

SUR LES SYSTÈMES ADJOINTS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

PAR

RENÉ LAGRANGE

à RENNES.

Introduction.

La théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires adjoints est classique, mais le mode d'exposition synthétique utilisé dans les ouvrages suggère le besoin d'une étude plus analytique.

Deux systèmes d'équations différentielles linéaires du même ordre

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \quad \frac{dX_i}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(t) X_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sont dits adjoints s'il existe une relation bilinéaire à coefficients constants entre les deux intégrales générales x_1, x_2, \dots, x_n , et X_1, X_2, \dots, X_n , de la forme

$$(3) \quad \sum_{i,k} m_{ik} x_i X_k = \text{indépendant de } t.$$

On peut toujours, par une substitution linéaire effectuée sur les inconnues de l'un de ces systèmes, mettre la relation (3) sous la forme

$$\sum_i x_i X_i = C^{te}.$$

Après ce changement, les coefficients des deux systèmes se déduisent les uns des autres par les relations

$$A_{ik}(t) = -a_{ki}(t).$$

La question que l'on peut se poser est alors de savoir si la fonction bilinéaire au premier membre de (3) peut être remplacée par une fonction analytique différente. Ne pourrait-on pas aussi, plus généralement, considérer des systèmes d'ordres différents?

Une telle généralisation est évidemment possible avec des systèmes particuliers d'équations; mais elle ne peut présenter de l'intérêt que si elle peut s'appliquer aux systèmes les plus généraux.

Dans ces conditions, nous verrons que la relation bilinéaire s'impose. D'une manière plus précise, nous allons démontrer que

Si deux systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordres n et p , les plus généraux possible, sont tels que deux systèmes d'intégrales générales x_i et X_j vérifient une même relation analytique

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_p) = C^{te},$$

ces deux systèmes d'équations sont nécessairement du même ordre, la fonction analytique F est nécessairement bilinéaire, de sorte que ces deux systèmes sont adjoints.

CHAPITRE I.

Rotations d'un système d'équations différentielles linéaires.

1. Considérons un système d'équations différentielles linéaires, à n inconnues, et à coefficients analytiques,

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Si $x_{hi}(t)$ ($h=1, 2, \dots, n$) sont n systèmes d'intégrales linéairement distincts, c'est-à-dire tels qu'il n'y ait aucun système de relations linéaires à coefficients constants de la forme

$$\sum_{h=1}^n m_h x_{hi} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

l'intégrale générale de (S) est

$$(1) \quad x_i = \sum_{h=1}^n \alpha_h x_{hi},$$

les α_h étant n constantes arbitraires.

Le déterminant des x_{hi} diffère alors nécessairement de zéro. En effet, si ce déterminant était nul, il existerait un système de relations de la forme

$$(2) \quad \sum_{h=1}^n M_h(t) x_{hi}(t) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

pour $t=t_0$, on aurait donc

$$\sum_{h=1}^n M_h(t_0) x_{hi}(t_0) = 0.$$

Les fonctions

$$x_i = \sum_{h=1}^n M_h(t_0) x_{hi}(t), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

formeraient alors un système d'intégrales de (S), nulles pour $t=t_0$, et il résulte du théorème d'existence qu'elles seraient identiquement nulles. Les x_{hi} ne seraient donc pas linéairement distincts.

2. Réciproquement, un système de n^2 fonctions $x_{hi}(t)$, à déterminant non nul, peut être considéré comme un système fondamental d'intégrales d'un certain système d'équations (S), dont les coefficients sont définis par les équations

$$(3) \quad \frac{dx_{hi}}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{hk}, \quad (h, i=1, 2, \dots, n).$$

On peut associer aux $x_{hi}(t)$ d'autres fonctions que les coefficients a_{ik} de ce système (S), en exprimant chaque dérivée de x_{hi} , non plus en fonction des $x_{hk}(k=1, 2, \dots, n)$, mais en fonction des $x_{ki}(k=1, 2, \dots, n)$; soit

$$(4) \quad \frac{dx_{hi}}{dt} = \sum_{k=1}^n r_{hk}(t) x_{ki}, \quad (h, i=1, 2, \dots, n).$$

Les fonctions r_{hk} ainsi obtenues constituent ce que nous appellerons, un système de rotations de (S). Etant donné le système (S), les rotations r_{hk} ne sont

pas complètement déterminées, car le système fondamental des x_{hi} n'est défini qu'à une substitution linéaire près. Étudions l'effet, sur les rotations, d'une telle substitution

$$x'_{hi} = \sum_{j=1}^n c_{hj} x_{ji},$$

les c_{hj} étant des constantes arbitraires, de déterminant non nul. Si l'on désigne par c^{hj} les éléments réciproques, on a encore

$$x_{ji} = \sum_{h=1}^n c^{hj} x'_{hi}.$$

Les rotations r'_{hl} associées aux x'_{hi} sont données par

$$\frac{dx'_{hi}}{dt} = \sum_{l=1}^n r'_{hl} x'_{li}$$

ou

$$\sum_{j,k,l=1}^n c_{hj} r_{jk} c^{lk} x'_{li} = \sum_{l=1}^n r'_{hl} x'_{li}.$$

Le déterminant des x'_{li} n'étant pas nul, ceci entraîne

$$(\Sigma) \quad r'_{ik} = \sum_{j,h=1}^n c_{ij} c^{kh} r_{jh},$$

de sorte que les rotations d'un système (S) sont définies à une substitution linéaire (Σ) près.

3. D'après ce qui précède, il semble que les rotations ne peuvent caractériser un système d'équations différentielles linéaires; cependant il faut remarquer que les propriétés d'un système (S) ne sont pas modifiées lorsqu'on effectue sur les inconnues x_i une substitution linéaire à coefficients constants; deux systèmes (S) qui peuvent être rendus identiques par une substitution

$$x''_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

peuvent être considérés comme équivalents. Au système fondamental d'intégrales x_{hi} correspondent, après la substitution, les

$$x''_{hi} = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_{hj},$$

ce qui ne change pas les rotations. Par contre les coefficients a_{ik} de (S) sont modifiés par une telle substitution, et l'on vérifie aisément, comme nous l'avons fait au § précédent pour les rotations, qu'ils subissent une substitution linéaire de la forme de (Σ)

$$a''_{ik} = \sum_{j, h=1}^n b_{ij} b^{kh} a_{jh},$$

les b^{kh} étant les éléments réciproques des b_{ij} .

L'ensemble des rotations caractérise donc les propriétés d'un système (S) , au même titre que ses propres coefficients.

Une classe très générale de systèmes d'équations différentielles linéaires (S) comprend ceux dont les n^2 rotations sont des fonctions de t linéairement distinctes, c'est-à-dire non liées entre elles par aucune relation linéaire à coefficients constants. Ces systèmes seront appelés *systèmes à rotations linéairement distinctes*. Cette propriété est évidemment intrinsèque.

En particulier il est impossible de choisir les rotations d'un système à rotations linéairement distinctes de manière que l'une d'elles s'annule identiquement.

C'est de systèmes (S) possédant un pareil degré de généralité que nous nous occuperons au chapitre suivant.

4. Groupe des transformations (Σ) . Les transformations (Σ) constituent un groupe à n^2 variables et n^2 paramètres essentiels. Ce groupe contient la transformation identique, correspondant aux valeurs

$$c_{ik} = \varepsilon_{ik} \quad (\varepsilon_{ii} = 1, \varepsilon_{ik} = 0 \text{ si } i \neq k)$$

des paramètres — les transformations infinitésimales s'obtiennent donc en posant

$$c_{ik} = \varepsilon_{ik} + \gamma_{ik},$$

les γ_{ik} étant des infiniment petits de même ordre. Le déterminant (c) des c_{ik} est, aux infiniment petits de 2^e ordre près,

$$(c) = 1 + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \dots + \gamma_{nn};$$

avec la même approximation, on a

$$\frac{\partial (c)}{\partial c_{ii}} = (c) - \gamma_{ii}$$

$$\frac{\partial (c)}{\partial c_{ik}} = -\gamma_{ki}, \quad i \neq k$$

et, par suite,

$$c^{ik} = \varepsilon_{ik} - \gamma_{ki}.$$

La transformation infinitésimale (Σ) est donc

$$\delta r_{ik} = \sum_{h=1}^n (\gamma_{ih} r_{hk} - \gamma_{hk} r_{ih}) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

et les n^2 opérateurs qu'on en déduit sont

$$X_{rs} U = \sum_{k=1}^n \left(r_{sk} \frac{\partial U}{\partial r_{rk}} - r_{kr} \frac{\partial U}{\partial r_{ks}} \right).$$

Parmi ces n^2 opérateurs linéaires, $n(n-1)$ au moins sont linéairement distincts. Plaçons nous en effet dans les conditions très particuliers où tous les coefficients $r_{\alpha\beta}$ sont nuls, sauf

$$r_{12} = r_{23} = r_{34} = \dots = r_{n-1, n} = 1.$$

$X_{rs} U = 0$ se réduit alors à

$$\frac{\partial U}{\partial r_{r, s+1}} - \frac{\partial U}{\partial r_{r-1, s}} = 0,$$

et l'on peut former le tableau suivant:

pour $r=1$, $\frac{\partial U}{\partial r_{12}} = \frac{\partial U}{\partial r_{13}} = \dots = \frac{\partial U}{\partial r_{1n}} = 0$

pour $r=2$, $\frac{\partial U}{\partial r_{21}} = \frac{\partial U}{\partial r_{22}}, \frac{\partial U}{\partial r_{23}} = \frac{\partial U}{\partial r_{24}} = \dots = \frac{\partial U}{\partial r_{2n}} = 0$

pour $r=3$, $\frac{\partial U}{\partial r_{31}} = \frac{\partial U}{\partial r_{32}}, \frac{\partial U}{\partial r_{32}} = \frac{\partial U}{\partial r_{33}}, \frac{\partial U}{\partial r_{34}} = \dots = \frac{\partial U}{\partial r_{3n}} = 0$

.....

pour $r=n$, $\frac{\partial U}{\partial r_{n-1, 1}} = \frac{\partial U}{\partial r_{n2}}, \frac{\partial U}{\partial r_{n-1, 2}} = \frac{\partial U}{\partial r_{n3}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial r_{n-1, n-1}} = \frac{\partial U}{\partial r_{nn}}, \frac{\partial U}{\partial r_{n-1, n}} = 0;$

ces $n(n-1)$ équations sont bien linéairement distinctes.

Le groupe (Σ) admet donc n invariants au plus. Il en admet effectivement n , et on peut les former aisément à partir des équations finies du groupe.

En effet, on vérifie de suite que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 i_2 \dots i_p} r'_{i_1 i_2} r'_{i_2 i_3} \dots r'_{i_p i_1} &= \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_p \\ j_1 j_2 \dots j_p \\ h_1 h_2 \dots h_p}} c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} \dots c_{i_p j_p} c^{i_2 h_1} c^{i_3 h_2} \dots c^{i_1 h_p} r_{j_1 h_1} \dots r_{j_p h_p} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_p} r_{j_1 j_2} r_{j_2 j_3} \dots r_{j_p j_1}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les n invariants

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 &= \sum_i r_{ii} \\ I_2 &= \sum_{i_1 i_2} r_{i_1 i_2} r_{i_2 i_1} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ I_n &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} r_{i_1 i_2} r_{i_2 i_3} \dots r_{i_n i_1}; \end{aligned} \right.$$

enfin, ces n invariants sont bien distincts, puisque, lorsque les $r_{ik} (i \neq k)$ sont nuls, I_1, I_2, \dots, I_n sont les sommes des puissances $1^e, 2^e, \dots, n^e$, des n fonctions $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$.

5. Ces n invariants sont, par définition, indépendants du choix du système fondamental de (S) . Ils doivent donc s'exprimer à l'aide des coefficients a_{ik} seuls. Il résulte également de la définition des rotations qu'ils ne sont pas changés par une transformation linéaire des inconnues.

Or, relativement à ces transformations, les a_{ik} admettent, d'après ce que nous avons vu au § 3, n invariants

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_i a_{ii} \\ J_2 &= \sum_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ J_n &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_1}. \end{aligned}$$

Les I_1, I_2, \dots, I_n doivent donc être des fonctions des J_1, J_2, \dots, J_n . Ces deux groupes d'invariants sont d'ailleurs identiques. On tire en effet, de (3) et (4),

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{hk} = \sum_{l=1}^n r_{hl} x_{li},$$

ou encore, en désignant par x^{ik} les éléments réciproques des x_{ik} ,

$$r_{hl} = \sum_{i,k=1}^n x_{hk} x^{li} a_{ki};$$

on passe donc des a_{ik} aux r_{hl} par une substitution de la forme (Σ), ce qui démontre bien que

$$I_\alpha = J_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

En résumé, à un système (S) de n équations différentielles linéaires, sont associées n fonctions I_α de t . Ces n invariants ne suffisent évidemment pas pour définir le système (S), mais, pour une valeur donnée de la variable t , on peut toujours, par des substitutions linéaires convenables, donner aux r_{ik} (ou aux a_{ik}) des valeurs numériques arbitraires, sous la seule condition que soient conservées les valeurs de ces n invariants.

CHAPITRE II.

Problème général des systèmes adjoints.

6. Considérons deux systèmes d'équations différentielles linéaires, d'ordres n et p ,

$$(S) \quad \frac{d x_i}{d t} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(S') \quad \frac{d X_j}{d t} = \sum_{l=1}^p A_{jl}(t) X_l, \quad (j=1, 2, \dots, p),$$

Choisissons, pour chacun d'eux, un système fondamental d'intégrales x_{hi}, X_{lj} . Leurs intégrales générales sont respectivement

$$(5) \quad \begin{cases} x_i = \sum_{h=1}^n \alpha_h x_{hi}, & (i=1, 2, \dots, n), \\ X_j = \sum_{l=1}^p \lambda_l X_{lj}, & (j=1, 2, \dots, p), \end{cases}$$

les α_h et λ_l étant des constantes arbitraires.

Nous dirons que (S) et (S') sont *adjoints*, s'il existe, entre les deux systèmes d'intégrales générales, une relation de la forme

$$(6) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_p) = \text{indépendant de } t.$$

Le problème à résoudre est donc double. Tout d'abord, il faut déterminer les formes possibles de la fonction analytique F , sachant que les deux systèmes (S) et (S') ont un certain degré de généralité, que nous préciserons dans le cours du calcul. A priori, nous en connaissons une solution particulière, savoir la fonction bilinéaire.

Ensuite, étant donné F et un système (S), il s'agira de déterminer (S').

Le problème étant supposé possible pour la fonction analytique F , la valeur de (6), indépendante de t , est fonction des seules constantes α et λ . On peut donc écrire

$$(7) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_p) = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

V étant évidemment analytique.

7. Commençons par déterminer les formes possibles de V ; tout le problème réside d'ailleurs dans cette détermination.

Pour cela, nous exprimerons les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial X_j}$ en fonction des $\frac{\partial V}{\partial \alpha_h}, \frac{\partial V}{\partial \lambda_l}$, et écrirons ensuite que

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

La dérivation de (7) par rapport à α_h et λ_l donne, d'après (5),

$$\sum_{i=1}^n x_{hi} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_h},$$

$$\sum_{j=1}^p X_{lj} \frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{\partial V}{\partial \lambda_l},$$

et, par suite,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^n x^{hi} \frac{\partial V}{\partial \alpha_h} \\ \frac{\partial F}{\partial X_j} = \sum_{l=1}^p X^{lj} \frac{\partial V}{\partial \lambda_l} \end{cases}$$

Il vient ensuite

$$(9) \quad 0 = \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial F}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dt}$$

ou

$$(9') \quad 0 = \sum_{i,h,k=1}^n x^{hi} \frac{dx_{ki}}{dt} \alpha_k \frac{\partial V}{\partial \alpha_h} + \sum_{j,l,m=1}^p X^{lj} \frac{dX_{mj}}{dt} \lambda_m \frac{\partial V}{\partial \lambda_l}$$

En désignant par r_{ik} et R_{jl} les rotations associées aux x_{ik} et X_{jl} , on a

$$\sum_{i=1}^n x^{hi} \frac{dx_{ki}}{dt} = r_{kh},$$

$$\sum_{j=1}^p X^{lj} \frac{dX_{mj}}{dt} = R_{ml},$$

et (9') donne, pour déterminer V , l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(10) \quad \sum_{i,k=1}^n r_{ik} \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \sum_{j,l=1}^p R_{jl} \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_l} = 0.$$

V est indépendante de t . Elle ne peut être identiquement nulle, ou même constante, car, d'après (8), F serait indépendante des x_i et X_j .

L'équation (10) est donc une relation linéaire à coefficients constants entre les $n^2 + p^2$ rotations de (S) et (S') , et contient, en outre, les $n + p$ paramètres arbitraires α_i et λ_j .

L'équation (10), dérivée μ fois par rapport à t , donne

$$\sum_{i,k=1}^n \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} \frac{d^\mu r_{ik}}{dt^\mu} + \sum_{j,l=1}^p \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_l} \frac{d^\mu R_{jl}}{dt^\mu} = 0,$$

donc les déterminants d'ordre $n + p$ du tableau à $n + p$ colonnes

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d^\mu r_{i1}}{dt^\mu} \cdots \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d^\mu r_{in}}{dt^\mu} \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{d^\mu R_{j1}}{dt^\mu} \cdots \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{d^\mu R_{jp}}{dt^\mu} \right\|_{\mu=0,1,2,\dots}$$

doivent être tous nuls; en particulier, doit s'annuler le coefficient du monôme $\alpha_i^n \lambda_j^p$ dans le premier de ces déterminants, savoir

$$\begin{vmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{in} & R_{j1} & \dots & R_{jp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^\mu r_{i1}}{dt^\mu} & \dots & \dots & \frac{d^\mu r_{in}}{dt^\mu} & \frac{d^\mu R_{j1}}{dt^\mu} & \dots & \frac{d^\mu R_{jp}}{dt^\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n+p-1} r_{i1}}{dt^\mu} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{d^{n+p-1} R_{jp}}{dt^\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Les $n + p$ rotations de la première ligne sont donc les intégrales d'une même équation différentielle linéaire d'ordre $n + p - 1$, et sont par suite liées entre elles par une relation linéaire, à coefficients constants, de la forme

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n M_{ik}^j r_{ik}(t) + \sum_{l=1}^p N_i^{jl} R_{jl}(t) = 0.$$

Les np couples de valeurs des 2 indices i et j fournissent ainsi np relations linéaires entre les rotations de (S) et (S') .

Faisons maintenant l'hypothèse, que nous conserverons jusqu'à la fin, que ces deux systèmes d'équations différentielles sont à rotations linéairement distinctes. Donnons à i les valeurs $1, 2, \dots, n$, j restant fixe; p peut être supposé $\leq n$; les n relations (11) correspondantes sont linéaires par rapport aux p rotations $R_{j1}, R_{j2}, \dots, R_{jp}$, et contiennent chaque rotation r_{ik} une seule fois au plus; elles ne seraient donc compatibles, dans le cas où p serait inférieur à n , que si les r_{ik} n'étaient pas linéairement distincts.

Il faut donc nécessairement que $p = n$, et que les n relations relatives à un indice j quelconque se résolvent par rapport aux rotations $R_{jl} (l = 1, 2, \dots, n)$. On obtient ainsi n^2 relations linéaires à coefficients constants

$$(12) \quad R_{jl} = \sum_{i,k=1}^n \theta_{ik}^{jl} r_{ik}, \quad (j, l = 1, 2, \dots, n).$$

Ces relations (12) peuvent d'ailleurs se résoudre par rapport aux r_{ik} , par réciprocity des rôles de (S) et (S') .

En résumé, deux systèmes (S) et (S') à rotations linéairement distinctes et adjoints, sont nécessairement du même ordre, et les rotations de l'un sont fonctions linéaires des rotations de l'autre.

8. Ceci établi, portons les expressions (12) des R_{jl} dans l'équation (10); il vient

$$\sum_{i,k=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \sum_{j,l=1}^n \theta_{ik}^{jl} \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_l} \right) r_{ik} = 0.$$

Les parenthèses étant indépendantes de t , et les r_{ik} étant linéairement distincts, on obtient enfin, pour déterminer V , n^2 équations linéaires aux dérivées partielles, de la forme

$$(F) \quad F_{ik} V \equiv \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \sum_{j,l=1}^n \theta_{ik}^{jl} \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_l} = 0.$$

Remarque. Les rotations de chacun des systèmes (S) et (S') étant définies à une transformation du groupe (Σ) près, il en est de même des coefficients θ_{ik}^{jl} , cette transformation pouvant avoir effet sur les indices inférieurs, ou sur les indices supérieurs. On aura, par exemple,

$$\theta_{ik}^{jl} = \sum_{r,s=1}^n c_{jr} c^{ls} \theta_{ik}^{rs}.$$

Il en résulte que l'on peut donner aux coefficients de l'une des équations $F_{ik} V = 0$ des valeurs arbitraires, restriction faite des n invariants de ces n^2 coefficients. Par exemple, on peut annuler tous les θ_{11}^{jl} à indices supérieurs distincts; les valeurs nouvelles t_j des θ_{11}^{jj} sont alors définies sans ambiguïté par les n équations

$$\begin{aligned} \sum_j t_j &= \sum_j \theta_{11}^{jj} \\ \sum_j t_j^2 &= \sum_{j_1, j_2} \theta_{11}^{j_1 j_2} \theta_{11}^{j_2 j_1} \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_j t_j^n &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \theta_{11}^{j_1 j_2} \theta_{11}^{j_2 j_3} \dots \theta_{11}^{j_n j_1} \end{aligned}$$

9. **Etude du système (F).** Le système (F) comprend n^2 équations. La parenthèse de deux d'entre elles

$$F_{ik} V \equiv \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \sum_{j,f=1}^n \theta_{ik}^{jf} \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_f} = 0,$$

$$F_{hl} V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_l} + \sum_{j,f=1}^n \theta_{hl}^{jf} \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_f} = 0,$$

est

$$(F_{ik}, F_{hl}) V = \varepsilon_{kh} \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_l} - \varepsilon_{il} \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \sum_{j,f=1}^n \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_f} \left(\sum_m \theta_{ik}^{jm} \theta_{hl}^{mf} - \theta_{hl}^{jm} \theta_{ik}^{mf} \right) = 0,$$

d'où l'on déduit, par les combinaisons

$$(F_{ik}, F_{hl}) V - \varepsilon_{kh} F_{il} V + \varepsilon_{il} F_{hk} V,$$

les conditions d'intégrabilité

$$(13) \quad \sum_{j,f=1}^n \left[\sum_m \left(\theta_{ik}^{jm} \theta_{hl}^{mf} - \theta_{hl}^{jm} \theta_{ik}^{mf} \right) - \varepsilon_{kh} \theta_{il}^{jf} + \varepsilon_{il} \theta_{hk}^{jf} \right] \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_f} = 0.$$

Le premier membre de (13) ne fait intervenir que les variables λ_j . Nous sommes donc conduits à nous demander si V peut vérifier effectivement des équations de cette nature, ou, ce qui revient au même, des équations de même forme par rapport aux α_i .

Tout d'abord, V ne peut satisfaire à une équation de la forme $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0$, car les parenthèses

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i}, F_{ik} \right) V \equiv \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

exprimeraient que V est indépendant des α_k , et, par suite, que F ne contient que les X_j , ce qui est impossible puisque le système (S') est à rotations linéairement distinctes.

Supposons que V vérifie une équation de la forme

$$A V \equiv \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \sum_{i=2}^n A_i(\alpha) \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0,$$

les $A_i(\alpha)$ étant des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Il vient alors

$$(A, F_{1k}) V \equiv \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} - \alpha_1 \sum_{i=2}^n \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0;$$

d'autre part pour $h \geq 2$, on a

$$(A, F_{hk}) V \equiv A_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} - \alpha_h \sum_{i=2}^n \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0;$$

la combinaison de ces deux équations donne donc

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} (\alpha_1 A_h - \alpha_h) = 0,$$

ce qui exige, d'après la remarque précédente,

$$A_h = \frac{\alpha_h}{\alpha_1}.$$

En résumé, la seule équation possible est

$$A V \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0,$$

qui exprime que V est homogène et de degré zéro par rapport aux α_i . De même, la seule équation en λ_j et $\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}$ que puisse vérifier V est

$$L V \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_j} = 0.$$

Remarquons que le système (F) est invariant par les 2 transformations infinitésimales $A V$ et $L V$; on vérifie immédiatement que les parenthèses (A, F_{ik}) et (L, F_{ik}) sont identiquement nulles. Ceci était d'ailleurs à prévoir, car il est clair que si $V(\alpha_1 \dots \alpha_n; \lambda_1, \dots \lambda_n)$ est une intégrale de (F) , il en est de même de $V(c \alpha_1, \dots c \alpha_n; \lambda_1, \dots \lambda_n)$, qui s'en déduit en multipliant les intégrales x_i de (S) par la constante arbitraire c .

Nous séparerons la résolution du système (F) en deux parties, suivant que l'intégrale cherchée V vérifie, simultanément ou non, les deux équations $A V = 0$, $L V = 0$.

10. **Intégrales qui ne vérifient pas l'équation $L V = 0$.** Lorsque V ne vérifie pas simultanément les 2 équations $A V = 0$, $L V = 0$, on peut évidemment

supposer $LV \neq 0$. Dans ces conditions, les premiers membres des équations (13) doivent être identiquement nuls, et les n^4 constantes θ_{ik}^{jf} satisfont les $\frac{n^4(n^2-1)}{2}$ équations algébriques

$$(I) \quad \sum_{m=1}^n (\theta_{ik}^{jm} \theta_{hl}^{mf} - \theta_{hl}^{jm} \theta_{ik}^{mf}) + \varepsilon_{il} \theta_{hk}^{jf} - \varepsilon_{hk} \theta_{il}^{jf} = 0,$$

et les opérateurs F'_{ik} sont les transformations infinitésimales d'un groupe, dont la structure est définie par les équations

$$(14) \quad (F'_{ik}, F'_{hl}) = \varepsilon_{kh} F'_{il} - \varepsilon_{il} F'_{hk}.$$

Cette structure est identique à celle du groupe linéaire (Σ) ; ces 2 groupes sont d'ailleurs semblables au groupe linéaire et homogène à n variables

$$Y_{ik} f' = \alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}.$$

Les équations (I) sont évidemment invariantes lorsqu'on effectue sur les θ_{ik}^{jf} une transformation du groupe (Σ) , puisque cela résulte de la transformation analogue effectuée sur les rotations de l'un des systèmes (S) et (S') . La vérification directe est immédiate.

Ces remarques faites, il résulte de (14) que les équations $F'_{ik} V = 0$ se déduisent toutes, par formation de parenthèses, des $2n-1$ équations particulières dont les premiers membres sont

$$F'_{11}, F'_{12}, \dots, F'_{1n}, F'_{21}, F'_{31}, \dots, F'_{n1},$$

et l'on a

$$(15) \quad \begin{cases} F_{hk} \equiv (F_{h1}, F_{1k}), & \text{si } h \neq k, \\ F_{hh} \equiv F'_{11} + (F_{h1}, F_{1h}). \end{cases}$$

Les équations (I) correspondantes, qui ont les indices $i=l=1$, déterminent les θ_{hk}^{jf} ($h, k \geq 2$) en fonction des coefficients des $2n-1$ équations principales $F'_{ik} V = 0$ (i ou $k=1$); elles s'écrivent

$$(A) \quad \theta_{hk}^{jf} = \varepsilon_{hk} \theta_{11}^{jf} + \sum_{m=1}^n (\theta_{h1}^{jm} \theta_{1k}^{mf} - \theta_{1k}^{jm} \theta_{h1}^{mf}).$$

En outre, les coefficients des équations principales sont eux-mêmes liés entre eux par les équations (I) d'indices $i=l=1$, h ou $k=1$, savoir

$$(B) \quad \begin{cases} \theta_{1k}^{jf} = \sum_m (\theta_{11}^{jm} \theta_{1k}^{mf} - \theta_{11}^{mf} \theta_{1k}^{jm}), & k \neq 1, \\ \theta_{h1}^{jf} = \sum_m (\theta_{h1}^{jm} \theta_{11}^{mf} - \theta_{h1}^{mf} \theta_{11}^{jm}), & h \neq 1. \end{cases}$$

Ceci posé, simplifions toutes ces équations en utilisant la remarque du § 8. Soient $\theta_{11}^{jf} = 0$ pour $j \neq f$, et posons $\theta_{11}^{jj} = t_j$. Les équations (B) deviennent

$$(B') \quad \begin{cases} \theta_{1k}^{jf} (1 - t_j + t_f) = 0, & k > 1, \\ \theta_{h1}^{jf} (1 + t_j - t_f) = 0, & h > 1; \end{cases}$$

enfin, les équations (I) d'indices $i = k = 1$, $h, l > 1$ s'écrivent

$$(C') \quad \theta_{hl}^{jf} (t_j - t_f) = 0, \quad h, l > 1.$$

Je dis que si $t_j \neq t_f$, on ne peut avoir $|t_j - t_f| \neq 1$. Supposons, par exemple, $0 < |t_j - t_f| \neq 1$; (B') et (C') entraînent $\theta_{1k}^{jf} = \theta_{h1}^{jf} = \theta_{hk}^{jf} = 0$ ($h, k \geq 2$) et l'on a, par hypothèse, $\theta_{11}^{jf} = 0$; donc $R_{jf} = 0$, ce qui est impossible.

Il résulte de cette remarque que les t_j ne peuvent avoir que deux valeurs différentes, et se partagent en deux groupes au plus. On peut évidemment les supposer écrits dans l'ordre

$$t_1 = t_2 = \dots = t_q < t_{q+1} = t_{q+2} = \dots = t_n, \quad 0 \leq q \leq n,$$

avec $t_{q+1} - t_q = 1$.

Pour déterminer q , remarquons que, d'après (B') et (C'), les rotations R_{jf} , dont les 2 indices ($j < f$) ne sont pas du même groupe, sont les seules qui peuvent s'exprimer à l'aide des r_{h1} ($h > 1$), et ne peuvent s'exprimer, d'autre part¹, à l'aide des r_{1k} , r_{hk} ($h, k > 1$), et r_{11} . Pour que ces R_{jf} soient linéairement distinctes, ainsi que les r_{h1} , il faut donc qu'elles soient en nombre égal, ce qui donne

$$q(n-q) = n-1,$$

ou

$$(q-1)(n-q-1) = 0.$$

Nous voyons donc que les deux seuls groupements possibles sont

$$1^o) \quad t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = t_n - 1$$

$$2^o) \quad t_1 + 1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n.$$

¹ Pour les r_{hk} , cela résulte des équations (A), compte tenu des (B') et (C').

11. **Discussion du groupement** $t_1=t_2=\dots=t_{n-1}=t_n-1$. On peut évidemment supposer $n > 2$, les deux groupements étant identiques pour $n-2$. Les équations (B') donnent

$$F_{h1}V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_n} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{h1}^{jn} \lambda_j = 0, \quad (h=2, 3, \dots, n);$$

ces équations sont au moins au nombre de 2, et entraînent $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0$, ce qui est impossible.

Ce premier groupement ne conduit donc à aucune solution.

12. **Discussion du groupement** $t_1+1=t_2=\dots=t_n$. D'après les équations (B'), les seuls coefficients non nuls des équations principales sont θ_{h1}^{jf} et $\theta_{1k}^{j1}(h, k, j, f \geq 2)$. Par contre, les équations (C') montrent que les $\theta_{hk}^{1f}, \theta_{hk}^{j1}(h, k, j, f \geq 2)$ sont tous nuls; les valeurs des autres coefficients des équations $F_{hk}(h, k \geq 2)$ sont données par les équations (A)

$$(16) \quad \begin{cases} \theta_{hk}^{11} = \varepsilon_{hk} t_1 + \sum_{m=2}^n \theta_{h1}^{1m} \theta_{1k}^{m1} \\ \theta_{hk}^{jj} = \varepsilon_{hk} t_2 - \theta_{1k}^{j1} \theta_{h1}^{1j}, & j \geq 2, \\ \theta_{hk}^{jf} = -\theta_{1k}^{j1} \theta_{h1}^{1f}, & j, f \geq 2, j \neq f. \end{cases}$$

Or les équations (I) dont les indices sont $i=f=1; h, j, k=l \geq 2$, s'écrivent

$$\theta_{1k}^{j1} \theta_{hk}^{11} - \sum_{m=2}^n \theta_{hk}^{jm} \theta_{1k}^{m1} - \varepsilon_{hk} \theta_{1k}^{j1} = 0,$$

ce qui devient, compte tenu de (16),

$$\theta_{1k}^{j1} (\theta_{hk}^{11} - \varepsilon_{hk} t_2) = 0;$$

les θ_{1k}^{j1} ne pouvant être tous nuls quel que soit j , sans quoi $F_{1k}V = 0$ entraînerait $\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0$, il vient enfin

$$(17) \quad \theta_{hk}^{11} = \varepsilon_{hk} t_2.$$

Ceci posé, on peut vérifier que toutes les équations (I) sont identiquement satisfaites. Considérons alors les $2n-1$ équations principales, jointes à l'équation

$F'_{22} V = 0$. Le déterminant des coefficients de ces $2n$ équations doit être nul, et

s'écrit, en posant $L'_{hk} = \sum_{j=1}^n \theta_{hk}^{jf} \lambda_j$,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & t_1 \lambda_1 & t_2 \lambda_2 & \dots & t_n \lambda_n \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & L'_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & L'_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \theta_{21}^{12} \lambda_1 & \dots & \theta_{21}^{1n} \lambda_1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \theta_{n1}^{12} \lambda_1 & \dots & \theta_{n1}^{1n} \lambda_1 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & t_2 \lambda_1 & L'_{22} & \dots & L'_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de α_1^n est $t_2 \lambda_1^n \frac{D(R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n})}{D(r_{21}, r_{31}, \dots, r_{n1})}$, et doit être nul. Or les $R_{1k} (k \geq 2)$ ne dépendent que des $r_{h1} (h \geq 2)$, et leur déterminant fonctionnel ne peut être nul sans quoi ils ne seraient pas linéairement distincts. La conclusion nécessaire est donc $t_2 = 0$, et, par suite,

$$t_1 = -1, \quad t_2 = t_3 = \dots = t_n = 0.$$

Ceci établi, les équations (16) donnent

$$L'_{hk} = -\theta_{h1}^{1f} \sum_{j=2}^n \theta_{1k}^{jf} \lambda_j = -\theta_{h1}^{1f} L'_{1k},$$

et l'on vérifie aisément que les équations du système (F) se réduisent à $2n-1$ équations linéairement distinctes, formant un système complet, savoir les équations principales

$$(18) \quad \begin{cases} F'_{11} V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0, \\ F'_{1k} V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + L'_{1k} \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0, & k \geq 2, \\ F'_{h1} V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} + \lambda_1 \sum_{f=2}^n \theta_{h1}^{1f} \frac{\partial V}{\partial \lambda_f} = 0, & h \geq 2. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, effectuons sur les variables λ_i la substitution

$$\lambda_1^1 = \lambda_1, \quad \lambda_k^1 = -L_{1k}^1 - \sum_{j=2}^n \theta_{1k}^{j1} \lambda_j, \quad k \geq 2;$$

ce changement de variables est légitime, puisque le déterminant des θ_{1k}^{j1} n'est pas nul. La première équation (18) n'est pas modifiée; les autres deviennent

$$F_{1k} V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} - \lambda_k^1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$F_{h1} V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \sum_{k, m=2}^n \theta_{h1}^{km} \theta_{1k}^{m1} \frac{\partial V}{\partial \lambda_k^1} = 0;$$

et comme, d'après (16) et (17), on a

$$\sum_{m=2}^n \theta_{h1}^{km} \theta_{1k}^{m1} = \varepsilon_{hk},$$

on est enfin ramené au système

$$(19) \quad \begin{cases} F_{11} V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0, \\ F_{1k} V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} - \lambda_k^1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0, & k \geq 2, \\ F_{h1} V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_h^1} = 0, & h \geq 2. \end{cases}$$

Son intégrale générale est fonction de

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n.$$

Telle est la première solution obtenue pour V , que l'on peut écrire, à une substitution linéaire près des α_i ou des λ_i ,

$$V = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n.$$

Nous vérifierons plus loin quelle correspond aux systèmes adjoints, au sens classique du mot.

13. **Intégrales de (L') qui vérifient l'équation $LV=0$.** Les équations (13) sont ou identiquement vérifiées, ou équivalentes à $LV=0$, et les équations (I) sont remplacées par les équations plus générales

$$(II) \quad \sum_{m=1}^n (\theta_{ik}^{jm} \theta_{hl}^{mf} - \theta_{hl}^{jm} \theta_{ik}^{mf}) - \varepsilon_{kh} \theta_{il}^{jf} + \varepsilon_{il} \theta_{hk}^{jf} - \varepsilon_{jf} M_{ik,hl},$$

les $M_{ik,hl}$ étant des constantes symétriques gauches par rapport aux 2 couples d'indices ik et hl .

Plaçons nous encore dans les conditions $\theta_{11}^{jf}=0$ si $j \neq f$, et posons $\theta_{11}^{jj}=t_j$. Les équations (II) d'indices $i=l=1$, h ou $k=1$, s'écrivent

$$\begin{cases} \theta_{1k}^{jf}(1-t_j+t_f) = \varepsilon_{jf} M_{1k,11}, & k \geq 2, \\ \theta_{h1}^{jf}(1+t_j-t_f) = \varepsilon_{jf} M_{11,h1}, & h \geq 2; \end{cases}$$

celles d'indices $i=k=1$, $h, l \geq 2$ s'écrivent

$$\theta_{hl}^{jf}(t_j-t_f) = \varepsilon_{jf} M_{11,hl},$$

et comme le cas $j=f$ exige que $M_{11,hl}=0$, ces dernières équations sont identiques aux équations

$$(C') \quad \theta_{hl}^{jj}(t_j-t_f) = 0.$$

Pour $j \neq f$, les équations (B'') ne diffèrent pas des (B'), de sorte que le raisonnement du § 10, d'après lequel les t_j se partagent en deux groupes au plus

$$t_1 = t_2 = \dots = t_q < t_{q+1} = t_{q+2} = \dots = t_n,$$

avec $t_{q+1}-t_q=1$, est encore valable. On voit même que $1 \leq q \leq n-1$, car si tous les t_j étaient égaux, il résulterait de (B'') que

$$\begin{aligned} F_{1k} V &\equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + M_{1k,11} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial V}{\partial \lambda_j} \\ &\equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + M_{1k,11} LV = 0, \end{aligned}$$

et, par suite, $\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0$, ce qui est impossible.

Ceci établi, les équations (B'') montrent que les $R_{j f}$ tels que $t_j = t_f + 1$ ne peuvent s'exprimer qu'à l'aide des $r_{1k} (k \geq 2)$, et ne peuvent donc être linéairement distincts que si

$$q(n-q) \leq n-1,$$

ou

$$(q-1)(n-q-1) \leq 0;$$

la condition $1 \leq q \leq n-1$ exige donc $q=1$ ou $q=n-1$.

Nous retrouvons ainsi les deux cas discutés plus haut. Remarquons encore que ce dernier raisonnement aurait pu s'appliquer dans les conditions du § 10.

14. **Discussion du groupement** $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = t_n - 1 (n > 2)$. On déduit de (B'') et (C')

$$F_{h1} V \equiv \alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_n} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{h1}^{jn} \lambda_j + M_{11,h1} L V = 0$$

et, par suite,

$$\alpha_h \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_n} \sum_{j=1}^n \theta_{h1}^{jn} \lambda_j = 0;$$

on arrive donc à la même conclusion qu'au § 11.

15. **Discussion du groupement** $t_1 + 1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n$. Les équations (B'') et (C') permettent de remplacer les équations principales du système (F') par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{11} V - t_2 L V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} = 0, \\ F_{1k} V - M_{1k,11} L V \equiv \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} \sum_{j=2}^n \theta_{1k}^{j1} \lambda_j = 0, \quad k \geq 2, \\ F_{h1} V - M_{11,h1} L V \equiv \alpha_n \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 \sum_{j=2}^n \theta_{h1}^{j1} \frac{\partial V}{\partial \lambda_j} = 0, \quad h \geq 2, \end{array} \right.$$

et le déterminant des coefficients de ces $2n-1$ équations, jointes à $L V = 0$,

doit être identiquement nul. En posant encore $L_{1k} = \sum_{j=2}^n \theta_{1k}^{j1} \lambda_j$, il vient donc

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \dots 0 & -\lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \alpha_1 \dots 0 & L_{12}^1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots \alpha_1 & L_{1n}^1 & 0 \dots 0 \\ \alpha_2 & 0 \dots 0 & \theta_{21}^{11} \lambda_1 & \theta_{21}^{12} \lambda_1 \dots \theta_{21}^{1n} \lambda_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & 0 \dots 0 & \theta_{n1}^{11} \lambda_1 & \theta_{n1}^{12} \lambda_1 \dots \theta_{n1}^{1n} \lambda_1 \\ 0 & 0 \dots 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \dots \lambda_n \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient de $\alpha_1^n \lambda_1^n$ doit être nul, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \theta_{21}^{12} & \theta_{21}^{13} \dots \theta_{21}^{1n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \theta_{n1}^{12} & \theta_{n1}^{13} \dots \theta_{n1}^{1n} \end{vmatrix} = 0$$

et comme, d'après (B'') et (C'), on a

$$R_{1j} = \sum_{h=2}^n \theta_{h1}^{1j} r_{h1}, \quad j \geq 2,$$

la conséquence précédente exigerait que les R_{1j} ne fussent pas linéairement distincts, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

16. En résumé, dans les conditions de généralité admises pour (S) et (S'), le système (F) n'admet d'intégrale que dans les conditions du § 12. Cette intégrale, forme bilinéaire des α_i et λ_i , peut être mise sous la forme

$$(20) \quad V \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i,$$

grâce à un choix convenable des systèmes fondamentaux d'intégrales x_{hi} et X_{hi} . Pour former la fonction correspondante F , exprimons les α_i et λ_i au second membre de (20) en fonction des x_i et X_j . On tire de (5)

$$\alpha_h = \sum_{i=1}^n x^{hi} x_i,$$

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^n X^{hj} X_j,$$

et, par suite

$$(21) \quad V \equiv \sum_{h, i, j=1}^n x^{hi} X^{hj} x_i X_j = F(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_n; t).$$

Or le système (F) exprime, par sa formation même¹, que le dernier membre de (21) ne contient pas la variable t indépendamment des x_i et X_j . C'est donc la fonction F cherchée. On peut d'ailleurs vérifier directement que les coefficients $\sum_h x^{hi} X_{hj}$ au second membre de (21) sont des constantes. Nous voyons ainsi que la fonction F est nécessairement bilinéaire, et que les deux systèmes (S) et (S') sont adjoints au sens habituel du mot.

Les relations entre les coefficients de deux systèmes adjoints pouvant affecter la forme particulièrement simple

$$A_{ik} = -a_{ki},$$

sont donc, dans leur forme la plus générale,

$$(22) \quad A_{ik} = - \sum_{j, h=1}^n c_{ij} c^{kh} a_{hj}.$$

On obtient aisément des relations analogues entre les rotations des 2 systèmes. Lorsque le système (F') est ramené à la forme (19), les θ_{ik}^j sont nuls, excepté les

$$\theta_{11}^{11} = \theta_{1k}^{k1} = \theta_{k1}^{1k} = -1, \quad k \geq 2,$$

et, d'après (16),

$$\theta_{jj}^{jj} = -1, \quad j, f \geq 2.$$

Les équations (12) relatives à la forme particulière (20) de V sont donc

$$(23) \quad R_{ik} = -r_{ki},$$

et leur forme générale, qui s'en déduit par une substitution générale du groupe (Σ), est

$$(24) \quad R_{ik} = - \sum_{j, h=1}^n c_{ij} c^{kh} r_{hj},$$

de même forme que (22).

¹ Cf. l'équation (9).