaren Fall hat somit die Charakteristikkurve keine Tangente mehr.

46. Aus den vorhergehenden Betrachtungen können wir nun die folgenden Sätze herleiten:

Satz 19. *Ist die gerade Linie g nicht Normale der Kurve r und hat sie höchstens eine endliche Anzahl von Punkten mit der Rebroussementskurve gemein, so ist die Charakteristikkurve von g eine einfache Kurve, welche jede Lage von g berührt und deshalb als Hüllkurve von g bezeichnet werden kann. Die Kurve besitzt höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen erster Art, hingegen keine Wendepunkte und keine Spitzen zweiter Art.*

Satz 20. *Hat die gerade Linie g ein zusammenhängendes Stück mit der Rebroussementskurve gemein, so wird g für das entsprechende Intervall der Bewegung durch einen festen Punkt hindurchgehen. Die zu g parallelen Geraden werden nämlich Kreise einhüllen.*

Da der Krümmungsradius der Charakteristikkurve gleich dem Abstand des Rebroussementspols von der geraden Linie g ist, gilt ferner der Satz:

Satz 21. *Wenn die Rebroussementskurve nur eine endliche Anzahl Punkte aufweist, deren Abstand von g ein Maximum oder Minimum ist, so hat der Krüm-*

mungsradius der Charakteristikkurve eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis. Die Charakteristikkurve ist somit eine einfache abteilungsweise monoton gekrümmte Kurve ohne Wendepunkte.

VI.

Die Hüllkurve einer stetig-gekrümmten Kurve.

47. Wir wollen nun unsere Untersuchungen erweitern, indem wir dazu übergehen statt einer geraden Linie eine willkürliche stetig gekrümmte Kurve

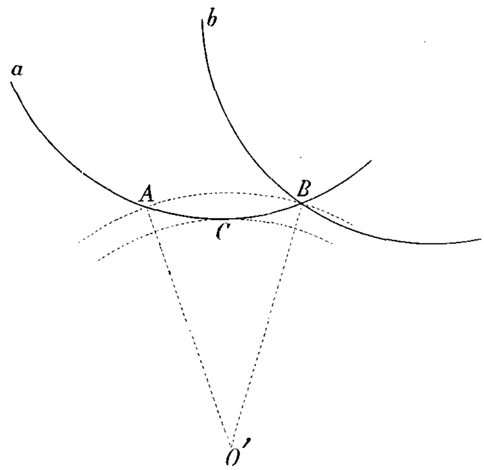

Fig. 7.

der beweglichen Figur in Betracht zu ziehen. Für eine bestimmte Lage a dieser Kurve definieren wir den Charakteristikpunkt als Grenzlage eines Schnittpunktes der Kurve a und einer Nachbarlage b dieser Kurve, indem b nach a konvergiert (Fig. 7). Ein solcher Charakteristikpunkt wird nicht notwendig existieren. Die Kurve a hat nicht einmal notwendig Punkte mit der Kurve b gemein. Wir denken uns aber hier, dass b, jedenfalls von einer gewissen Stufe des Grenzübergangs an, die Kurve a in einem Punkt B schneidet welcher bei dem Grenzübergang $b \rightarrow a$ längs der Kurve a variiert. Die beiden Kurven a und b (oder vielmehr die beiden entsprechenden Lagen der beweglichen Figur) haben einen Rotationspol O', derart dass die Kurve b durch die Drehung um einen gewissen Winkel θ um O' mit a zur Deckung gebracht werden kann. Der Schnittpunkt B (Fig. 7) wird dann, wenn O' von B verschieden ist, durch diese Drehung in einen neuen Punkt A auf a übergehen, und es gibt somit einen Kreis, welcher mit der Kurve

a die beiden Punkte A und B gemein hat, und dessen Mittelpunkt nach O' fällt. Es muss aber dann auch ein Kreis existieren, welcher die Kurve r in einem Punkt C des Bogens AB berührt, und dessen Mittelpunkt nach O' fällt. Die Normale der Kurve a in C geht durch O' hindurch. Wenn nun $b \to a$, $O' \to O$, $\theta \to o$, so folgt, dass wenn B gegen eine bestimmte Grenzlage konvergiert, A nach derselben Grenzlage konvergieren muss, und der Punkt C ebenso. Also:

Satz 22. *Jeder Charakteristikpunkt von a ist der Fusspunkt einer Normalen der Kurve a, welche durch den Momentanpol hindurch geht.*

48. Wir fragen nun, ob umgekehrt jeder Fusspunkt M einer Normalen von a, welche durch den Momentanpol hindurchgeht, notwendig ein Charakteristikpunkt von a ist. Offenbar ist hierfür erforderlich, dass man in der Umgebung von M auf a zwei Punkte A und B auffinden kann, derart, dass $O'A = O'B$ und $\sphericalangle AO'B = \theta$ (die Bezeichnungen sind wie oben), und dass dies immer Geltung haben wird, während des Grenzüberganges $O' \to O$ (von einer gewissen Lage von O' an).

Eine hinreichende Bedingung hierfür wird sein, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OM die Kurve a im Punkte M nicht durchkreuzt. Es wird also jedenfalls genügen, wenn dieser Kreis nicht Krümmungskreis von a in M ist. Also:

Satz 23. *Ist M der Fusspunkt einer Normalen von a, welche durch den Momentanpol geht, und fällt ausserdem O nicht mit dem Krümmungsmittelpunkt von a zusammen, so wird M ein Charakteristikpunkt von a.*

49. Es soll nun angenommen werden, dass unsere Bewegung eine einfache Bewegung ist, deren Polkurven r und f gegeben sind, und wir setzen ferner voraus, dass kein Krümmungsmittelpunkt von a auf r fällt. Der Fall, wo der Momentanpol in einem Krümmungsmittelpunkt von a liegt, wird hiermit ausgeschlossen. Wir suchen nun die Charakteristikkurve d. h. den geometrischen Ort der Charakteristikpunkte von a, wenn die Bewegung vor sich geht.

In Fig. 8 bedeuten r und f die zwei Polkurven und die augenblickliche Lage der Kurve a ist k. OA ist eine Normale zu k. Es soll vorausgesetzt werden, dass diese Normale mit der gemeinsamen Tangente der Polkurven nicht zusammenfällt.

A ist der augenblickliche Charakteristikpunkt. Einen anderen Charakteristikpunkt findet man folgenderweise: B ist ein Punkt auf k in der Nähe von A; die Normale von k in B schneidet r in P in der Nähe von O. Bei der Rollbewegung wird P in P' (auf f) übergehen, und B geht gleichzeitig in einen

Punkt C über, derart, dass CP' Normale der neuen Lage von k wird, d. h. C wird ein Charakteristikpunkt für diese neue Lage. Den Punkt C erhalten wir durch eine Drehung von B um den Rotationspol O', derart bestimmt, dass diese Drehung P in P' und die vorwärts laufende Halbtangente von r in P in die vorwärtslaufende Halbtangente von f in P' überführt. Der Drehwinkel soll mit θ bezeichnet werden. Wenn nun die Halbstrahlen AB und BC denselben Umlaufssinn um O (und O') bestimmen, und dies fortwährend stattfindet bei dem Grenzübergang $O' \to O$, $P \to O$, $P' \to O$, $\theta \to 0$, so muss der Bogen AC der Charakteristikkurve in A dieselbe Halbtangente wie der Bogen AB von k haben. Wir wollen diese Bedingung etwas näher untersuchen. Die Bewegung ist einfach, die Charakteristik k hat somit immer dasselbe Vorzeichen, und die Richtungsänderungen der geraden Linien der beweglichen Figur sind durchweg monoton. Hieraus folgt, dass der durch den Halbstrahl BC um den Punkt O' bestimmte Umlaufssinn für hinreichend kleine Bogen OP unveränderlich ist. Die Erfüllung der Bedingung kommt also nur darauf an, ob der Halbstrahl AB denselben Umlaufssinn um O' bestimmen wird. Wir nehmen nun zunächst an, dass A von O verschieden ist (wir erinnern daran, dass wir im voraus angenommen haben, dass der Krümmungsmittelpunkt A_1 von k in A nicht nach O fällt, und ferner, dass die gerade Linie OA nicht mit der Tangente t der beiden Polkurven in O zusammenfällt). Den Bogen AB auf k denken wir uns so klein gewählt, dass jede Normale dieses Bogens den Bogen OP von r in einem und nur einem Punkt schneidet; hierfür ist nur erforderlich, dass der Winkel zwischen OA und der Tangente t von r in O grösser als die Schwankung der Tangentenrichtung längs dem Bogen OP sei, und diese Bedingung ist immer erfüllbar, wenn OA von t verschieden ist. Es stellt sich so heraus, dass der Halbstrahl AB, wenn $B \to A$, zuletzt einen konstanten Umlaufssinn um O (und O') haben wird, und dieser Umlaufssinn stimmt mit demjenigen Umlaufssinn überein, welcher durch die Halbtangente des Bogens AB in A um den Punkt O herum bestimmt wird.

Wenn nun dieser Umlaufssinn mit dem Drehsinn der Rollbewegung übereinstimmt, so ist die obenerwähnte Bedingung erfüllt, und die Halbstrahlen AB und AC haben gemeinsame Grenzlage. *Die Charakteristikkurve hat somit in diesem Falle dieselben Halbtangenten wie die Kurve k.*

50. Indem wir fortwährend die aufgestellten Bedingungen festhalten, also im wesentlichen die Bedingung, dass die Halbtangente des in Betracht kommenden Bogens AB auf k einen Umlaufssinn um den Momentanpol O herum bestimmt, welcher mit dem Drehsinn der Rollbewegung übereinstimmt, wollen wir

zeigen, dass die Charakteristikkurve eine bestimmte Krümmung in A besitzt. Die Normalen $A\,O$ und $C\,P'$ der Kurve in A und C schneiden einander in N, und wenn $P \to O$, $P' \to O$, $C \to A$, wird N gegen eine bestimmte Grenzlage A_2 auf der Geraden $A\,O$ konvergieren, nämlich gegen den Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve desjenigen Punktes, welcher im Augenblick in den Krümmungsmittelpunkt A_1 von k in A fällt. Dies wird in folgender Weise bestätigt. Die Normalen in A und B und den zwischenliegenden Punkten des Bogens $A\,B$ von k denken wir uns mit positiven Richtungen versehen, welche bei stetigem Durchlaufen des Bogens stetig ineinander übergehen. Die Richtungen der Normalen

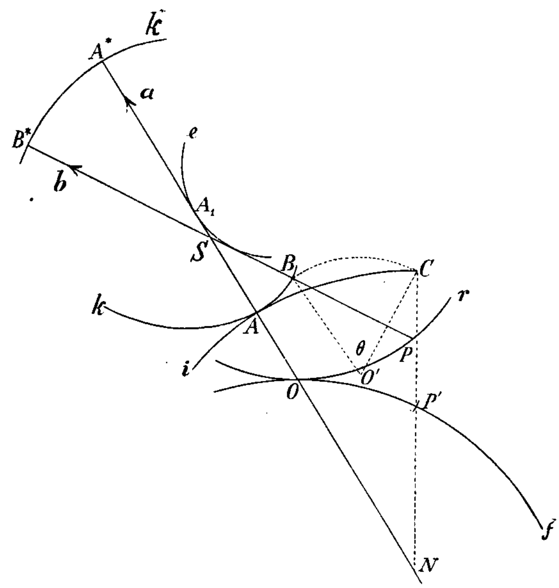

Fig. 8.

in A und B seien mit a und b bezeichnet (Fig. 8). Es sei ferner c die positive Richtung der Geraden $P'\,C$, welche dadurch bestimmt wird, dass b durch das Rollen des Bogens $O\,P$ auf $O\,P'$ in c übergeht. Die Halbtangente der Bogen $O\,P$ und $O\,P'$ in O werde mit t bezeichnet. Die geraden Linien $O\,P$ und $O\,P'$ versehen wir mit positiven Richtungen, welche durch die angegebene Anordnung der Punkte (O, P und O, P') bestimmt werden. Die Dreiecke $O\,S\,P$ und $N\,O\,P'$ haben dann bestimmte positive Richtungen auf allen Seiten, und indem wir die Seiten und die Winkel der Dreiecke hiermit übereinstimmend mit Vorzeichen rechnen (die Winkel einem festen Umlaufssinn gemäss), wird — wie bekannt — die sinus-Relation allgemeine Gültigkeit haben, wie es in den unten angegebenen Formeln deutlich hervortritt.

51. Im Dreieck OSP hat man

$$\frac{\sin(ab)}{OP} = \frac{\sin(OP, b)}{OS},$$

also, indem $S \to A_1$:

$$\frac{(ab)}{OP} \to \frac{\sin(ta)}{OA_1}.$$

Da nun die Charakteristik k der Bewegung so bestimmt wird, dass

$$\frac{(bc)}{OP} \to k,$$

erhält man durch Addition

$$\frac{(ac)}{OP} \to k + \frac{\sin(ta)}{OA_1}.$$

Im Dreieck NOP' hat man ferner:

$$\frac{\sin(OP', c)}{ON} = \frac{\sin(ac)}{OP'}$$

also

$$\frac{\sin(OP', c)}{ON} \to k + \frac{\sin(ta)}{OA_1},$$

d. h.

$$\frac{1}{ON} \to \frac{k}{\sin(ta)} + \frac{1}{OA_1}.$$

Es geht hieraus hervor, dass der Punkt N einer bestimmten Grenzlage A_2 zustrebt, welche durch die folgende Formel bestimmt wird:

$$\frac{1}{OA_2} = \frac{k}{\sin(ta)} + \frac{1}{OA_1}.$$

Nach der Euler-Savary'schen Formel fällt diese Grenzlage gerade mit dem Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve (A_1) des Punktes A_1 zusammen.

Die Charakteristikkurve ist also eine stetig gekrümmte Hüllkurve der beweglichen Kurve a, so lange die hier vorausgesetzten Bedingungen erfüllt sind.

Unsere Betrachtungen umfassen auch den Fall, wo der Punkt S bei dem Grenzübergang $P \to O$ fest liegt, d. h. die Kurve k ein Kreis ist, und die gewöhnliche Euler-Savary'sche Formel ist infolgedessen in der obigen Formel enthalten. Wir fügen hinzu, dass unsere Herleitung auch den Grenzfall umfasst, wo A_1 unendlich fern wird.

52. Bisher haben wir bei allen diesen Betrachtungen vorausgesetzt, dass der durch die Halbtangente des Bogens AB in A um den Punkt O herum bestimmte Umlaufssinn mit der konstanten Drehrichtung der Rollbewegung übereinstimmt. Diese Bedingung ist in der Fig. 8 für die Kurve k^* nicht erfüllt. Der Charakteristikpunkt ist A^*, und die Halbtangente des Bogens A^*B^* in A^* bestimmt eine Drehrichtung um O, welche der Drehrichtung der Rollbewegung entgegengesetzt ist. Es leuchtet aber ein, dass man in diesem Falle jedenfalls für eine gewisse Umgebung von A^* eine geeignete Parallelkurve k von k^* bestimmen kann, für welche unsere ursprünglich vorausgesetzte Bedingung wiederum erfüllt ist. Die den beiden Kurven k^* und k entsprechenden Charakteristikkurven i^* und i werden dann auch Parallelkurven zueinander sein, weil der Abstand AA^* konstant ist. Und solange A^* nich mit A_2 zusammenfällt, wird die Kurve i^* in A^* sicher dieselben Halbtangenten wie k^* haben. Ebenso wird der Krümmungsmittelpunkt A_2 der Kurve i^* nach der obigen Formel bestimmt:

$$\frac{1}{OA_2} = \frac{k}{\sin(ta)} + \frac{1}{OA_1}.$$

53. Unseren früheren Untersuchungen über Parallelkurven zufolge (21, Satz 10) können wir nun aber unsere Resultate auch auf den Fall ausdehnen, wo A^* nach A_2 fällt, wenn nur in der Umgebung von A^* der Abstand A^*A_2, wenn A^* und hiermit A_2 variiert, nicht unendlich oft sein Vorzeichen wechselt. Wenn A^*A_2 in einem Augenblick den Wert Null annimmt, aber vor und nach diesem Augenblick positiv bezw. negativ ausfällt (oder umgekehrt), wird dieses zur Folge haben, dass die Kurve i^* in der Umgebung von A^* aus zwei konvexen Bogen besteht, welche eine Spitze erster Art in A^* bilden. Wenn hingegen A^*A_2 Null wird, aber vor und nach dem betreffenden Zeitpunkt dasselbe Vorzeichen behält, so hat die Kurve i^* in A^* einen einfachen Konvexpunkt. Die erweiterte Euler-Savary'sche Formel behält in allen diesen Fällen ihre Gültigkeit.

Wechselt das Vorzeichen der Strecke A^*A_2 unendlich oft, indem sie den Wert Null passiert, entsteht auf der Kurve i^* eine Häufung von Singularitäten, wobei die Tangente in A^* unbestimmt werden kann.

Schliesslich soll auch der einfache Fall genannt werden, wo A^*A_2 konstant den Wert Null hat. In diesem Falle ist i ein Kreis, und i^* ein fester Punkt, d. h. die Kurve k^* wird während der Rollbewegung durch einen festen Punkt hindurchgehen.

54. Um ein anschauliches Bild der gewonnenen Resultate geben zu können, wollen wir eine Hilfskurve einführen, welche als *Krümmungsbild* der gegebenen Kurve k bezüglich der vorgelegten einfachen Rollbewegung bezeichnet werden soll. Diese Kurve ist der geometrische Ort der Punkte A_2 in der beweglichen Figur, welche folgenderweise bestimmt werden. Jedem Punkt A der Kurve k entspricht ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt A_1 dieser Kurve. Auf der Normalen a von k in A bestimmt man einen Punkt A_2 derart, dass die folgende Gleichung besteht:

$$\frac{1}{OA_2} = \frac{k}{\sin(ta)} + \frac{1}{OA_1},$$

wo die Buchstaben die übliche Bedeutung haben. Wenn A die Kurve k durchläuft, beschreibt A_2 das Krümmungsbild von k. Die Kurve k und die zugehörigen Parallelkurven haben alle dasselbe gemeinsame Krümmungsbild.

Unsere Resultate lassen sich jetzt so zusammenfassen:

Satz 24. *Wenn k eine stetiggekrümmte Kurve ist, so dass kein Punkt und kein Krümmungsmittelpunkt von k auf die Kurve r fällt, und keine Normale von k die Kurve r berührt, so lässt sich folgendes über ihre Charakteristikkurve aussagen.*

Wenn k keinen selbstkorrespondierenden Punkt mit ihrem Krümmungsbild gemein hat, ist die Charakteristikkurve von k eine stetig gekrümmte Kurve. Sie berührt jede Lage von k in dem entsprechenden Charakteristikpunkt.

Wenn k einen isolierten selbstkorrespondierenden Punkt mit ihrem Krümmungsbild gemein hat, so entsteht auf der Charakteristikkurve eine Spitze erster Art, oder ein einfacher Konvexpunkt, je nachdem k ihr Krümmungsbild durchkreuzt oder nicht. In beiden Fällen hat die Charakteristikkurve im betreffenden Punkt dieselbe Tangente wie k.

In allen diesen Fällen ist die Charakteristikkurve Hüllkurve von k. Sie hat in jedem Punkt einen bestimmten Krümmungsradius, welcher durch die erweiterte Euler-Savary'sche Formel bestimmt wird.

Hat die Kurve k unendlich viele selbstkorrespondierende Punkte mit ihrem Krümmungsbild gemein, so dass eine Häufung von Durchkreuzungen der beiden

Kurven entsteht, wird die Charakteristikkurve eine Häufung von Singularitäten aufweisen, und die Eindeutigkeit der Tangente ist nicht mehr gesichert.

Hat die Kurve k ein ganzes Bogenstück mit ihrem Krümmungsbild gemein, wird k innerhalb des entsprechenden Bewegungsintervalls durch einen festen Punkt hindurchgehen. (Die Parallelkurve wird einen Kreis einhüllen).

55. Schliesslich wollen wir einige besondere Fälle besprechen, welche bei den vorstehenden Untersuchungen ausgeschlossen wurden.

1. Der Punkt A fällt auf die Tangente t der Kurve r in O, ohne doch nach O zu fallen. Es wird hier bezüglich der Bestimmung der Grenzlage des Halbstrahls AP von entscheidender Bedeutung sein, dass $\frac{AB}{BC}$ nach Null konvergiert. (Der Fall, wo A_1 nach O fällt ist fortwährend ausgeschlossen). Es folgt hieraus, dass dem Halbstrahl AC eine eindeutig bestimmte Grenzlage zukommt, senkrecht zu OA und mit dem Drehsinn der Rollbewegung übereinstimmend. Also wird die Charakteristikkurve die Kurve k in einfacher Weise berühren.

2. Der Krümmungsmittelpunkt A_1 von k fällt nach dem Momentanpol O. Es kommt dann darauf an zu untersuchen, ob und wie die Normalen von k in der Nachbarschaft von A (auf beiden Seiten von A) die Kurve r schneiden. Hierdurch wird Aufschluss darüber erhalten, inwiefern die Nachbarpunkte von A bei der Erzeugung der Charakteristikkurve in Betracht kommen oder nicht. Und es lässt sich hieraus schliessen, ob der Punkt A als Punkt einer Charakteristikkurve (Hüllkurve) überhaupt in Betracht kommt und im bejahenden Falle, wie die beiden Zweige der Kurve beschaffen sind. Hat z. B. die Kurve k eine einfache Evolute, welche die Kurve r in A_1 durchschneidet, entsteht eine Hüllkurve, welche in A eine Spitze zweiter Art aufweist. Hat die Kurve k eine einfache Evolute, welche die Kurve r in A_1 berührt und ganz umschliesst, so giebt es überhaupt keine Hüllkurve von k in der Umgebung von A.

VII.

Stützkurven.

56. Wenn einer bestimmten Lage ABC einer beweglichen Figur kein eindeutig bestimmter Momentanpol entspricht, kann man von mehreren Momentanpolen, nämlich den Grenzlagen des Drehpols O' der Figur ABC und der Nachbarfigur $A'B'C'$, sprechen. Der Momentanpol kann völlig unbestimmt werden oder an

bestimmte geometrische Örter (Punktmengen) gebunden werden. Es lässt sich nach unseren vorhergehenden Entwicklungen folgendes aussagen:

Wenn ein Punkt A der Figur eine eindeutig bestimmte Bahntangente a hat, so wird der Momentanpol an die Normale von a in A gebunden.

Wenn eine gerade Linie l der Figur einen eindeutig bestimmten Charakteristikpunkt A hat, wird der Momentanpol an die Normale von l in A gebunden.

Eine naheliegende Erweiterung dieser Sätze könnte man im folgenden Satz vermuten:

Wenn eine Kurve φ der beweglichen Figur eine feste Kurve ψ berührt, ist der Momentanpol an die gemeinsame Normale im Berührungspunkt der beiden Kurven gebunden.

Doch lässt sich der Satz in dieser Form nicht festhalten. Es müssen den beiden Kurven φ und ψ besondere Bedingungen auferlegt werden. Wir setzen vorläufig voraus, dass die Kurven stetig gekrümmt sind.

57. Der augenblickliche Berührungspunkt der beiden Kurven werde mit A bezeichnet, und ein Paar entsprechende Punkte, die bei der Bewegung später mit einander in Berührung kommen, seien B und C. B gehört der beweglichen Kurve φ, C der festen Kurve ψ an. Wenn B nach C gelangt, wird auch die Tangente b von φ in B in die Tangente c von ψ in C übergehen, und die Richtungen der Tangenten b und c werden sich dabei in bestimmter Weise entsprechen. Der Drehpol O' der beiden Figuren bB und cC ist an die Mittelsenkrechte von BC und an die äussere Halbierungsgerade des Winkels (bc) gebunden. Es kommt nun darauf an, ob die Grenzlagen von O' für $B \to A$, $C \to A$, an die gemeinsame Normale der Kurven φ und ψ in A gebunden sein müssen.

Der Grenzübergang $B \to A$, $C \to A$, gehe so vor sich, dass entsprechende von einander verschiedene Punkte B und C die Folgen

$$B_1, B_2, B_3, \ldots \to A,$$
$$C_1, C_2, C_2, \ldots \to A,$$

und die entsprechenden von einander verschiedenen Tangenten b und c die Folgen

$$b_1, b_2, b_2, \ldots \to a,$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots \to a,$$

durchlaufen, und die Schnittpunkte der einander entsprechenden Tangenten $b_1 c_1$, $b_2 c_2, \ldots$ die Punktfolge $S_1, S_2, S_3, \ldots$ bilden.

Wenn nun entweder die Gerade $B_i\,C_i$ nach der Tangente a in A konvergiert, oder der Punkt S_i nach A konvergiert, so lässt sich schliessen, dass sämmtliche Grenzlagen von O' an die Normale in A gebunden sind.

58. Wir denken uns die beiden Kurven φ und ψ von A aus durch die natürlichen Gleichungen

$$\theta = \theta(s), \ \theta_1 = \theta_1(s),$$

dargestellt, und setzen voraus, dass die Funktion $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton ist. Wir wollen zeigen, dass dann die obengenannte Bedingung erfüllt ist.

Hierzu ist nur zu beweisen, dass wenn $B_i\,C_i$ sich einer Grenzlage nähert, welche von der Tangente in A verschieden ist, dass dann der Punkt S_i notwendig nach A konvergieren muss. Mit Hülfe der sinus-Formel im Dreieck $S_i\,B_i\,C_i$ erhalten wir die hierfür erforderliche Bedingung; diese besagt, dass

$$\frac{\sphericalangle\,(b_i\,c_i)}{B_i\,C_i} \to \infty.$$

In dem Falle, wo der Bogen $A\,B_i$ von φ dem Bogen $A\,C_i$ von ψ (für jeden Wert von i) gleich wird, einer Rollbewegung entsprechend, ist die Bedingung erfüllt.[1] In anderen Fällen tragen wir auf ψ einen Bogen $\widehat{A\,D_i} = \widehat{A\,B_i}$ ab. Die Tangente in D_i soll mit d_i bezeichnet werden. Man hat nun

$$\frac{\sphericalangle\,(b_i\,d_i)}{B_i\,D_i} \to \infty.$$

Die Mittelkrümmung des Bogens $B_i\,D_i$ ist beschränkt, weil die Kurven stetig gekrümmt vorausgesetzt sind. Wir können also setzen

$$\frac{\sphericalangle\,(c_i\,d_i)}{C_i\,D_i} \leqq \varkappa,$$

wo $\varkappa$ eine feste numerische Konstante ist (etwa die grösste Krümmung der Kurve ψ).

Da nun das Dreieck $B_i\,C_i\,D_i$ bei dem Grenzübergang nach A sich so verändert, dass die Seiten nach drei verschiedenen Grenzrichtungen konvergieren:

[1] Die Geometrie der Wirklichkeit (Acta mathematica Bd. 40, S. 54—56).

$B_i C_i$ nach eine Richtung, welche von der Tangente in A verschieden ist; $C_i D_i$ nach der Tangente in A; und $B_i D_i$ nach der Normalen in A, so hat man:

$$\frac{\sphericalangle (b_i d_i)}{B_i C_i} = \frac{\sphericalangle (b_i d_i)}{B_i D_i} \cdot \frac{B_i D_i}{B_i C_i} \to \infty,$$

$$\frac{\sphericalangle (c_i d_i)}{B_i C_i} = \frac{\sphericalangle (c_i d_i)}{C_i D_i} \cdot \frac{C_i D_i}{B_i C_i} < \varkappa_1,$$

wo $\varkappa_1$ eine numerische Konstante ist.

Durch Addition oder Subtraktion erhält man hieraus:

$$\frac{\sphericalangle (b_i c_i)}{B_i C_i} \to \infty,$$

was zu beweisen war.

Wir haben somit den Satz:

Satz 25. *Wenn eine stetig gekrümmte unveränderliche Kurve sich in ihrer Ebene so bewegt, dass sie stets eine feste stetig gekrümmte Kurve berührt, so wird eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Momentanpol an die Normale der Kurven in dem augenblicklichen Berührungspunkt gebunden ist, dadurch ausgedrückt, dass die beiden Kurven durch natürlichen Gleichungen*

$$\theta = \theta(s), \ \theta_1 = \theta_1(s),$$

dargestellt werden können, wobei $\theta(s) - \theta_1(s)$ eine abteilungsweise monotone Funktion von s ist.

59. Wir haben uns hier auf stetig gekrümmte Kurven beschränkt. Die Beweismethode führt doch offenbar noch weiter. Von Krümmungseigenschaften der beiden Kurven haben wir nur benützt, dass eine der beiden Kurven, innerhalb der in Betracht kommenden Umgebung, beschränkte Mittelkrümmung hat, und dies wird also tatsächlich genügen.

Wenn die beiden Kurven konvex (und ohne Knickpunkte) sind, und die Kurven ausserdem ihre konkaven Seiten von einander abkehren, braucht man keine andere Bedingung. In diesem Falle ist nämlich sofort ersichtlich, dass entweder $B_i C_i$ nach der Tangente in A konvergiert (nämlich wenn die Halbstrahlen $A B_i$ und $A C_i$ nach entgegengesetzten Richtungen konvergieren), oder der Schnittpunkt $S_i = b_i c_i$ der beiden Tangenten b_i und c_i nach A konvergiert (nämlich wenn die Halbstrahlen $A B_i$ und $A C_i$ nach derselben Richtung konvergieren).

60. Wenn nun in einer beweglichen Figur zwei stetig gekrümmte Kurven φ und φ_1 zwei feste Stützkurven ψ und ψ_1 haben, welche auch als stetig gekrümmt vorausgesetzt werden, und diese Kurven der in 58 angegebenen Bedingungen genügen, so hat die Bewegung einen bestimmten Momentanpol, welcher als Schnittpunkt der Normalen in den beiden Stützpunkten ermittelt wird, indem wir hierbei voraussetzen, dass die beiden Normalen nicht zusammenfallen. Auf Grund naheliegender weiterer Voraussetzungen, nach welchen die augenblicklichen Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Kurven von dem Momentanpol, und ausserdem voneinander verschieden sind, und der Momentanpol innerhalb des Bewegungsintervalls nicht unendlich fern ist, kann man schliessen, dass die Bewegung eine einfache Bewegung ist. Die feste Polkurve wird als Ort des Momentanpols ermittelt, und mit Hilfe der Charakteristik, die in jedem Augenblick aus den Krümmungsmittelpunkten der gegebenen Kurven abgeleitet wird, bestimmt man dann die rollende Polkurve. Bei der hierdurch bestimmten Rollbewegung werden dann die Kurven φ und φ_1 stets die gegebenen Kurven ψ und ψ_1 berühren.

VIII.

Die monotone Rollbewegung.

61. Die einfache Bewegung ist ein Spezialfall der monotonen Rollbewegung, welche dadurch entsteht, dass eine Kurve r mit stetig-veränderlichen Halbtangenten (eine stetig gerichtete Kurve) auf einer anderen stetig gerichteten Kurve rollt, derart dass die beiden Kurven sich durch natürliche Gleichungen

$$\theta = \theta(s), \quad \theta_1 = \theta_1(s)$$

darstellen lassen, wobei $\varphi(s) = \theta(s) - \theta_1(s)$ eine monotone Funktion von s ist. Ist $\varphi(s)$ differenzierbar, $\varphi'(s) > 0$, haben wir eine einfache Bewegung.

Die allgemeine monotone Rollbewegung lässt sich mit denselben Hilfsmitteln untersuchen, welche im vorhergehenden für die einfache Bewegung entwickelt wurden. Wenn $\varphi(s) = \theta(s) - \theta_1(s)$ nicht differenzierbar ist, wählt man auf der Kurve r monotone nach dem Momentanpol O konvergierende Punktfolgen O_i aus, und auf f die entsprechenden Punktfolgen P_i ($\widehat{OO_i} = \widehat{OP_i}$), derart dass die entsprechenden Verhältnisse $\frac{\theta_i}{\widehat{OO_i}}$, wobei θ_i den Drehwinkel bei dem Abrollen des Bogens OO_i auf OP_i bedeutet, einem bestimmten Grenzwert zustreben. Für den

Grenzübergang durch diese Folge $(O_i \to O,\ P_i \to O,\ \frac{\theta_i}{O\,O_i} \to k_{O_i})$ existiert sonach eine bestimmte Charakteristik, ein Wendekreis und ein Rebroussementskreis. Für jeden Punkt A der beweglichen Figur wird hierdurch eine Folge von Lagen A_i bestimmt, welche der Bahnkurve von A angehört, und für welche ein bestimmter Schmiegungskreis existiert. Dieser Schmiegungskreis lässt sich mit Hülfe der Euler-Savary'schen Formel bestimmen, indem man als Wert der Charakteristik k den obengenannten Grenzwert k_{O_i} benutzt. Durch die Wahl einer neuen Folge O_i wird man in ähnlicher Weise einen neuen Schmiegungskreis der Bahnkurve in A erhalten können. Wenn die Menge der Werte k_{O_i} beschränkt ist, wird man sonach eine beschränkte Menge von Krümmungsradien der Bahnkurve in A erhalten.

Andere Fragen können in ähnlicher Weise behandelt werden.

IX.

Die Bewegung auf der Kugel.

62. Die vorstehenden Untersuchungen sind so allgemein gehalten, dass sie sich ohne Schwierigkeit auf der Kugelfläche (und in der gewöhnlichen nicht-Euklidischen Geometrie) verwenden lassen. Dies gilt unmittelbar für die rein geometrischen Untersuchungen. Aber auch die Formeln lassen sich für die Kugel in ungefähr derselben Weise herleiten. Die Euler-Savary'sche Formel nimmt folgende Gestalt an

$$k = \sin(t, O\,A)\left(\frac{1}{\sin(O\,A_1)} - \frac{1}{\sin(O\,A)}\right),$$

wo k die Charakteristik der Bewegung bedeutet d. h. den Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Drehwinkel eines bestimmten Bewegungsintervalls und der entsprechenden Bogenlänge auf der festen Polkurve.

Auch die Eigenschaften der Hüllkurven, und die Bestimmung der Bewegung durch Stützkurven, lassen sich für die Geometrie der Kugel unmittelbar verwenden.

Die allgemeine einfache Bewegung auf der Kugelfläche lässt sich bequem so darstellen: Man wählt die feste Polkurve f, und zu jedem Punkt O derselben wählt man eine zugeordnete positive Zahl k (die Charakteristik), derart dass k mit O stetig variiert.

63. Die einfache Bewegung auf der Kugel definiert eine stetige Reihe von kongruenten Figuren auf der Kugelfläche. Indem wir in bekannter Weise sämmtliche unter einander kongruente Figuren der Kugelfläche auf den elliptischen 3-dimensionalen Punktraum abbilden, erhalten wir für jede Figur einen entsprechenden Punkt und für die durch die Bewegung gegebene stetige Reihe von Figuren eine Bildkurve im elliptischen Raume. Nach den Eigenschaften der einfachen Bewegung hat diese Bildkurve in jedem Punkt eine mit dem Punkt stetig-variierende Tangente, (mit entgegengesetzten Halbtangenten), eine bestimmte Schmiegungsebene, und eine bestimmte Schmiegungshalbebene, ausserdem auch einen bestimmten Schmiegungskreis, dessen Krümmung gleich der entsprechenden Charakteristik k ist.