DIE WINOGRADOWSCHE METHODE ZUM BEWEISE DES WARING-HILBERT-KAMKESCHEN SATZES.

Von

EDMUND LANDAU

in Göttingen.

G. Mittag-Leffler zu seinem 80. Geburtstage gewidmet.

Einleitung.

Wenn auch diese Abhandlung nicht in unmittelbarer Beziehung zum Lebenswerk des grossen Analytikers steht, so ist doch ihr Erscheinen in dem Festbande nicht ganz unangebracht; denn sie zeigt die Kraft der Analysis zur Bezwingung zahlentheoretischer Probleme.

Im Bd. XXXI (1924, S. 490—507) des Recueil mathématique de la société mathématique de Moscou steht eine Arbeit von Herrn Winogradow mit dem Titel *Sur un théorème général de Waring.* Sie enthält manche Fehlschlüsse (schon sein lemme I ist weder von ihm bewiesen noch richtig);[1] seine Formulierung des Endergebnisses (sein théorème I und sein aus diesem auf wenigen Zeilen — übrigens falsch[2] — hergeleitetes théorème II) enthält nicht einmal den Hilbertschen Satz;[3] Verf. macht manchen Umweg, den der geübte Leser abkürzen kann. Aber — seine Methode, gehörig gereinigt und abgekürzt, führt tatsächlich auf neuem und recht kurzem Wege zum alten Ziel und auch zu einem neuen Resultate[4], das ich hinzufüge.

[1] Vergl. Anm. 7.

[2] Vergl. Anm. 19.

[3] Verf. vergisst, $x \geqq 0$ zu sagen, was z. B. für $n=3$ wesentlich ist. Aber in der vorangegangenen Beweisführung war wirklich $x \geqq 0$.

[4] Hauptsatz II.

Ich setze dies im folgenden auseinander; der Leser braucht Herrn Winogradows Arbeit nicht zu Rate zu ziehen; nur in den Fussnoten begründe ich die oben erhobenen und weitere Einwände, ohne hier Vollständigkeit anzustreben. Seine Abhandlung ist nämlich offenbar vor genauer Durcharbeitung gedruckt worden.

Und doch wird die folgende Reinschrift zeigen, wie viel die Wissenschaft Herrn Winogradow zu verdanken hat.

Bei dem Umfang der vorhandenen Literatur erscheint es mir nützlich, gar nichts daraus als bekannt anzunehmen. Auch führe ich alle Zwischenrechnungen aus; auf die Gefahr hin, dass die Kürze der Beweisführung dadurch weniger ans Licht tritt.

n ist dauernd eine fest gegebene ganze Zahl $\geqq 2$.

In § 1 reproduziere ich eine Reihe bekannter Hilfssätze mit Beweisen.

In § 2 beweise ich den WARING-HILBERTschen Satz; der Kern des Ganzen tritt nämlich deutlicher hervor, wenn ich alles erst bei y^n statt bei $b_0 y^n + \cdots + b_n$ auseinandersetze.

Dieser (von Waring vermutete und zuerst von Herrn Hilbert bewiesene) Satz lautet:

Es gibt ein ganzes $s(n) > 0$, so dass jede ganze Zahl $N \geqq 0$ in der Form

$$N = \sum_{\lambda=1}^{s} y_\lambda^n, \quad y_\lambda = y_\lambda(n, N) \geqq 0 \text{ und ganz}, \tag{1}$$

darstellbar ist.

In § 3 füge ich folgendes neue Resultat hinzu:

$g(n)$ sei das kleinste $s(n)$ mit obiger Eigenschaft. Dann ist

$$g(n) = O(n\, 2^n), \tag{2}$$

sogar

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{g(n)}{n\, 2^n} \leqq \frac{1}{2}.$$

Also insbesondere:

Es gibt eine absolute Konstante c, so dass für jedes ganze $n > c$ und jedes ganze $N \geqq 0$ die Gleichung

$$N = \sum_{\lambda=1}^{n\, 2^n} y_\lambda^n, \quad y_\lambda = y_\lambda(n, N) \geqq 0 \text{ und ganz},$$

lösbar ist.

Bekannt war in ähnlicher Richtung nur durch die Herren HARDY und LITTLEWOOD (aber erst durch ihre tiefen Untersuchungen über die sog. singular series und die sog. »almost all»-Anzahl in *Some problems of 'Partitio numerorum'* IV und VI, Mathematische Zeitschrift, Bd. XII, 1922, S. 161—188, Bd. XXIII, 1925, S. 1—37):

$G(n)$ sei das kleinste $s(n)$, so dass (1) für alle grossen N, d. h. für $N \geqq N_0(n, s)$, lösbar ist. Dann ist

$$G(n) = O(n\, 2^n), \tag{3}$$

sogar

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{G(n)}{n\, 2^n} \leqq \frac{1}{4}. \tag{4}$$

(P. N. IV ohne P. N. VI hatte auch schon (3), aber statt (4) nur

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{G(n)}{n\, 2^n} \leqq \frac{1}{2} \tag{5}$$

ergeben.)

Für (3) und (5) (aber nicht (4)) gebe ich also wegen

$$G(n) \leqq g(n)$$

einen neuen Beweis. Natürlich hätte auch jede der älteren Methoden für die Grössenordnung von $g(n)$ irgend eine Abschätzung ergeben; aber eine so gute wie (2) war bisher nicht bekannt.

In § 4 beweise ich:[5]

$$\Phi(y) = b_0 y^n + \cdots + b_n$$

sei ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, $b_0 > 0$, alle $|b_\nu| \leqq b$. Der grösste gemeinsame Teiler aller Werte von $\Phi(y)$ für ganzes y sei 1. Dann gibt es zwei nur von n, b_0 und b abhängige Zahlen N_0 und D, so dass jedes ganze $N \geqq N_0$ in der Form

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_0} \Phi(y_\lambda),\quad y_\lambda = y_\lambda(\Phi, N) \geqq 0 \text{ und ganz},\quad 1 \leqq M_0 = M_0(\Phi, N) \leqq D$$

darstellbar ist; also jedes ganze $N \geqq 0$ in der Form

[5] Das ist Herrn Winogradows théorème I unter Verzicht auf explizite Ausrechnung von N_0 und D; ein Spezialfall des Kamkeschen Satzes.

(6) $\quad N = \sum_{\lambda=1}^{s} z_\lambda, \quad z_\lambda = 0$ *oder* $= 1$ *oder* $= \Phi(y_\lambda), \; y_\lambda = y_\lambda(\Phi, N) \geqq 0$ *und ganz,*

wo auch s nur von n, b_0 und b abhängt.

In § 5 beweise ich den vollen WARING-KAMKEschen Satz:

$$\Phi(y) = b_0 y^n + \cdots + b_n, \quad b_0 > 0,$$

sei für jedes ganze y eine ganze Zahl; dann ist bei passendem, nur von Φ abhängigem s jedes ganze $N \geqq 0$ von der Form (6).

Eine Abschätzung der Lösungszahl, ähnlich der Hardy-Littlewoodschen (bei y^n) und meiner (bei $\Phi(y)$; *Zum Waringschen Problem*, Mathematische Zeitschrift, Bd. XII, 1922, S. 219—247) kommt bei der Winogradowschen Methode nicht heraus. Aber der Nachweis des Waring-Hilbertschen und des Waring-Kamkeschen Satzes ist nunmehr weit kürzer als zuvor. Denn es tritt weder die Pointe der Hilbertschen Methode auf, nämlich die Hilbertsche Identität, die von n auf $2n$ zu schliessen gestattet (am einfachsten durch Herrn HAUSDORFF bewiesen), und der schwierige Übergang zu den n, die nicht Potenzen von 2 sind (am einfachsten bei Herrn STRIDSBERG); noch die Pointe der Hardy-Littlewoodschen Methode, nämlich die komplexe Integration, die Hauptglieder bei den major arcs und die ihnen entstammende, so bösartige singular series.

§ 1.

Bekannte Hilfssätze.

Satz 1: *Es seien α und β ganz, $\alpha < \beta$. Für $\alpha \leqq y \leqq \beta$ sei*

$$F(y) \textit{ komplex}, \quad F'(y) \textit{ stetig}.$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta} F(\nu) = \frac{1}{2} F(\alpha) + \frac{1}{2} F(\beta) + \int_\alpha^\beta F(y)\, dy - \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \int_\alpha^\beta F'(y) \sin 2\pi h y \, dy.$$

Beweis: Nach DIRICHLET ist für $\alpha \leqq \nu < \beta$ (ν ganz)

$$\frac{F(\nu)+F(\nu+1)}{2}=\int_{\nu}^{\nu+1} F(y)\,dy+2\sum_{h=1}^{\infty}\int_{\nu}^{\nu+1} F(y)\cos 2\pi hy\,dy,$$

also durch Summation über ν

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta} F(\nu)-\frac{1}{2}F(\alpha)-\frac{1}{2}F(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} F(y)\,dy+2\sum_{h=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} F(y)\cos 2\pi hy\,dy$$

und hierin

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(y)\cos 2\pi hy\,dy=\left\{F(y)\frac{\sin 2\pi hy}{2\pi h}\right\}_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2\pi h}\int_{\alpha}^{\beta} F'(y)\sin 2\pi hy\,dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi h}\int_{\alpha}^{\beta} F'(y)\sin 2\pi hy\,dy.$$

Satz 2:[6] *Es sei* $\alpha<\beta$. *Für* $\alpha\leqq y\leqq\beta$ *sei*

$$f(y) \text{ reell},\ 0<\Theta\leqq f'(y)\leqq\frac{1}{2},\ f''(y)\geqq 0.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{\alpha\leqq\nu\leqq\beta} e^{2\pi i f(\nu)}\right|<\frac{2}{\Theta}.$$

(ν läuft durch die etwa vorhandenen ganzen Zahlen des Intervalls.)

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien α und β ganz. Denn entweder enthält das Intervall höchstens eine ganze Zahl; dann ist

$$\left|\sum_{\alpha\leqq\nu\leqq\beta} e^{2\pi i f(\nu)}\right|\leqq 1<\frac{2}{\Theta};$$

oder es gehören ihm wenigstens zwei ganze Zahlen an; dann ist

---

[6] Satz 2 und sein Beweis sind von Herrn VAN DER CORPUT (*Zahlentheoretische Abschätzungen,* Mathematische Annalen, Bd. LXXXIV, 1921, S. 53—79; S. 58—59). Herr Winogradow, der dessen Arbeit nicht kennt, hat bei seinem entsprechenden lemme III (S. 497) erstens die unnötige Voraussetzung $f''(y)\leqq 1$ und zweitens auf der rechten Seite der Behauptung ein Zusatzglied, das von der Intervalllänge abhängt! Es lohnt sich nicht, den Wortlaut des lemme III zu reproduzieren; der Leser kann es nach der Methode des Textes sofort in den angegebenen zwei Beziehungen verschärfen.

$$\sum_{\alpha\leqq\nu\leqq\beta}=\sum_{\nu=A}^{B},\quad \alpha\leqq A<B\leqq\beta,\ A \text{ und } B \text{ ganz.}$$

Nach Satz 1 mit

$$F(y)=e^{2\pi i f(y)}$$

ist

$$(7)\quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(\nu)}=\frac{1}{2}e^{2\pi i f(\alpha)}+\frac{1}{2}e^{2\pi i f(\beta)}+\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(y)}\,dy \\ \displaystyle\qquad\qquad -2i\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(y)}f'(y)\sin 2h\pi y\,dy.\end{cases}$$

Hierin ist

$$(8)\quad \left|\frac{1}{2}e^{2\pi i f(\alpha)}+\frac{1}{2}e^{2\pi i f(\beta)}\right|\leqq 1;$$

ferner nach dem zweiten Mittelwertsatz, da $f'(y)\geqq\Theta$ und monoton ist,

$$(9)\quad \left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(y)}\,dy\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{de^{2\pi i f(y)}}{f'(y)}\right|\leqq\frac{1}{2\pi}\frac{2\sqrt{2}}{\Theta}<\frac{1}{2\Theta};$$

endlich nach dem zweiten Mittelwertsatz, da $\Theta\leqq f'(y)\leqq\frac{1}{2}$ ist und $\dfrac{f'(y)}{f'(y)\pm h}$ monoton sind,

$$\left|2i\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(y)}f'(y)\sin 2\pi h y\,dy\right|$$

$$=\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i(f(y)+hy)}f'(y)\,dy-\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i(f(y)-hy)}f'(y)\,dy\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(y)}{f'(y)+h}\,de^{2\pi i(f(y)+hy)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(y)}{f'(y)-h}\,de^{2\pi i(f(y)-hy)}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}}{h+\frac{1}{2}}2\sqrt{2}+\frac{\frac{1}{2}}{h-\frac{1}{2}}2\sqrt{2}\right)<\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\frac{1}{2}}{h-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2h-1}\leqq\frac{1}{h},$$

also

$$(10)\qquad \left| -2i\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(y)} f'(y)\sin 2\pi h y\,dy \right| < \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2} < 2.$$

Aus (7), (8), (9), (10) folgt

$$\left|\sum_{v=\alpha}^{\beta} e^{2\pi i f(v)}\right| < 3 + \frac{1}{2\Theta} \leqq \frac{3}{2\Theta} + \frac{1}{2\Theta} = \frac{2}{\Theta}.$$

Satz 3: *Es sei $m > 0$ ganz; $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ reell,*

$$\psi(y) = \gamma y^m + \gamma_1 y^{m-1} + \cdots + \gamma_m,$$

$$N \text{ ganz}, \quad P > 0 \text{ ganz},$$

$$S = \sum_{v=N+1}^{N+P} e^{2\pi i \psi(v)}.$$

$\{\beta\}$ bedeute den Abstand der reellen Zahl β von der nächsten ganzen Zahl; Min. $\left(P, \frac{1}{0}\right)$ *bedeute P.*

Dann ist

$$|S|^{2^{m-1}} < 4^{2^{m-1}}\left(P^{2^{m-1}-1} + P^{2^{m-1}-m}\sum_{h_1,\ldots,h_{m-1}=1}^{P}\text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\gamma m!\, h_1 \ldots h_{m-1}\}}\right)\right),$$

wo im Falle $m = 1$ die Summe rechts das eine Glied Min. $\left(P, \frac{1}{\{\gamma\}}\right)$ *bedeutet.*

Vorbemerkung: Demnach ist für reelles λ und

$$\Phi(y) = b_0 y^n + \cdots + b_n, \quad b_v \text{ reell},$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \left|\sum\limits_{v=N+1}^{N+P} e^{2\pi i \lambda \Phi(v)}\right| \\ < 4\left(P^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} + P^{1-\frac{n}{2^{n-1}}}\sqrt[2^{n-1}]{\sum\limits_{h_1,\ldots,h_{n-1}=1}^{P}\text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\lambda n!\, b_0 h_1 \ldots h_{n-1}\}}\right)}\right). \end{cases}$$

Beweis (WEYLsche Methode): 1. Es sei $m=1$. Dann ist

$$|S| \leqq P$$

und, falls γ nicht ganz ist,

$$|S| = \left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi(\gamma\nu+\gamma_1)i}\right| = \left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi\gamma(\nu-N-1)i}\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{P-1} e^{2\pi\gamma\mu i}\right| = \left|\frac{1-e^{2\pi\gamma P i}}{1-e^{2\pi\gamma i}}\right|$$

$$\leqq \frac{2}{|1-e^{2\pi\gamma i}|} = \frac{1}{|\sin \pi\gamma|} \leqq \frac{1}{2\{\gamma\}},$$

jedenfalls also

$$|S| \leqq \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\gamma\}}\right) < 4^1\left(P^0 + P^0 \,\text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\gamma\}}\right)\right).$$

2. Es sei $m>1$ und die Behauptung für $m-1$ schon bewiesen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $N+1=0$, da man sonst nur

$$\psi(y+N+1) = \gamma y^m + \cdots$$

statt $\psi(y)$ zu betrachten hat.

Es ist

$$|S|^2 = \sum_{\nu=0}^{P-1} e^{2\pi i\psi(\nu)} \sum_{\mu=0}^{P-1} e^{-2\pi i\psi(\mu)} = \sum_{\nu,\mu=0}^{P-1} e^{2\pi i(\psi(\nu)-\psi(\mu))}$$

$$(12) \qquad = \sum_{\substack{0\leqq\mu\leqq P-1\\ 0\leqq\mu+h_1\leqq P-1}} e^{2\pi i(\psi(\mu+h_1)-\psi(\mu))} = \sum_{h_1=-(P-1)}^{P-1} \sum_{\mu=\text{Max.}(0,-h_1)}^{\text{Min.}(P-1,\,P-1-h_1)} e^{2\pi i(\psi(\mu+h_1)-\psi(\mu))} = \sum_{h_1=-(P-1)}^{P-1} S(h_1),$$

wo

$$S(h_1) = \sum_{\mu} e^{2\pi i\left(\gamma m h_1 \mu^{m-1} + \beta_1(h_1)\mu^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1}(h_1)\right)},$$

erstreckt über $P-|h_1| \leqq P$ konsekutive μ. Daher ist nach dem für $m-1$ als bewiesen Angenommenen

$$(13) \qquad \begin{cases} |S(h_1)|^{2^{m-2}} \\ \qquad < 4^{2^{m-2}}\left(P^{2^{m-2}-1} + P^{2^{m-2}-m+1} \sum_{h_2,\ldots,h_{m-1}=1}^{P} \text{Min.}\left(P, \dfrac{1}{\{\gamma m h_1 (m-1)!\, h_2 \ldots h_{m-1}\}}\right)\right) \end{cases}$$

$\left(\text{für } m=2 \text{ bedeutet die Summe rechts Min.} \left(P, \frac{1}{\{\gamma \cdot 2 h_1\}}\right)\right)$. Die rechte Seite von (13) ist eine gerade Funktion von h_1; trivialerweise ist

$$|S(0)| \leqq P;$$

daher ist nach (12) und (13)

$$|S|^{2^{m-1}} \leqq \left(\sum_{h_1=-(P-1)}^{P-1} |S(h_1)|\right)^{2^{m-2}} \leqq (2P-1)^{2^{m-2}-1} \sum_{h_1=-(P-1)}^{P-1} |S(h_1)|^{2^{m-2}}$$

$$< 2^{2^{m-2}-1} P^{2^{m-2}-1}$$

$$\cdot \left(P^{2^{m-2}} + 2 \cdot 4^{2^{m-2}} \left(P^{2^{m-2}} + P^{2^{m-2}-m+1} \sum_{h_1, \ldots, h_{m-1}=1}^{P} \text{Min.} \left(P, \frac{1}{\{\gamma m! \, h_1 \ldots h_{m-1}\}}\right)\right)\right)$$

$$< 2^{2^{m-2}-1} P^{2^{m-2}-1} (1 + 2 \cdot 4^{2^{m-2}}) (P^{2^{m-2}} + P^{2^{m-2}-m+1} \Sigma \, \text{Min.})$$

$$< 2^{2^{m-2}-1} \cdot 4 \cdot 4^{2^{m-2}} (P^{2^{m-1}-1} + P^{2^{m-1}-m} \Sigma \, \text{Min.}),$$

womit wegen

$$2^{2^{m-2}-1} \cdot 4 \cdot 4^{2^{m-2}} = 2^{2^{m-2}+1} 4^{2^{m-2}} \leqq 2^{2^{m-1}} 4^{2^{m-2}} = 4^{2^{m-2}} 4^{2^{m-2}} = 4^{2^{m-1}}$$

die Behauptung bewiesen ist.

Satz 4: *$\tau(a)$ sei die Anzahl der* (positiven ganzen) *Teiler der* (positiven ganzen) *Zahl a. Bei festem $\varepsilon > 0$ ist*

$$\tau(a) = O(a^{\varepsilon});$$

genauer: für jedes $a > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\tau(a) < 2^{c^{3^{\frac{1}{\varepsilon}}}} a^{\varepsilon}, \tag{14}$$

wo c eine positive absolute Konstante bezeichnet.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei (wegen $\tau(1)=1$)

$$a=\prod_{p\mid a} p^{\lambda}>1$$

und (wegen $\tau(a)\leqq a$)

$$0<\varepsilon<1.$$

Dann ist

$$\tau(a)=\prod_{p\mid a}(\lambda+1),$$

$$\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon}}=\prod_{p\mid a}\frac{\lambda+1}{p^{\lambda\varepsilon}}\leqq\prod_{\substack{p\mid a\\ p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}}\frac{\lambda+1}{p^{\lambda\varepsilon}}$$

(da für $p\geqq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$

$$p^{\lambda\varepsilon}\geqq 2^{\lambda}=(1+1)^{\lambda}\geqq\lambda+1),$$

also

$$\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon}}\leqq\prod_{\substack{p\mid a\\ p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}}\frac{\lambda+1}{e^{\lambda\varepsilon\log p}}\leqq\prod_{\substack{p\mid a\\ p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}}\frac{\lambda+1}{\lambda\varepsilon\log 2}\leqq\prod_{\substack{p\mid a\\ p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}}\frac{2}{\varepsilon\log 2}$$

$$\leqq\prod_{\substack{p\mid a\\ p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}}\frac{3}{\varepsilon}\leqq\prod_{p<2^{\frac{1}{\varepsilon}}}\frac{3}{\varepsilon}<\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2^{\frac{1}{\varepsilon}}}=2^{\frac{1}{\log 2}2^{\frac{1}{\varepsilon}}\log\frac{3}{\varepsilon}}<2^{c3^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Satz 5:[7] *Es sei* $\nu>1$ *ganz,* $a>0$ *ganz,* $\tau_{\nu}(a)$ *die Lösungszahl von*

---

[7] Herrn Winogradows lemme I lautet: Für $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ ist

$$\tau_{\nu}(a)<\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\nu e^{\frac{1}{\varepsilon}}}a^{\varepsilon}. \tag{15}$$

Dies ist für jedes ε der Strecke $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ (bei passenden a, ν) falsch. Denn p_{λ} sei die λte Primzahl, $a=\prod_{\lambda=1}^{\nu}p_{\lambda}$. Bekanntlich ist, wegen

$$\vartheta(y)=\sum_{p\leqq y}\log p\sim y$$

nebst

$$h_1 h_2 \dots h_\nu = a$$

in positiven ganzen $h_1, \dots, h_\nu$. *Dann ist bei jedem* $\varepsilon > 0$, *wenn* ν *fest ist,*

(16) $$\tau_\nu(a) = O(a^\varepsilon);$$

genauer: für jedes $a > 0$, *jedes* $\varepsilon > 0$ *und jedes* $\nu > 1$ *ist*

(17) $$\tau_\nu(a) < 2^{c\nu 3^{\frac{\nu}{\varepsilon}}} a^\varepsilon,$$

wo c *die Konstante aus Satz* 4 *bezeichnet.*

Beweis: Wegen $h_\lambda | a$ ist offenbar

$$\tau_\nu(a) \leqq (\tau(a))^\nu;$$

(14) mit $\frac{\varepsilon}{\nu}$ statt ε liefert also

$$\tau_\nu(a) < \left(2^{c 3^{\frac{\nu}{\varepsilon}}}\right)^\nu a^\varepsilon = 2^{c\nu 3^{\frac{\nu}{\varepsilon}}} a^\varepsilon.$$

§ 2.

Neuer Beweis des Hilbertschen Satzes.

Satz 6:[8] *Es sei*

$$\omega \geqq 1, \quad 0 \leqq \vartheta < 1, \quad 0 < \lambda \leqq \frac{1}{2 n \omega^{n-1}}.$$

$$p_\nu \sim \nu \log \nu,$$

$$\prod_{\lambda=1}^{\nu} p_\lambda = e^{\vartheta(p_\nu)} = e^{p_\nu + o(p_\nu)} = e^{\nu \log \nu + o(\nu \log \nu)};$$

andererseits ist

$$\tau_\nu(a) = \nu^\nu = e^{\nu \log \nu}.$$

Aus (15) würde also bei $\nu \to \infty$ folgen

$$e^{\nu \log \nu} < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\nu e^{\frac{1}{\varepsilon}}} e^{\varepsilon(\nu \log \nu + o(\nu \log \nu))} = O\left(e^{\frac{3}{4}\nu \log \nu}\right),$$

was offenbar falsch ist.

Da der übrige Teil des Winogradowschen Beweises richtig ist, muss also sein Fehlschluss in den Schlussworten liegen: »De là le lemme I se laisse facilement vérifier.»

[8] Bei seiner Formulierung des entsprechenden Satzes am Ende der No. 7 (S. 498) vergisst Herr Winogradow die im vorangegangenen Beweis gemachte Annahme $P \geqq 3n(n-1)a_0 (180 A)^n$.

Dann ist

$$\left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \lambda(\nu-\vartheta)^n}\right| < 4\lambda^{-\frac{1}{n}}.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega > 2\lambda^{-\frac{1}{n}}$, und es genügt alsdann,

$$\left|\sum_{2\lambda^{-\frac{1}{n}} \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \lambda(\nu-\vartheta)^n}\right| < 2\lambda^{-\frac{1}{n}}$$

zu zeigen.

Das folgt sofort[9] aus Satz 2 mit

$$\alpha = 2\lambda^{-\frac{1}{n}},\ \beta = \omega,\ f(y) = \lambda(y-\vartheta)^n,\ \Theta = \lambda^{\frac{1}{n}}.$$

Denn wegen $\lambda^{-1} \geqq 2n\omega^{n-1} > 1$ ist für $\alpha \leqq y \leqq \beta$

$$\Theta = \lambda\left(\lambda^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} < \lambda n\left(2\lambda^{-\frac{1}{n}} - 1\right)^{n-1} < \lambda n(y-\vartheta)^{n-1} = f'(y) \leqq \lambda n\omega^{n-1} \leqq \frac{1}{2},$$

$$f''(y) = \lambda n(n-1)(y-\vartheta)^{n-2} > 0.$$

Im Rest dieses Paragraphen sind $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, r, K, T, L, Q, $\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}_5$ ganze nur von n abhängige Zahlen > 1.

Satz 7: *Es sei*

$$N \text{ ganz}, \quad P > 0 \text{ ganz},$$

$$\lambda > 0,\ \left|\lambda - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2},\quad (a, q) = 1,\quad 0 \leqq a \leqq q \leqq n2^{n+1}b_0P^{n-1}\quad (\text{also } q > 0,\ b_0 > 0),$$

$$\Phi(y) = b_0y^n + \cdots + b_n, \text{ jedes } b_\nu \text{ ganz}.$$

Dann ist

[9] An der entsprechenden Stelle (S. 498) zerteilt Herr Winogradow unbegreiflicherweise seine Summe in so viele Teile, dass jedesmal die obere Intervallgrenze höchstens doppelt so gross wie die untere ist. An manchen Stellen der Literatur war dies nötig, weil dort der anzuwendende Hilfssatz es verlangte; sein lemme III verlangt es aber nicht.

$$\left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi i\lambda\Phi(\nu)}\right| < C_1 P \left(\text{Max.}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}},$$

wo C_1 (desgl. $C_2, \ldots, C_6$ beim Beweise) *eine ganze, nur von* n *und* b_0 *abhängige Zahl* > 1 *ist.*

Vorbemerkung: Für

$$\Phi(y) = y^n$$

ist hierin

$$C_1 = \mathfrak{K}_1.$$

Beweis: 1. **Es sei** $2q \geqq P$. In (11) nimmt rechts

$$n!\, b_0 h_1 \ldots h_{n-1} = s$$

nur positive ganzzahlige, durch $n!\, b_0$ teilbare Werte $\leqq n!\, b_0 P^{n-1}$ an; jeden solchen nach (16) $\left(\text{mit } \nu = n-1,\ \varepsilon = \frac{1}{4(n-1)}\right)$ höchstens

$$\mathfrak{K}_2 (P^{n-1})^{\frac{1}{4(n-1)}} = \mathfrak{K}_2 P^{\frac{1}{4}}$$

mal. Daher ist in (11)

$$(18) \qquad \sum_{h_1, \ldots, h_{n-1}=1}^{P} \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\lambda\, n!\, b_0 h_1 \ldots h_{n-1}\}}\right) \leqq \mathfrak{K}_2 P^{\frac{1}{4}} \sum_{s=1}^{n!\, b_0 P^{n-1}} \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\lambda s\}}\right).$$

Die Summe rechts in (18) zerfällt, wegen

$$1 \leqq n\, 2^{n+1} b_0 \frac{P^{n-1}}{q},$$

in höchstens

$$(19) \qquad \frac{n!\, b_0 P^{n-1}}{q} + 1 \leqq C_2 \frac{P^{n-1}}{q}$$

Teilsummen von je q konsekutiven Gliedern, wobei die letzte kürzer oder leer ist. Jede dieser Teilsummen ist, bei passendem, von z freiem η,

$$\leqq \sum_{z=0}^{q-1} \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\eta + \lambda z\}}\right).$$

Hierin ist bei passendem ganzem, von z freiem M

$$\left|\eta - \frac{M}{q}\right| \leqq \frac{1}{2q}$$

und nach Voraussetzung

$$\left|\lambda z - \frac{az}{q}\right| \leqq \frac{z}{q^2} < \frac{1}{q},$$

also

$$\eta + \lambda z = \frac{M + az}{q} + \frac{\Theta(z)}{q}, \quad |\Theta(z)| < \frac{3}{2}.$$

Da $M + az$ wegen $(a, q) = 1$ ein vollständiges Restsystem mod. q durchläuft und $\{\beta\}$ die Periode 1 hat, ist

$$\{\eta + \lambda z\} = \left\{\frac{\sigma(z) + \Theta(z)}{q}\right\},$$

wo $\sigma(z)$ abgesehen von der Reihenfolge die Werte $0, 1, \ldots, q-1$ durchläuft.

Wofern $3 \leqq \sigma(z) \leqq q-3$, ist, wegen

$$\sigma(z) - \frac{3}{2} < \sigma(z) + \Theta(z) < \sigma(z) + \frac{3}{2},$$

$$\{\eta + \lambda z\} \geqq \text{Min.}\left(\frac{\sigma(z) - \frac{3}{2}}{q}, \frac{q - \frac{3}{2} - \sigma(z)}{q}\right) \geqq \text{Min.}\left(\frac{\sigma(z)}{2q}, \frac{q - \sigma(z)}{2q}\right).$$

Nun ist mit höchstens 5 Ausnahmen $3 \leqq \sigma(z) \leqq q-3$; daher ist

$$\sum_{z=0}^{q-1} \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\eta + \lambda z\}}\right) \leqq 5P + 2q \sum_{3 \leqq \sigma \leqq q-3} \text{Max.}\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{q-\sigma}\right) \leqq 5P + 4q \sum_{3 \leqq \sigma \leqq q-3} \frac{1}{\sigma}$$

$$\leqq 10q + 4q \log q \leqq 10q + 4q\,(\log(n\, 2^{n+1} b_0) + (n-1)\log P)$$

$$< C_3 q + \mathfrak{K}_3 q \log P < C_4 q P^{\frac{1}{4}}. \tag{20}$$

Aus (18), (19) und (20) folgt

$$\sum_{h_1, \ldots, h_{n-1}=1}^{P} \text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\lambda n!\, b_0 h_1 \ldots h_{n-1}\}}\right) < \mathfrak{K}_2 P^{\frac{1}{4}} C_2 \frac{P^{n-1}}{q} C_4 q P^{\frac{1}{4}} = C_5 P^{n - \frac{1}{2}},$$

also nach (11)

$$\left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi i\lambda\Phi(\nu)}\right| < 4\left(P^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} + P^{1-\frac{n}{2^{n-1}}} C_5 P^{\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}}\right) < C_6 P^{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$\leqq C_6 P\left(\mathrm{Max.}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

2. **Es sei** $2q < P$.[10] Dann zerteile ich in $\left[\frac{P}{q}\right]$ Summen von je P_1 konsekutiven ν, wo stets $P_1=q$, nur einmal $q \leqq P_1 < 2q$. Jede dieser Teilsummen ist (wegen $P_1 > 0$, $q \leqq n\, 2^{n+1} b_0 P_1^{n-1}$, $2q \geqq P_1$) nach 1. absolut

$$< C_6 P_1^{1-\frac{1}{2^n}} < 2\, C_6 q^{1-\frac{1}{2^n}};$$

die Gesamtsumme ist also absolut

$$< \frac{P}{q}\, 2\, C_6 q^{1-\frac{1}{2^n}} = 2\, C_6 P q^{-\frac{1}{2^n}} \leqq 2\, C_6 P\left(\mathrm{Max.}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Satz 8:[11] *Für*

$$r = 2^n(n+6),\quad K = \mathfrak{R}_1^{2^{n+1}},\quad T = 4K^2,\quad L = K!,\quad Q = (3\,\mathfrak{R}_1^r)^{n\, 2^n}$$

gilt, wenn

$$x > 0 \text{ ganz},\quad (x, L) = 1,\quad P = Tx,\quad x^n = U > Q,\quad S_m = \sum_{\nu=1}^{P} e^{2\pi i \frac{m}{U}\nu^n}$$

ist,

$$\sum_{m=1}^{U-1} |S_m|^r < P^r.$$

Beweis: Nach den bekannten Eigenschaften der Fareybrüche gibt es zu jedem ξ zwischen 0 und 1 und zu jedem ganzen $N > 0$ ein Paar ganzer Zahlen a, q mit

---

[10] Herr Winogradow macht hier (S. 494) den Fehler, in Summen von höchstens q Gliedern einzuteilen und für die eine mit eventuell $P_1 < q$ Gliedern zu übersehen, dass seine Bedingung $q \leqq (P_1 - 1)^{n-\frac{7}{8}}$ nicht erfüllt zu sein braucht.

[11] Die Aufstellung des entsprechenden Hilfssatzes (lemme V) ist die Hauptsache an der Winogradowschen Methode.

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right| \leqq \frac{1}{q(N+1)}, \quad (a, q)=1, \quad 0 \leqq a \leqq q \leqq N;$$

also zu jedem ξ zwischen 0 und 1 und jedem $\nu \geqq 1$ ($N=[\nu]$ genommen) ein Paar ganzer Zahlen a, q mit

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\nu}, \quad (a, q)=1, \quad 0 \leqq a \leqq q \leqq \nu.$$ [12]

Daher gibt es für $m=1, \ldots, U-1$ zwei nur von n, x und m abhängige Zahlen a, q mit

$$\left|\frac{m}{U}-\frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\, n\, 2^n P^{n-1}}, \quad (a, q)=1, \quad 0 \leqq a \leqq q \leqq n\, 2^n P^{n-1}.$$

Somit ist

$$\left|\frac{m}{U}-\frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Wird

$$\frac{mq^n}{U}-aq^{n-1}=Z$$

gesetzt, so ist

$$|Z| < \frac{q^{n-1}}{n\, 2^n P^{n-1}}.$$

Wird ferner

$$\left[\frac{U}{q^n}|Z|\right]=l$$

gesetzt, so ist $l \geqq 0$ und ganz, und zu jedem vorkommenden System a, q, l gibt es höchstens zwei m; denn Z wächst um $\frac{q^n}{U}$, wenn m bei festen a, q um 1 wächst.

Ich teile nun alle $m=1, \ldots, U-1$ in drei Klassen:[13]

---

[12] Herr Winogradow (S. 500, Z. 7) meint allerdings, es sei stets

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\nu}, \quad (a, q)=1, \quad 0 \leqq a \leqq q < \nu$$

erreichbar (wenigstens für grosse ν). Das ist falsch. Gegenbeispiel: ν ganz, $\xi=\frac{1}{\nu}$.

[13] Herrn Winogradows Fallunterscheidung auf S. 502 ist konfus, da es nicht nur von m, sondern auch von v abhängt, welche seiner drei Bedingungen für Z erfüllt ist.

I. $\qquad q \geqq x;$

II. $\qquad q < x,\ q > \mathrm{Max.}\ (l,\ K);$

III. $\qquad q < x,\ q \leqq \mathrm{Max.}\ (l,\ K).$

Nunmehr brauche ich nur für jede der drei Klassen zu zeigen:

$$|S_m| < P\varphi_m,$$

wo

$$\sum_m \varphi_m^r \leqq \frac{1}{3}.$$

Nach Satz 7 $\left(\text{mit } \Phi(y) = y^n,\ b_0 = 1,\ N = 0,\ \lambda = \frac{m}{U}\right)$ ist

$$|S_m| < \begin{cases} \mathfrak{K}_1 P U^{-\frac{1}{n 2^n}} \text{ im Fall I., da } P > x,\ q \geqq x,\ x = U^{\frac{1}{n}}, \\ \mathfrak{K}_1 P q^{-\frac{1}{2^n}} \text{ im Fall II., da } q < x < P. \end{cases}$$

I. Mit

$$\varphi_m = \mathfrak{K}_1 U^{-\frac{1}{n 2^n}}$$

gilt, da m weniger als U Werte hat und $r \geqq n 2^n + 1$, $U > Q$ ist,

$$\sum_m \varphi_m^r < U \mathfrak{K}_1^r U^{-1-\frac{1}{n 2^n}} < \mathfrak{K}_1^r Q^{-\frac{1}{n 2^n}} = \frac{1}{3}.$$

II. Wegen

$$q > K \geqq 2^{2^3} \geqq 6,\ r \geqq 2^{n+1}.\ 4$$

gilt, mit

$$\varphi_m = \mathfrak{K}_1 q^{-\frac{1}{2^n}} < \mathfrak{K}_1 K^{-\frac{1}{2^{n+1}}} q^{-\frac{1}{2^{n+1}}} = q^{-\frac{1}{2^{n+1}}},$$

da zu jedem q (wegen $0 \leqq l < q$) höchstens q Werte von l, (wegen $0 \leqq a \leqq q$, $(a,\ q) = 1$, $q > 1$) höchstens q Werte von a und zu jedem Tripel $a,\ q,\ l$ höchstens zwei Werte von m gehören,

$$\sum_m \varphi_m^r < \sum_{q > K} q^{-4} \cdot q \cdot q \cdot 2 = 2 \sum_{q > K} q^{-2} < \frac{2}{K} \leqq \frac{1}{3}.$$

III. Es ist

$$(21)\qquad |S_m| = \left|\sum_{v=0}^{q-1} \sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{P+v}{q}} e^{2\pi i \frac{m}{U}(q\nu - v)^n}\right| \leqq \sum_{v=0}^{q-1} \left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \frac{P+v}{q}} e^{2\pi i \frac{mq^n}{U}\left(\nu - \frac{v}{q}\right)^n}\right| = \sum_{v=0}^{q-1} \Omega_v,$$

wo (wegen $q < x < P$)

$$\omega = \omega(v) = \frac{P+v}{q} \begin{cases} \geqq \frac{P}{q} > 1 \\ < \frac{P}{q} + 1 < 2\frac{P}{q}, \end{cases}$$

$$\Omega_v = \left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i Z\left(\nu - \frac{v}{q}\right)^n}\right|$$

gesetzt ist; in der Tat ist $\frac{mq^n}{U} - Z$ ganz und durch q^{n-1} teilbar, $\left(\nu - \frac{v}{q}\right)^n$ gleich einer von ν freien Zahl plus einer durch q^{n-1} dividierten ganzen Zahl.[14]

Für $l = 0$ ist $q \leqq \text{Max.}\,(0, K) = K$; wegen

$$(U, K!) = (U, L) = 1, \quad U > 1$$

ist alsdann die Zahl $\frac{mq^n}{U}$ nicht ganz, also

$$Z \neq 0,$$

$$|Z| \geqq \frac{1}{U},$$

$$|Z|^{-1} \leqq U.$$

Für $l > 0$ ist

$$Z \neq 0,$$

$$|Z|^{-1} \leqq \left(\frac{lq^n}{U}\right)^{-1} = \frac{U}{q^n}\frac{1}{l}.$$

---

[14] Herr Winogradow (S. 501, Z. 8) schreibt sogar (in meine Bezeichnungen übertragen)

$$\sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \frac{mq^n}{U}\left(\nu - \frac{v}{q}\right)^n} = \sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i Z\left(\nu - \frac{v}{q}\right)^n};$$

das ist falsch, da $a q^{n-1}\left(-\frac{v}{q}\right)^n$ nicht notwendig ganz ist.

Jedenfalls ist daher, weil

$$0 < |Z| < \frac{1}{2n\left(\frac{2P}{q}\right)^{n-1}} < \frac{1}{2n\omega^{n-1}}$$

ist, nach Satz 6 $\left(\text{mit } \vartheta = \frac{v}{q},\ \lambda = |Z|\right)$

$$\Omega_v < 4|Z|^{-\frac{1}{n}} \leqq \begin{cases} 4U^{\frac{1}{n}} & \text{für } l=0, \\ \frac{4}{q}\frac{U^{\frac{1}{n}}}{l^{\frac{1}{n}}} & \text{für } l>0. \end{cases} \tag{22}$$

Zu jedem $l < K$ gehören (wegen $1 \leqq q \leqq K$, $0 \leqq a \leqq q \leqq K$) höchstens $K.2K.2=4K^2$ Werte von m; zu jedem $l \geqq K$ gehören (wegen $1 \leqq q \leqq l$, $0 \leqq a \leqq q \leqq l$) höchstens $l.2l.2=4l^2$ Werte von m. Nach (21) und (22) ist nun

$$|S_m| < \begin{cases} 4qU^{\frac{1}{n}} \leqq P\frac{4K}{T} = P\frac{1}{K} & \text{für } l=0, \\ 4\frac{U^{\frac{1}{n}}}{l^{\frac{1}{n}}} = P\frac{4}{Tl^{\frac{1}{n}}} < P\frac{1}{Kl^{\frac{1}{n}}} & \text{für } l>0. \end{cases}$$

Mit

$$\varphi_m = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{für } 0 \leqq l < K, \\ \frac{1}{Kl^{\frac{1}{n}}} & \text{für } l > K \end{cases}$$

ergibt sich schliesslich, wegen $r \geqq 4n \geqq 4$, $K \geqq 2^{2^3} \geqq 36$,

$$\sum_m \varphi_m^r < 4K^2\sum_{l=0}^{K-1}\frac{1}{K^4} + \sum_{l=K}^{\infty}\frac{4l^2}{Kl^4} = \frac{4}{K} + \frac{4}{K}\sum_{l=K}^{\infty}\frac{1}{l^2} < \frac{4}{K} + \frac{4}{K}\cdot 2 = \frac{12}{K} \leqq \frac{1}{3}.$$

Hauptsatz I (Hilbert): *Jedes ganze $N \geqq 0$ lässt sich auf die Form*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{\mathfrak{K}_4} y_\lambda^n,\ y_\lambda = y_\lambda(n,\ N) \geqq 0 \text{ und ganz,}$$

bringen.

Beweis: Wegen

$$\lim_{M=\infty} \frac{((M+1)L+1)^n}{(ML+1)^n} = 1 < 2$$

gibt es ein[15]

$$\mathfrak{K}_5 > 2QrT^n,$$

so dass es für jedes ganze $N > \mathfrak{K}_5$ ein ganzes $x = x(n, N)$ mit

$$x > 0,\ x \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ L),\ Q < \frac{N}{2rT^n} \leqq x^n = U \leqq \frac{N}{rT^n}$$

gibt; alsdann ist

$$rT^n \leqq \frac{N}{U} \leqq 2rT^n,$$

$$rT^n \leqq \left[\frac{N}{U}\right] \leqq 2rT^n$$

und nach Satz 8

$$\sum_{m=1}^{U-1} |S_m|^r < P^r.$$

Ich setze nun

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{P} t^{\nu^n},$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{U}},$$

so dass

$$f(1) = P,$$

$$f(\varepsilon^m) = S_m \text{ für } m = 1, 2, \ldots, U-1,$$

---

[15] Herrn Winogradows explizite Angabe der meinem $\mathfrak{K}_5$ entsprechenden Zahl ist, auch wenn alles Vorangehende richtig wäre, verfehlt; auf S. 505, Z. 1 v. u. steht (den herausgefallenen Exponenten 2 in T^{r^2} habe ich schon ergänzt, im Einklang mit S. 506, Z. 8), auf $c_0 = c = 1$ spezialisiert und $T^r > 1$ sowie ganz angenommen:

$$(T^r)! < T^{r^2}.$$

Ich gebe nur zu, dass z. B.

$$(T^r)! < (T^r)^{(T^r)} = T^{rT^r}$$

ist.

$$f^r(t) = \sum_{k=r}^{rP^n} A_k t^k,$$

wo A_k die Lösungszahl von

$$k = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda^n, \quad 1 \leqq y_\lambda \leqq P, \quad y_\lambda \text{ ganz},$$

ist.

Hieraus folgt für ganzes $N > \mathfrak{K}_5$, wenn

$$N - \left[\frac{N}{U}\right] U = h = h(n,\ N)$$

(ganz, $\geqq 0$ und $< U$) gesetzt wird,

$$U \sum_{\substack{k=r \\ k \equiv h \,(\mathrm{mod.}\, U)}}^{rP^n} A_k = \sum_{k=r}^{rP^n} A_k \sum_{m=0}^{U-1} \varepsilon^{(k-h)m} = \sum_{m=0}^{U-1} \varepsilon^{-hm} \sum_{k=r}^{rP^n} A_k \varepsilon^{km} = \sum_{m=0}^{U-1} \varepsilon^{-hm} f^r(\varepsilon^m)$$

$$= P^r + \sum_{m=1}^{U-1} \varepsilon^{-hm} S_m^r \quad {}^{16}$$

$$\geqq P^r - \sum_{m=1}^{U-1} |S_m|^r > 0.$$

Also gibt es für jedes ganze $N > \mathfrak{K}_5$ ein ganzes $M = M(n,\ N)$ mit

$$0 < MU + h = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda^n \leqq rP^n, \quad y_\lambda \geqq 0 \text{ und ganz};$$

hierin ist

$$0 \leqq M \leqq \frac{rP^n}{U} = rT^n \leqq \left[\frac{N}{U}\right],$$

$$0 \leqq \left[\frac{N}{U}\right] - M \leqq 2rT^n.$$

[16] Zu dieser Aussonderung der $k \equiv h$ (mod. U) verwendet Herr Winogradow (S. 504—505) ungeschickterweise eine Fourierreihe, deren Koeffizienten und Rest er abschätzen muss; statt, wie üblich und im obigen Texte geschehen, durch endliche Summation unter Benutzung von Einheitswurzeln zu isolieren. Natürlich kann man sich nachträglich davon überzeugen, dass seine Identität auf S. 505, Z. 15 durch Summation der in ihr auftretenden Fourierreihen genau in die Identität des Textes übergeht.

Für jedes ganze $N > \mathfrak{K}_5$ gilt also

$$N = \left(\left[\frac{N}{U}\right] - M\right) x^n + (MU + h) = \sum_{\lambda=1}^{r+2rT^n} y_\lambda^n, \quad y_\lambda \geqq 0 \text{ und ganz.}$$

Für $0 \leqq N \leqq \mathfrak{K}_5$, N ganz, ist offenbar

$$N = \sum_{\lambda=1}^{\mathfrak{K}_5} y_\lambda^n, \quad y_\lambda \geqq 0 \text{ und ganz.}$$

Die Zahl

$$\mathfrak{K}_4 = \text{Max.}\ (r + 2rT^n,\ \mathfrak{K}_5)$$

leistet also das Gewünschte.

§ 3.

Verschärfung des Hilbertschen Satzes.

Definition: *Es sei $H(t, n)$, kurz $H(t)$ geschrieben, für $t \geqq 1$ das kleinste $s = s(t, n)$, so dass alle positiven ganzen $N \leqq t$ in der Form*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{s} y_\lambda^n, \quad y_\lambda \geqq 0 \text{ und ganz,}$$

darstellbar sind. Für $0 < t < 1$ sei

$$H(t) = 0.$$

In dieser Bezeichnung lautet der Hilbertsche Hauptsatz I:

$$H(t) \leqq \mathfrak{K}_4 \text{ für } t > 0.$$

$H(t)$ fällt mit wachsenden t offenbar nicht, und es ist

$$\lim_{t=\infty} H(t) = g(n)$$

im Sinne der Einleitung.

Satz 9: *Für $t > 0$ und ganzes $f > 0$ ist*

$$H(t) \leqq f + H\left(n^n t^{e^{-\frac{f}{n}}}\right) \tag{23}$$

und

$$H(t) < f\,2^n + H\left(\frac{t}{2^{nf}}\right). \tag{24}$$

Beweis: 1. Für $N \geqq 1$ ist

$$0 \leqq N - \left[\sqrt[n]{N}\right]^n < \left(N^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(N^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n < n N^{\frac{n-1}{n}}.$$

Für $t > 0$ ist also (da jedes ganze positive $N \leqq t$ die $n$te Potenz einer positiven ganzen Zahl plus einer nicht negativen ganzen Zahl $< n N^{\frac{n-1}{n}} \leqq n t^{\frac{n-1}{n}}$ ist)

$$H(t) \leqq 1 + H\left(n t^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Wird

$$t_1 = n t^{\frac{n-1}{n}}, \quad t_2 = n t_1^{\frac{n-1}{n}}, \ldots, \quad t_{f+1} = n t_f^{\frac{n-1}{n}}, \ldots$$

gesetzt, so ist also für $t > 0$

$$H(t) \leqq 1 + H(t_1) \leqq 2 + H(t_2) \leqq \cdots,$$

$$H(t) \leqq f + H(t_f).$$

Nun ist

$$t_f = n^{n - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^f} t^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^f};$$

denn für $f = 1$ ist dies wahr, und der Ausdruck genügt der Rekursionsformel wegen

$$n\left(n^{n-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^f} t^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^f}\right)^{\frac{n-1}{n}} = n^{n-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{f+1}} t^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{f+1}}.$$

Wegen

$$t_f < n^n t^{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^f}$$

ist also (23) bewiesen.

2. Für $N \geqq 1$ ist

$$N = \left[\frac{N}{2^n}\right] 2^n + \varrho, \quad 0 \leqq \varrho < 2^n.$$

Für $t > 0$ ist also (da jedes ganze positive $N \leqq t$ gleich 2^n mal einer nicht negativen ganzen Zahl $\leqq \frac{N}{2^n} \leqq \frac{t}{2^n}$ plus einer nicht negativen ganzen Zahl $< 2^n$ ist)

$$H(t) < H\left(\frac{t}{2^n}\right) + 2^n,$$

woraus successive

$$H(t) < H\left(\frac{t}{2^{2n}}\right) + 2 \cdot 2^n,$$

$$H(t) < H\left(\frac{t}{2^{3n}}\right) + 3 \cdot 2^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bis zu (24) folgt.

Satz 10: *Für jedes feste $c > 0$ ist*

$$H(2^{cn^3}) = o(n\, 2^n).$$

($H(2^{cn^3})$ bezeichnet natürlich die Funktion $H(2^{cn^3}, n)$ der einen Variabelen n.)

Beweis: Nach (23) mit $f = 2^n$ ist

$$H(2^{cn^3}) \leqq 2^n + H\left(n^n\, 2^{cn^3} e^{-\frac{2^n}{n}}\right);$$

für grosse n ist

$$2^{cn^3} e^{-\frac{2^n}{n}} < e^{\frac{1}{2n^n}} < 1 + \frac{1}{n^n},$$

$$n^n\, 2^{cn^3} e^{-\frac{2^n}{n}} < n^n + 1,$$

also

(25) $$H(2^{cn^3}) \leqq 2^n + H(n^n).$$

Nach (24) mit $f = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1$ ist, wegen

$$f \leqq 2\frac{\log n}{\log 2}, \quad \left(\frac{n}{2^f}\right)^n < \left(\frac{n}{2^{\frac{\log n}{\log 2}}}\right)^n = 1,$$

(26) $$H(n^n) < 2\,\frac{\log n}{\log 2}\, 2_n = o\,(n\, 2_n).$$

Aus (25) und (26) folgt die Behauptung.

Satz 11 (Verschärfung des Satzes 7 für $\Phi(y)=y^n$): *Es sei*

$$N \text{ ganz}, \quad P>0 \text{ ganz},$$

$$\lambda>0, \quad \left|\lambda-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad 0\leqq a\leqq q\leqq n\, 2^{n+1} P^{n-1}.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi i\lambda\nu^n}\right| < 2^{c_1 n^3} P\left(\text{Max.}\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{n-1}{n\, 2^{n-1}}},$$

wo c_1 (desgl. $c_2, \ldots, c_{12}$ nachher) *eine absolute ganzzahlige Konstante* >1 *bezeichnet.*

Beweis: 1. **Es sei** $2q\geqq P$. Dann gilt (18) mit

$$2^{c_2 n^3} P^{\frac{1}{2n}}$$

statt $\mathfrak{K}_2 P^{\frac{1}{4}}$ rechts (und $b_0=1$). Denn die Lösungszahl von

$$a=h_1\ldots h_{n-1} \quad (h_1, \ldots \text{ ganz und } >0),$$

wo $1\leqq a\leqq P^{n-1}$, ist nach (17) $\left(\text{mit } \nu=n-1, \ \varepsilon=\frac{1}{2n^2}\right)$ höchstens

$$2^{c n 3^{2n^3}} a^{\frac{1}{2n^2}} < 2^{c_2 n^3} P^{\frac{1}{2n}}.$$

Die Anzahl der Teilsummen, in die die Summe rechts in (18) zerfällt, ist

$$\leqq\frac{n!\,P^{n-1}}{q}+1\leqq n^{c_3 n}\frac{P^{n-1}}{q}.$$

Jede dieser Teilsummen ist, wie beim Beweise des Satzes 7 ausgerechnet,

$$\leqq 10q+4q\log q\leqq 10q+4q\left(c_4 n+c_5 n^2\log\left(P^{\frac{1}{2n}}\right)\right) < c_6\, q\, n^2 P^{\frac{1}{2n}}.$$

Daher ist

$$\sum_{h_1,\ldots,h_{n-1}=1}^{P}\text{Min.}\left(P, \frac{1}{\{\lambda n!\,h_1\ldots h_{n-1}\}}\right) < 2^{c_2 n^3} P^{\frac{1}{2n}} n^{c_3 n}\frac{P^{n-1}}{q} c_6 q n^2 P^{\frac{1}{2n}} < 2^{c_7 n^3} P^{n-\frac{n-1}{n}},$$

und (11) ergibt

$$\left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi i\lambda\nu^n}\right| < 2^{c_8 n^3} P^{1-\frac{n-1}{n\,2^{n-1}}}.$$

2. **Es sei** $2q < P$. Wie bei Satz 7 folgt aus 1.

$$\left|\sum_{\nu=N+1}^{N+P} e^{2\pi i\lambda\nu^n}\right| < \frac{P}{q}\, 2^{c_8 n^3} (2q)^{1-\frac{n-1}{n\,2^{n-1}}} < 2^{c_9 n^3} P q^{-\frac{n-1}{n\,2^{n-1}}}.$$

Satz 12: *Für*

$$r = 2^{n-1}(n+14),\ T = 2^{c_{10} n^3},\ x \text{ Primzahl},\ P = Tx,\ x^n = U > T,\ S_m = \sum_{\nu=1}^{P} e^{2\pi i \frac{m}{U}\nu^n}$$

ist

$$\sum_{m=1}^{U-1} |S_m|^r < P^r.$$

Beweis: Ich setze

$$K = \left(2^{c_1 n^3}\right)^{2^{n+1}},$$

so dass bei passendem c_{10}

$$\left.\begin{array}{c} 4K^2 \\ \left(3 \cdot 2^{c_1 n^3} r\right)^n \end{array}\right\} < 2^{c_{10} n^3} = T.$$

Der Beweisbeginn des Satzes 8 bis zur Unterscheidung der drei Fälle bleibt ungeändert.

Im Fall I. heisst es nach Satz 11 jetzt

$$\varphi_m = 2^{c_1 n^3} U^{-\frac{n-1}{n^2\,2^{n-1}}}.$$

Wegen

$$r > 2^n + (n+2)\,2^{n-1} \geqq 2^n + \left(n + \frac{n}{n-1}\right) 2^{n-1} = 2^n + \frac{n^2}{n-1}\, 2^{n-1}$$

ist also

$$\sum_m \varphi_m^r < U\, 2^{c_1 n^3 r}\, U^{-\frac{n-1}{n^2\,2^{n-1}}\left(2^n + \frac{n^2}{n-1}\,2^{n-1}\right)} = 2^{c_1 n^3 r}\, U^{-\frac{2(n-1)}{n^2}}$$

$$\leqq 2^{c_1 n^3 r}\, U^{-\frac{1}{n}} < 2^{c_1 n^3 r}\, T^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{3}.$$

Im Fall II. heisst es (wegen $q > K$) nach Satz 11 jetzt

$$\varphi_m = 2^{c_1 n^3} q^{-\frac{n-1}{n\,2^{n-1}}} \leqq 2^{c_1 n^3} q^{-\frac{1}{2^n}} < q^{-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

u. s. f. wie damals (r ist $\geqq 2^{n-1} \,.\, 16 = 2^{n+1} \,.\, 4$).

Im Fall III. ändert sich nur, dass jetzt für $l=0$ das Nichtverschwinden von Z so begründet wird:

$$1 \leqq q < x = \text{ Primzahl, } (U,\, q^n) = (x^n,\, q^n) = 1,\ U > 1.$$

Hauptsatz II: *Jedes ganze* $N \geqq 0$ *lässt sich auf die Form*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{g(n)} y_\lambda^n,\quad y_\lambda = y_\lambda(n,\, N) \geqq 0 \text{ und ganz,}$$

bringen, wo

(27) $$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{g(n)}{n\,2^n} \leqq \frac{1}{2}.$$

Anders ausgedrückt: Für $t > 0$ ist

$$H(t) = H(t,\, n) \leqq g(n),$$

wo $g(n)$ die Relation (27) erfüllt.

Beweis: Aus der Primzahltheorie benutze ich die folgende Tatsache (die noch weniger besagt, als schon Tschebyschef bekannt war): Für $y \geqq 1$ gehört dem Intervall $y \leqq x \leqq c_{11} y$ mindestens eine Primzahl $x = p$ an.

Ich wähle c_{12} so, dass

$$2^{c_{12} n^3} > c_{11}^n\, r\, T^{n+1}.$$

Es sei N ganz und $> 2^{c_{12} n^3}$. Dann gibt es, wegen

$$\frac{1}{c_{11}} \sqrt[n]{\frac{N}{r\,T^n}} > \sqrt[n]{T} > 1,$$

ein

$$x = x(n,\, N) = p$$

mit

$$\sqrt[n]{T} < \frac{1}{c_{11}} \sqrt[n]{\frac{N}{rT^n}} \leqq x \leqq \sqrt[n]{\frac{N}{rT^n}},$$

$$T < \frac{N}{c_{11}^n\, r T^n} \leqq x^n = U \leqq \frac{N}{r T^n},$$

und der Beweis des Hauptsatzes I (hier mit T statt Q und unter Benutzung des Satzes 12) lehrt: Jedes ganze $N > 2^{c_{12} n^3}$ ist in der Form

$$N = D x^n + \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda^n, \quad y_\lambda \geqq 0 \text{ und ganz,}$$

darstellbar, wo

$$D \text{ ganz, } 0 \leqq D \leqq c_{11}^n\, r T^n < 2^{c_{12} n^3}, \quad x > 0 \text{ ganz.}$$

Daher ist für $t > 0$

$$H(t) \leqq r + H\left(2^{c_{12} n^3}\right) = \frac{1}{2}\, n\, 2^n + o\left(n\, 2^n\right)$$

nach Definition von r und Satz 10.

§ 4.

Neuer Beweis des Kamkeschen Satzes für ganzzahlige Polynome ohne Zahlenteiler.

In diesem Paragraphen sei

$$\Phi(y) = b_0 y^n + \cdots + b_n, \quad b_0 > 0,$$

alle b_ν ganz und alle $|b_\nu| \leqq b$.

Satz 13: 1. *Für* $y \geqq 5\, b$ *ist*

(28) $$\frac{3}{4} b_0 y^n < \Phi(y) < \frac{5}{4} b_0 y^n,$$

(29) $$y^{n-1} < \Phi'(y) < 2 n b_0 y^{n-1},$$

(30) $$\Phi''(y) > 0.$$

2. *Für $P \geqq 2$, $1 \leqq y \leqq P$ ist*

(31) $$|\Phi(y)| < 2bP^n.$$

Beweis: 1. Für $y \geqq 5b$ ist

$$\frac{b}{y-1} \leqq \frac{b}{5b-b} = \frac{1}{4},$$

$$|\Phi(y) - b_0 y^n| \leqq b(y^{n-1} + \cdots + 1) < \frac{b}{y-1} y^n \leqq \frac{1}{4} y^n \leqq \frac{1}{4} b_0 y^n,$$

womit (28) bewiesen ist;

$$|\Phi'(y) - n b_0 y^{n-1}| \leqq nb(y^{n-2} + \cdots + 1) < \frac{nb}{y-1} y^{n-1} \leqq \frac{n}{4} y^{n-1} < \frac{n}{2} b_0 y^{n-1};$$

$$y^{n-1} \leqq \frac{n}{2} b_0 y^{n-1} < \Phi'(y) < \frac{3}{2} n b_0 y^{n-1} < 2 n b_0 y^{n-1},$$

$$\Phi''(y) \geqq n(n-1) b_0 y^{n-2} - n(n-1) \frac{b}{y-1} y^{n-2} \geqq n(n-1) y^{n-2} \left(b_0 - \frac{1}{4}\right) > 0.$$

2. Für $P \geqq 2$, $1 \leqq y \leqq P$ ist

$$|\Phi(y)| \leqq b(P^n + \cdots + 1) < b\frac{P^{n+1}}{P-1} \leqq b\frac{P^{n+1}}{\frac{P}{2}} = 2bP^n.$$

Satz 14: *Es sei*

$$\omega \geqq 1, \ 0 \leqq \vartheta < 1, \ q > 0 \ \textit{ganz}, \ 0 < \lambda \leqq \frac{1}{4 n b_0 \omega^{n-1}}.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \frac{\lambda}{q^n} \Phi(q(\nu - \vartheta))} \right| < D_1 \lambda^{-\frac{1}{n}},$$

wo D_1 (desgl. D_2, r, K, T, L, Q, D_3, D_4, D_5, D_6 nachher) *eine ganze, nur von n, b_0 und b abhängige Zahl > 1 ist.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega > (5b+1)\lambda^{-\frac{1}{n}}$ und alsdann nur

$$\left|\sum_{(5b+1)\lambda^{-\frac{1}{n}} \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \frac{\lambda}{q^n} \Phi(q(\nu-\vartheta))}\right| < D_2 \lambda^{-\frac{1}{n}}$$

zu zeigen. Das folgt[17] (mit $D_2=2$) aus Satz 2 in der Spezialisierung

$$\alpha=(5b+1)\lambda^{-\frac{1}{n}},\quad \beta=\omega,\quad f(y)=\frac{\lambda}{q^n}\Phi(q(y-\vartheta)),\quad \Theta=\lambda^{\frac{1}{n}}.$$

In der Tat ist nach (29) und (30) für $\alpha \leqq y \leqq \beta$, wegen

$$\lambda^{-1}>1,\quad \alpha>5b+1,\quad y-\vartheta>5b,\quad q(y-\vartheta)>5b,\quad y>2\lambda^{-\frac{1}{n}},$$

$$\Theta=\lambda\left(\lambda^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-1}<\lambda\left(2\lambda^{-\frac{1}{n}}-1\right)^{n-1}<\lambda(y-\vartheta)^{n-1}=\frac{\lambda}{q^{n-1}}(q(y-\vartheta))^{n-1}$$

$$<\frac{\lambda}{q^{n-1}}\Phi'(q(y-\vartheta))=f'(y)<\frac{1}{4nb_0\omega^{n-1}}\frac{1}{q^{n-1}}2nb_0(q(y-\vartheta))^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{y-\vartheta}{\omega}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{2},$$

$$f''(y)=\frac{\lambda}{q^{n-2}}\Phi''(q(y-\vartheta))>0.$$

Satz 15:[18] *Für*
$r=2^n(n+6)$, $K=C_1^{2^{n+1}}$ (C_1 aus Satz 7), $T=2b_0D_1K^2$ (D_1 aus Satz 14), $L=K!$,
$Q=(3C_1^r)^{n2^n}(2b_0)^{n2^n+1}$
gilt, wenn

$$x\geqq 5b \text{ ganz},\ P=Tx,\ \Phi(x)=U>Q,\ (U,L)=1,\ S_m=\sum_{\nu=1}^{P} e^{2\pi i\frac{m}{U}\Phi(\nu)}$$

ist,

$$\sum_{m=1}^{U-1}|S_m|^r<P^r.$$

---

[17] Vergl. Anm. 9.

[18] Beim Beweise des entsprechenden Satzes (Lemme V) schliesst Herr Winogradow auf S. 501, Z. 8 v. u. unberechtigterweise

$$P_1>3n(n-1)c_0(180\,A)^n.$$

Beweis: In leichter Abänderung des Beweisbeginns von Satz 8 wähle ich etzt $a = a(\Phi, x, m)$ und $q = q(\Phi, x, m)$ mit

$$\left|\frac{m}{Q} - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\, n\, 2^{n+1}\, b_0 P^{n-1}}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leqq a \leqq q \leqq n\, 2^{n+1}\, b_0 P^{n-1}.$$

$Z = Z(\Phi, x, m)$ und $l = l(\Phi, x, m)$ seien wie dort definiert, so dass hier

$$|Z| < \frac{q^{n-1}}{n\, 2^{n+1}\, b_0 P^{n-1}}.$$

Die Einteilung der m in drei Klassen geschieht wie dort, und zu den drei Fällen ist hier das folgende zu bemerken:

I. Es ist $P > x$, $q \geqq x$, $x > \left(\frac{U}{2 b_0}\right)^{\frac{1}{n}}$ (wegen $x \geqq 5\, b$ und (28)), also nach Satz 7 $\left(\text{mit } N = 0,\ \lambda = \frac{m}{U}\right)$

$$|S_m| < C_1 P \left(\frac{U}{2 b_0}\right)^{-\frac{1}{n 2^n}},$$

$$\varphi_m = C_1 \left(\frac{U}{2 b_0}\right)^{-\frac{1}{n 2^n}};$$

folglich, da $r \geqq n\, 2^n + 1$, $U > Q > 2\, b_0$,

$$\sum_m \varphi_m^r < U C_1^r \left(\frac{U}{2 b_0}\right)^{-1-\frac{1}{n 2^n}} < C_1^r (2\, b_0)^{\frac{n 2^n + 1}{n 2^n}} Q^{-\frac{1}{n 2^n}} = \frac{1}{3}.$$

II. Ganz unverändert wegen

$$\varphi_m = C_1 q^{-\frac{1}{2^n}} < C_1 K^{-\frac{1}{2^{n+1}}} q^{-\frac{1}{2^{n+1}}} = q^{-\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

III.

$$|S_m| \leqq \sum_{v=0}^{q-1} \Omega_v,$$

wo (wegen $q < x < P$)

$$1 < \omega = \omega(v) = \frac{P+v}{q} < 2\frac{P}{q},$$

$$\Omega = \left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \frac{m}{U}\Phi(q\nu - v)}\right| = \left|\sum_{1 \leqq \nu \leqq \omega} e^{2\pi i \frac{Z}{q^n}\Phi(q\nu - v)}\right|$$

(da $\Phi(q\nu - v)$ gleich einem Multiplum von q plus einer von ν freien Zahl und $q\left(\frac{m}{U} - \frac{Z}{q^n}\right) = a$ ganz ist).

Für $l = 0$ ist wegen $q \leqq K$, $(U, K!) = 1$, $U > 1$ die Zahl Z nicht ganz, und die alten Rechnungen bleiben ungeändert, da Satz 14 mit $\vartheta = \frac{v}{q}$, $\lambda = |Z|$ wegen

$$|Z| < \frac{1}{4 n b_0 \left(2\frac{P}{q}\right)^{n-1}} < \frac{1}{4 n b_0 \omega^{n-1}}$$

anwendbar ist, der Faktor D_1 bei T den Faktor D_1 aus Satz 14 kompensiert und $U^{\frac{1}{n}} < 2 b_0 x = 2 b_0 \frac{P}{T}$ ist.

Hauptsatz III: *$\Phi(y)$ möge überdies die Eigenschaft haben, dass 1 der grösste gemeinsame Teiler aller für ganzes y dargestellten Zahlen ist. Dann lässt sich jedes ganze $N > D_3$ auf die Form bringen*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_0} \Phi(y_\lambda), \quad y_\lambda > 0 \text{ und ganz}, \quad 1 \leqq M_0 = M_0(\Phi, N) \leqq D_4.$$

Beweis: Es gibt ein ganzes $x_0 = x_0(\Phi)$ mit

(32) $$(\Phi(x_0), L) = 1.$$

Denn für jedes $p|L$ ist nach Voraussetzung nicht stets $p|\Phi(y)$, also ein x_p mit

$$\Phi(x_p) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

vorhanden. Die Kongruenzen

$$x \equiv x_p \pmod{p}$$

sind verträglich, und für ein solches x_0 ist bei jedem $p\ L$

$$\Phi(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

also (32) erfüllt.

Ich zeige zunächst, dass es für jedes $t > D_5$ ein ganzes $x = x(\Phi, t)$ mit

$$x \geqq 5b, \ (\Phi(x), L) = 1, \ t \leqq \Phi(x) \leqq 2t$$

gibt.

In der Tat ist für $x \geqq 5b$ nach (28)

$$\frac{3}{4} b_0 x^n < \Phi(x) < \frac{5}{4} b_0 x^n.$$

Es gibt für $t > D_6$ ein ganzes M mit

$$\sqrt[n]{\frac{4}{3b_0} t} \leqq x_0 + ML \leqq \sqrt[n]{\frac{8}{5b_0} t}$$

$\Bigg($da $\sqrt[n]{\frac{8}{5b_0}} - \sqrt[n]{\frac{4}{3b_0}} > 0$ ist und nur von n und b_0 abhängt, also für $t > D_6$

$$\sqrt[n]{\frac{8}{5b_0} t} - \sqrt[n]{\frac{4}{3b_0} t} > L$$

ist$\Bigg)$. Für $t > D_5 = \text{Max.}\,(D_6, b_0(5b)^n)$ ist dabei

$$x_0 + ML = x \geqq 5b,$$

$$(\Phi(x), L) = 1,$$

$$t \leqq \frac{3}{4} b_0 x^n < \Phi(x) < \frac{5}{4} b_0 x^n \leqq 2t.$$

Für jedes ganze $N > D_3 = 8rbT^n(Q + D_5)$ gibt es also ein ganzes $x = x(\Phi, N)$ mit

$$x \geqq 5b, \quad Q < \frac{N}{8rbT^n} \leqq \Phi(x) = U \leqq \frac{N}{4rbT^n}, \ (U, L) = 1.$$

Alsdann ist

$$4rbT^n \leqq \left[\frac{N}{U}\right] \leqq 8rbT^n,$$

und wegen des Satzes 15 führt der Beweis des Hauptsatzes I (mit $\Phi(y)$ statt y^n) für ganzes $N > D_3$ zu

$$N = \left[\frac{N}{U}\right] U + h, \quad 0 \leqq h < U,$$

$$M U + h = \sum_{\lambda=1}^{r} \Phi(y_\lambda), \quad M \text{ ganz}, \quad 1 \leqq y_\lambda \leqq P, \quad y_\lambda \text{ ganz}.$$

Hieraus folgt wegen (31) und (28)

$$|M| < 1 + \frac{1}{U} \sum_{\lambda=1}^{r} |\Phi(y_\lambda)| < 1 + \frac{1}{U} 2 b P^n r$$

$$< 1 + \frac{2 b T^n x^n r}{\frac{3}{4} b_0 x^n} < 1 + 3 r b T^n < 4 r b T^n \leqq \left[\frac{N}{U}\right] \leqq 8 r b T^n,$$

$$0 \leqq \left[\frac{N}{U}\right] - M < 12 r b T^n,$$

$$N = \left(\left[\frac{N}{U}\right] - M\right) \Phi(x) + (M U + h)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{M_0} \Phi(y_\lambda), \quad y_\lambda > 0 \text{ und ganz}, \quad 1 \leqq M_0 = M_0(\Phi, N) \leqq 12 r b T^n + r = D_4.$$

§ 5.

Neuer Beweis des Kamkeschen Satzes.

Hauptsatz IV: *Das Polynom*

$$\Phi(y) = b_0 y^n + \cdots + b_n,$$

wo $b_0 > 0$, *sei für jedes ganze* y *eine ganze Zahl, so dass die* b_ν *rational sind.* d *sei der grösste gemeinsame Teiler aller für ganzes* y *dargestellten Zahlen. Dann ist jedes durch* d *teilbare* $N \geqq B_1(\Phi)$ *in*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_1} \Phi(y_\lambda), \quad y_\lambda > 0 \textit{ und ganz}, \quad 1 \leqq M_1 = M_1(\Phi, N) \leqq B_2(\Phi)$$

zerlegbar; folglich jedes ganze $N \geqq 0$ *von der Form*

$$N = \sum_{\lambda=1}^{s(\Phi)} z_\lambda, \quad z_\lambda = 0 \text{ oder } = 1 \text{ oder } = \Phi(y_\lambda), \ y_\lambda > 0 \text{ und ganz.}$$

Beweis:[19] 1. **Es sei** $d=1$. L sei der Hauptnenner der b_ν, also

$$\Phi(y) = \frac{L_0 y^n + \cdots + L_n}{L} = \frac{\Psi(y)}{L}, \quad L_\nu \text{ ganz.}$$

(L hat nicht mehr die Bedeutung des vorigen Beweises: aber ich wähle mit Absicht denselben Buchstaben.)

$L=1$ ist durch Hauptsatz III erledigt. Es sei also $L>1$.

Es gibt ein $x_0 > 0$ mit

$$(\Phi(x_0),\ L) = 1. \tag{33}$$

Denn für jedes $p\,|\,L$ ist (wegen $d=1$)

$$(\Phi(x_p),\ p) = 1$$

erfüllbar. Ist $L = \prod_{p\,|\,L} p^\varrho$, so sind die Kongruenzen

$$x \equiv x_p \pmod{p^{\varrho+1}}$$

verträglich. Für ein solches $x = x_0 > 0$ ist

$$\Psi(x_0) \equiv \Psi(x_p) \ (\text{mod. } p^{\varrho+1}),$$

$$L\,\Phi(x_0) \equiv L\,\Phi(x_p) \ (\text{mod. } p^{\varrho+1}),$$

$$\Phi(x_0) \equiv \Phi(x_p) \ (\text{mod. } p),$$

$$(\Phi(x_0),\ p) = 1,$$

also (33) erfüllt.

---

[19] Die Unrichtigkeit der Winogradowschen Herleitung (S. 507) des Hauptsatzes IV aus Hauptsatz III ist offenkundig; denn im Falle $d=1$ betrachtet er $\Phi(x'+y)$ statt $\Phi(y)$, wodurch z. B. der höchste Koeffizient, wenn er nicht ganz war, auch nicht ganz werden kann (weil er nämlich ungeändert bleibt). Beispiel: $\Phi(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}$.

Die Funktion

$$F(z) = \Phi(x_0 + Lz)$$

hat ganzzahlige Koeffizienten; denn alle Koeffizienten in

$$LF(z) = \Psi(x_0 + Lz) = L\Phi(x_0) + E_1 z + \cdots + E_n z^n$$

sind durch L teilbar.

Ferner ist 1 der grösste gemeinsame Teiler aller durch $F(z)$ für ganzes z dargestellten Zahlen; denn nenne ich ihn δ, so ist, wegen $\delta \mid \Phi(x_0)$ und (33),

$$(\delta, L) = 1,$$

also bei ganzem y stets

$$\delta \mid \Phi(y),$$

da zu y ein ganzes z mit

$$y \equiv x_0 + Lz \pmod{\delta}$$

gefunden werden kann und alsdann

$$\Psi(y) \equiv \Psi(x_0 + Lz) \pmod{\delta},$$

$$L\Phi(y) \equiv L\Phi(x_0 + Lz) \pmod{\delta},$$

$$\Phi(y) \equiv \Phi(x_0 + Lz) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

ist. δ muss also $= 1$ sein.

Hauptsatz III ist daher auf $F(z)$ anwendbar und liefert: Jedes ganze $N \geqq B_3(\Phi)$ ist von der Form

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_2} F(z_\lambda), \quad z_\lambda > 0 \text{ und ganz}, \quad 1 \leqq M_2 = M_2(\Phi, N) \leqq B_4(\Phi),$$

also

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_2} \Phi(y_\lambda), \quad y_\lambda > 0 \text{ und ganz.}$$

2. **Es sei** $d > 1$. Dann ist 1. auf

$$\frac{\Phi(y)}{d}$$

anwendbar. Für jedes durch d teilbare $N \geqq B_5(\Phi)$ ist also

$$\frac{N}{d} = \sum_{\lambda=1}^{M_3} \frac{\Phi(y_\lambda)}{d}, \quad y_\lambda > 0 \text{ und ganz}, \quad 1 \leqq M_3 = M_3(\Phi, N) \leqq B_6(\Phi),$$

$$N = \sum_{\lambda=1}^{M_3} \Phi(y_\lambda).$$

Göttingen, den 10. November 1925.