SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

$$\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$$

À COEFFICIENTS CONSTANTS.

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNE.[1]

Le présent travail a, comme objet principal, la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$$

par rapport à la fonction inconnue $\varphi(x)$. À cette question s'en rattachent d'autres, comme la résolution d'équations fonctionnelles analogues à (1), l'étude de certaines classes de fonctions qui se présentent dans cette résolution, l'examen de certains problèmes fonctionnels qui ont un lien étroit avec l'équation (1). Dans ce mémoire on examinera le cas où les coefficients h_ν de l'équation (1) sont des quantités constantes, tandis que je me propose de traiter, dans un autre travail, la même équation dans l'hypothèse où les h_ν sont des fonctions rationnelles de x.[2]

---

[1] C'est en lui offrant cette traduction d'un ancien Mémoire, publié en 1888 (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, S. IV, T. IX, p. 45—71) que je me permets de rendre hommage à l'illustre fondateur des Acta. Ce mémoire, qui a passé à peu près inaperçu, renferme les germes d'une théorie qui, retrouvée et développée quelques années plus tard, a pris dans l'Analyse une place remarquable. J'ai tenu à donner la traduction de la façon la plus littérale, pour conserver à ce travail son caractère d'authenticité, même là où il présente quelque imperfection de forme et où l'usage d'un langage plus moderne aurait pu rendre la rédaction plus agile. (*t*)

[2] Cette question se trouve traitée dans le même volume des Mémoires de l'Académie de Bologne, p. 181—204. (*t*)

N. B. Les notes marquées d'un (*t*) ne se trouvent pas dans le Mémoire original.

§ 1. Un problème d'inversion d'intégrale définie et ses diverses interprétations.

1. Soit une série de puissances de z^{-1}, qui représente une fonction analytique de z, régulière hors d'un cercle de centre O et de rayon R et nulle à l'infini,

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Qu'on prenne $z=y-x$; la fonction $A(y-x)$ sera certainement régulière sous la condition

$$|y-x|>R, \tag{2}$$

satisfaite soit si l'on pose

$$|y|>|x|+R, \tag{3}$$

soit aussi

$$|x|>|y|+R. \tag{4}$$

Dans la première hypothèse, en prenant x intérieur au cercle de centre O et de rayon σ, et y extérieur au cercle de centre O et de rayon $R+\sigma$, on obtient pour $A(y-x)$ soit le développement

$$A(y-x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{(y-x)^{n+1}}, \tag{5}$$

soit l'autre

$$A(y-x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{A_n(x)}{y^{n+1}}, \tag{6}$$

où les $A_n(x)$ constituent le système des polynômes d'Appell formés avec les coefficients a_n.[1]

Dans la seconde hypothèse, en prenant y intérieur au cercle σ et x extérieur au cercle $R+\sigma$, on aura pour $A(y-x)$ soit le développement (5), soit l'autre

[1] V. mon Mémoire: *Sur certaines opérations fonctionnelles* etc. § 33. Acta mathematica, T. X, p. 179, 1887.

(7) $$A(y-x)=\sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} A^{(n)}(-x),$$

où $A^{(n)}(z)$ est la $n^{\text{ème}}$ dérivée de $A(z)$.

2. On considère maintenant l'expression

(8) $$A(\psi)=\int_{(l)} A(y-x)\,\psi(y)\,dy,$$

où l'intégration est prise le long d'une ligne (l) du plan y, et $\psi(y)$ est une fonction analytique sans singularités le long de la ligne (l), et l'on distingue deux cas:

a) La ligne (l) soit finie ou infinie (pourvu que dans ce dernier cas l'intégrale ait un sens) mais le module minimum de ses points soit supérieur à R: soit $R+\sigma$. Pour $|x|<\sigma$, la (3) est satisfaite sur les points de la ligne (l) et l'on peut admettre pour $A(y-x)$ le développement (5) ou (6). En posant

(9) $$\int_{(l)} \frac{\psi(y)\,dy}{y-x}=\varphi(x)$$

et en substituant pour $A(y-x)$ soit (5), soit (6), on a de (8) en tous cas si la ligne (l) est finie et sous les conditions d'intégrabilité par série si elle est infinie:

(10) $$A(\psi)=\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\varphi^{(n)}(x)$$

et

(11) $$A(\psi)=\sum_0^\infty c_n A_n(x),$$

où

(12) $$c_n=\int_{(l)} \frac{\psi(y)\,dy}{y^{n+1}}.$$

b) La ligne (l) soit toute à distance finie. Si σ est le module maximum de ses points, qu'on prenne $|x|>R+\sigma$: la (4) est vérifiée pour les points de (l) et l'on a pour $A(y-x)$ les développements (5) et (7). En les substituant dans (8), on aura:

(10) $$A(\psi)=\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\varphi^{(n)}(x)$$

et

(13) $$A(\psi)=\sum c'_n \frac{A^{(n)}(-x)}{n!}$$

où les c'_n sont données par

$$c'_n=\int_{(l)} y^n\,\psi(y)\,dy.$$

3. Soit maintenant $f(x)$ une fonction donnée, et proposons-nous de résoudre l'équation fonctionnelle

(14) $$A(\psi)=f(x).$$

Ce problème est l'un de ceux qu'on peut appeler *d'inversion d'une intégrale définie* et la fonction $A(y-x)$ en est la fonction caractéristique[1]: or, les formules qu'on vient de trouver prouvent qu'il coïncide avec d'autres problèmes fonctionnels. Et en effet, suivant que l'on prend pour $A(\psi)$ l'une ou l'autre de ses expressions (10), (11) ou (13), l'on a à résoudre l'un des problèmes suivants:

a) Résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et à un nombre infini de termes:

(15) $$\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\varphi^{(n)}(x)=f(x),$$

ou bien:

b) Trouver le développement de la fonction donnée $f(x)$ en série ordonnée suivant un système donné de polynômes d'Appell,

ou enfin:

c) Développer la fonction donnée $f(x)$ en série ordonnée suivant les dérivées successives d'une fonction donnée $A(-x)$.

§ 2. Résolution formelle du problème. Multiplicité de solutions.

4. Le problème d'inversion d'intégrale définie exprimé par l'équation (14) conduit donc, dans les deux cas considérés, à la résolution du problème *a)* exprimé par l'équation (15). Or, ce problème est plus général que celui donné par

[1] Il n'est pas nécessaire de rappeler que les travaux classiques et la nomenclature sur les équations intégrales sont bien postérieurs à ce Mémoire. (*t*)

l'équation (14), parce que non seulement toute équation (14) donne lieu à une équation de la forme (15), mais encore parce que la série

$$\sum \frac{a_n}{n!}\psi^{(n)}(z)$$

peut converger même si $A(z)$ est une série toujours divergente, et par suite privée de sens. Il convient donc de chercher d'abord la solution de l'équation (15); or, celle-ci se résout *formellement* sans difficulté par la méthode suivante:

Qu'on pose d'abord

$$a(t)=\sum_0^\infty \frac{a_n t^n}{n!}, \tag{16}$$

et qu'on détermine une fonction $\chi(t)$ et une ligne (λ) d'intégration telles que l'on ait

$$\int_{(\lambda)} \chi(t)\, e^{xt}\, dt = f(x).\text{[1]} \tag{17}$$

La solution formelle de l'équation (15) sera donnée par

$$\varphi(x)=\int_{(\lambda)} \frac{\chi(t)e^{xt}dt}{a(t)}, \tag{18}$$

puisqu'en dérivant on obtient

$$\varphi^{(n)}(x)=\int_{(\lambda)} \frac{\chi(t)\, e^{xt}\, t^n dt}{a(t)}$$

qui, substituée dans l'équation (15), la vérifie formellement.

5. Résolue ainsi formellement l'équation (15), ce qui renferme l'inversion d'intégrale définie que nous étudions, il faut chercher en quels cas cette solution formelle donne lieu à une solution effective. Nous ferons cette recherche dans le cas où $A(z)$ a une forme spéciale, pour laquelle l'équation (14) se transforme dans l'équation (1) dont la solution forme l'objet principal de ce travail.

Mais auparavant, il faut remarquer que l'équation (15) peut avoir une multiplicité de solutions. En effet, la (18) définit une fonction qui satisfait formellement au problème quelle que soit la ligne d'intégration qui rend valable la (17).

[1] Pour cette détermination, v. le Mémoire: *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni,* Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VIII, 1887.

Si l'on a donc deux de ces lignes, entre lesquelles est compris quelque zéro de $a(t)$, on prévoit qu'on aura deux fonctions $\varphi(x)$ différentes, et par suite le nombre des solutions et leurs relations dépendront des zéros de $a(t)$. Ceci est confirmé par le fait que la différence entre deux solutions de (15) satisfait à l'équation

$$\sum \frac{a_n}{n!} \varphi^{(n)}(x) = 0 \tag{19}$$

dont il est bien connu que l'intégrale a la forme

$$\sum c_\nu e^{\beta_\nu x}, \tag{20}$$

où les β_ν sont les racines, prises en nombre arbitraire, de la fonction $a(t)$, et les c_ν sont des constantes arbitraires.

§ 3. Forme spéciale de la fonction caractéristique qui conduit à l'équation (1).

6. Posons

$$A(z) = \frac{h_1}{z-\alpha_1} + \frac{h_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{h_m}{z-\alpha_m}, \tag{21}$$

où les $h_1, h_2, \ldots h_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sont des constantes, et les α sont ordonnées en sorte que leurs parties réelles soient croissantes. Le nombre R n'est autre que le module maximum des α.

Dans l'intégrale (8), la fonction caractéristique est actuellement

$$A(y-x) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{h_\nu}{y-x-\alpha_\nu},$$

et les polynômes d'Appell correspondants sont

$$A_n(x) = \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu (x+\alpha_\nu)^n.$$

En ce cas, l'équation (14) se transforme en

$$\sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \int_{(l)} \frac{\psi(y)\,dy}{y-x-\alpha_\nu} = f(x),$$

et par suite, par la (9), en

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x).$$

La fonction $a(t)$ définie par (16) devient

$$a(t)=\Sigma h_\nu e^{\alpha_\nu t}$$

et l'équation (1) vient formellement résolue par la formule (18) trouvée au § 2 et qui s'écrit

$$(18)' \qquad \varphi(x)=\int_{(\lambda)} \frac{\chi(t)\, e^{xt} dt}{\Sigma h_\nu e^{\alpha_\nu t}}.$$

Nous allons montrer que cette solution formelle est aussi la solution effective du problème dans deux cas remarquables, dont le premier a déjà été considéré par Halphen, quoique à un point de vue différent du nôtre.

§ 4. Cas d'une fonction entière; le problème d'Halphen.

7. Supposons que la fonction donnée $f(x)$ soit entière (en général transcendante) et, en posant

$$(22) \qquad f(x)=\sum \frac{k_n x^n}{n!}$$

supposons $k_n \backsim \varrho^n$, où ϱ est un nombre positif[1]; cela revient à dire que la série

$$\chi(t)=\sum \frac{k_n}{t^{n+1}}$$

converge hors du cercle de centre O et de rayon ϱ. En indiquant par (λ) une ligne fermée toute extérieure au cercle ϱ, on vérifie immédiatement que

$$(23) \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} \chi(t)\, e^{xt} dt.$$

Il en résulte que pour toute semblable fonction $f(x)$ l'expression (18) représente une fonction entière $\varphi(x)$ qui donne une solution non plus simplement formelle,

[1] C'est une des fonctions que M. Pólya a appelées »de type exponentiel». Math. Ann., T. 89, p. 180 (1923). (t)

mais effective de l'équation (15). Il est nécessaire de remarquer que la ligne (λ) ne doit passer par aucune racine de $a(t)$.

Si la ligne d'intégration (λ) varie, la solution $\varphi(x)$ variera chaque fois que cette ligne dépasse une racine de $a(t)$, en sorte que la différence de deux solutions sera, comme on le voit facilement, une fonction de la forme (20).

En résumé, l'expression (18) nous donne, dans le cas actuel, pour toute ligne (λ) extérieure au cercle ϱ et qui ne passe par aucune racine de $a(t)$, une fonction entière (en général transcendante), qui répond aux questions suivantes:

a) Résolution de l'équation (15), où $f(x)$ est de la forme (22).

b) Inversion de l'intégrale

$$f(x) = \int_{(l)} A(y-x)\,\varphi(y)\,dy \tag{8}$$

par rapport à la fonction φ, (l) étant une ligne fermée extérieure au cercle R.

c) Développement de la fonction $f(x)$ en série de polynômes d'Appell. La formule (12) montre que le coefficient de $A_n(x)$ dans cette série coïncide avec celui de x^n dans le développement de $\varphi(x)$ en série de puissances.

8. Le cas où les racines de $a(t)$, à l'exception de la racine zéro, sont en module plus grandes que ϱ, mérite une mention spéciale. En ce cas, on peut décrire une ligne fermée (λ'), toute extérieure au cercle (ϱ) et qui ne contient intérieurement aucune racine de $a(t)$ différente de zéro. J'indiquerai par $\Phi(x)$ la fonction $\varphi(x)$ qu'on obtient de (18) en prenant (λ') comme ligne d'intégration. Cette fonction $\Phi(x)$ présente de remarquables relations de réciprocité avec la fonction donnée $f(x)$. En effet, $\dfrac{e^{xt}}{a(t)}$ ne contenant dans son développement suivant les puissances de t qu'un nombre fini ou nul de puissances négatives de t, on aura

$$\frac{e^{xt}}{a(t)} = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{A}_n(x)}{n!}, \tag{24}$$

où les $\mathrm{A}_n(x)$ constituent le système de polynômes d'Appell *inverse* de $A_n(x)$. Rappelant que les coefficients de $f(x)$ sont donnés, d'après (23), par

$$k_n = \int_{(\lambda')} \chi(t)\, t^n\, dt,$$

on trouve, en substituant le développement (24) dans l'expression (18) de $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\sum_0^\infty \frac{k_n}{n!} \mathrm{A}_n(x).$$

De même, en substituant dans (18) le développement

$$\frac{1}{a(t)}=\sum_{-m}^\infty a_n t^n,$$

on trouve

$$\Phi(x)=\sum_0^\infty a_n f^{(n)}(x).$$

D'après ces remarques, on peut composer le tableau suivant, qui met en évidence les propriétés réciproques de $f(x)$ et de $\Phi(x)$:

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\sum\limits_0^\infty \frac{k_n x^n}{n!} & \Phi(x)=\sum\limits_0^\infty \frac{k_n \mathrm{A}_n(x)}{n!}, \\ f(x)=\sum\limits_0^\infty c_n A_n(x), & \Phi(x)=\sum\limits_0^\infty c_n x^n, \\ a(t)=\sum \frac{a_n t^n}{n!} & \frac{1}{a(t)}=\sum a_n t^n, \\ f(x)=\sum \frac{a_n \Phi^{(n)}(x)}{n!} & \Phi(x)=\sum\limits_0^\infty a_n f^{(n)}(x). \end{array} \right.$$

9. Dans ce qui précède, $A(z)$ est quelconque comme au § 1. Si l'on donne à $A(z)$ la forme spéciale (21), les fonctions $\varphi(x)$ qu'on vient de trouver résolvent l'équation (1) pour toute fonction $f(x)$ du type (22). Si le nombre ϱ est plus petit que le module minimum des racines de $a(t)$, excepté $t=0$, on obtient une solution $\Phi(x)$ liée à $f(x)$ par les propriétés du tableau (A). Ces fonctions sont celles qu'a considérées Halphen[1]; en remarquant qu'on a, d'après (8)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \sum_{\nu=1}^m \frac{h_\nu}{y-x-\alpha_\nu} \Phi(y)\, dy,$$

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 93, p. 781, Paris 1881.

d'où

$$k_n = \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \, \Phi^{(n)}(\alpha_\nu),$$

elles sont telles que

$$(25) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_1 \, \Phi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \, \Phi^{(n)}(\alpha_2) + \cdots + h_m \, \Phi^{(n)}(\alpha_m)\right) \frac{A_n(x)}{n!},$$

qui est la propriété que Halphen prend comme point de départ.

§ 5. Cas d'une fonction régulière à l'extérieur d'un cercle.

10. Voici deux propositions auxiliaires dont on devra se servir dans ce §.[1]

Théorème I. Si une fonction analytique $\chi(t)$ satisfait à

$$(a) \qquad \lim_{t=\infty} \chi(t)\, e^{-xt} = 0$$

pour t réel et positif et pour toute valeur de x dont la partie réelle est plus grande qu'un nombre réel ϱ, l'expression

$$(b) \qquad \int_0^\infty \chi(t)\, e^{-xt}\, dt$$

représente, pour ces valeurs de x, une fonction analytique régulière.

Théorème II. Si

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

est une série de puissances convergente hors d'un cercle de centre O et de rayon ϱ, et si l'on pose

$$\chi(t) = \sum_0^\infty \frac{k_n t^n}{n!},$$

[1] Pour la démonstration du premier théorème, v. SCHEEFFER, *Ueber einige bestimmte Integralen*, etc., p. 5 (Habilitationsschrift, Berlin, 1883). La démonstration de Scheeffer peut être très simplifiée par l'emploi d'un théorème de Morera (Rend. del R. Istituto Lombardo, S. II, T. 19). Pour la démonstration du deuxième, v. mon Mémoire déjà cité: *Della trasformazione di Laplace*, § 5.

la fonction $\chi(t)$ satisfait à la condition (a) et l'expression (1) coïncide, pour les valeurs de x dont la partie réelle est plus grande que ϱ, avec la fonction $f(x)$ même.

11. Reprenons maintenant l'équation (1) et supposons que la fonction donnée $f(x)$ au second membre soit développable en une série

$$f(x)=\sum \frac{k_n}{x^{n+1}} \tag{26}$$

convergente à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon ϱ. Par le théorème II, et en posant $\chi(t)$ égal à la fonction entière $\sum \frac{k_n t^n}{n!}$, on a

$$f(x)=\int_0^\infty \chi(t)\, e^{-xt}\, d\, t \tag{27}$$

et la solution de l'équation (1) est donneé par

$$\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}}{\Sigma h_\nu\, e^{-\alpha_\nu t}}. \tag{28}$$

12. Il s'agit maintenant d'examiner plus attentivement l'expression ainsi trouvée, et de voir d'abord si l'expression (28) représente, et pour quelles valeurs de x, une fonction analytique; puis, voir si la fonction ainsi representée peut être continuée au delà du champ de valeurs où elle est définie par l'expression (28). Afin de répondre à ces questions, il nous faut d'abord entrer dans quelques détails.

J'indiquerai par $R(a)$ la partie réelle d'un nombre complexe a, par $u+iv$ la variable complexe x, par $L_{\alpha\delta}$ la droite représentée, dans le plan de cette variable et par rapport aux axes u et v, par l'équation en forme normale

$$u\cos\alpha+v\sin\alpha-\delta=0.$$

Enfin je supposerai pour le moment que $a(t)$ ne soit pas nulle pour $t=0$.

Cela posé, je vais démontrer les propositions suivantes:

$a)$ Si $\chi(t)=\sum\frac{k_n t^n}{n!}$, avec $k_n \backsim \varrho^n$, on peut déterminer x en sorte que

(29) $\chi(t)\, e^{-xt}$

tende à zéro quand t croît indéfiniment dans une direction d'argument donné μ. En effet, en faisant $t=\tau(\cos\mu+i\sin\mu)$ et puisque l'on a $k_n<M\varrho_1^n$, où ϱ_1 est supérieur à ϱ aussi peu que l'on veut, il vient

$$(30)\qquad |\chi(t)e^{-xt}|<Me^{\tau(\varrho_1-u\cos\mu+v\sin\mu)}$$

et pour que cette expression ait pour limite zéro, il suffit de prendre x de telle sorte que

$$u\cos\mu-v\sin\mu>\varrho_1>\varrho.$$

Cette inégalité exprime que x doit se trouver dans celui des demi-plans déterminés par la droite $L_{-\mu,\varrho}$ où ne se trouve pas l'origine; on indiquera ce demi-plan par $P_{-\mu,\varrho}$.

b) En conservant les mêmes notations, si x est pris dans la région commune aux demi-plans $P_{\mu',\varrho}$, $P_{-\mu'',\varrho}$ et t tend à l'infini suivant un argument quelconque μ compris entre μ' et μ'', l'expression (29) tend *uniformément* à zéro.

Soient en effet ε et σ deux nombres positifs arbitrairement petits: si x est dans la région commune à $P_{-\mu',\varrho+\varepsilon}$ et $P_{\mu'',\varrho+\varepsilon}$, on aura, par (30)

$$|\chi(t)e^{-xt}|<Me^{-\varepsilon\tau}$$

et l'on peut prendre ici τ_0 assez grand pour que l'on ait $Me^{-\varepsilon\tau}<\sigma$ pour $\tau>\tau_0$.

c) Une fonction entière de la forme

$$a(t)=h_1e^{\alpha_1t}+h_2e^{\alpha_2t}+\cdots+h_me^{\alpha_mt}$$

admet une infinité de racines ayant l'infini comme limite. Mais sur toute demi-droite (excepté quelques-unes en nombre fini) issue de l'origine, on peut prendre τ_0 assez grand pour que sur cette demi-droite on ne trouve aucune racine de module plus grand que τ_0.

Indiquons par μ l'argument d'une direction quelconque et posons $\alpha_\nu=\gamma_\nu+i\gamma'_\nu$. On aura

$$R(\alpha_\nu t)=\tau(\gamma_\nu\cos\mu-\gamma'_\nu\sin\mu)\qquad(\nu=1,2,\ldots m).$$

Il n'y aura qu'un nombre fini de directions où deux des $R(\alpha_\nu t)$ peuvent être égales: en effet, si l'on a

$$\gamma_r\cos\mu-\gamma'_r\sin\mu=\gamma_s\cos\mu-\gamma'_s\sin\mu,$$

il vient pour μ la valeur particulière

(31) $$\mu = \text{arc tg}\,\frac{\gamma_r-\gamma_s}{\gamma_r'-\gamma_s'}\cdot$$

En exceptant ces directions, en nombre fini, il y aura une $R(\alpha_\nu t)$ maxima; soit α_s: on peut alors écrire

$$a(t)=(h_s+h_1\,e^{(\alpha_1-\alpha_s)t}+h_2\,e^{(\alpha_2-\alpha_s)t}+\cdots)\,e^{\alpha_s t};$$

mais les parties réelles de $\alpha_1-\alpha_s, \alpha_2-\alpha_s, \ldots$ étant négatives, on peut prendre τ_0 assez grand pour que l'on ait

$$|h_1\,e^{(\alpha_1-\alpha_s)t}+h_2\,e^{(\alpha_2-\alpha_s)t}+\cdots|<\frac{|h_s|}{2}$$

pour $\tau>\tau_0$, d'où

$$|a(t)|<\frac{1}{2}|h_s\,e^{\alpha_s t}|,$$

où le second membre n'est nul pour aucune valeur finie de τ. Les directions (31), suivant lesquelles on peut trouver des racines de $a(t)$ pour $|t|$ aussi grand que l'on veut, seront dites *directions limites*. On voit par (31) qu'elles sont normales aux symétriques, par rapport à l'axe réel, des côtés du polygone ayant pour sommets les points α_ν.

d) Si μ' et μ'' sont deux arguments assez rapprochés pour que nulle direction limite ne soit comprise entre eux, l'expression

(32) $$\frac{\chi(t)\,e^{-xt}}{a(t)}$$

tend *uniformément* à zéro si t tend à l'infini suivant un argument quelconque compris entre μ' et μ'', pour toute valeur de x intérieure à la région commune aux deux demi-plans $P_{-\mu',\varrho}$ et $P_{-\mu'',\varrho}$. L'on a, en effet

$$\frac{\chi(t)\,e^{-xt}}{a(t)}=\frac{\chi(t)\,e^{-(x+\alpha_s)t}}{h_s+h_1\,e^{(\alpha_1-\alpha_s)t}+\cdots},$$

où les $R(\alpha_1-\alpha_s)$, $R(\alpha_2-\alpha_s), \ldots$ ne s'annulent pas pour μ compris entre μ' et μ'' et demeurent toujours négatives. On peut donc trouver une valeur τ_0 telle que pour $\tau>\tau_0$ et pour toutes les valeurs de μ entre μ' et μ'', on ait

$$|h_1\,e^{(\alpha_1-\alpha_s)t}+h_2\,e^{(\alpha_2-\alpha_s)t}+\cdots|<\frac{|h_s|}{2},$$

d'où il suit que le dénominateur de (32) est, en module plus grand que $\frac{|h_s|}{2}$; quant au numérateur, nous avons vu qu'il tend uniformément à zéro pour les valeurs de μ comprises entre μ' et μ'' et pour x dans le domaine commune aux demi-plans $P_{-\mu', \varrho - R(\alpha_s)}$, $P_{-\mu'', \varrho - R(\alpha_s)}$; c. q. f. d.

13. D'après ce qui précède, on reconnaît facilement que l'expression (28) représente une fonction analytique de x. Supposons d'abord que l'axe réel, dans sa partie positive, ne soit pas une direction limite et qu'il n'y ait, sur ce demi-axe, aucune racine de $a(-t)$. Si α_1 est celle des α_ν qui a la plus petite partie réelle, la fonction sous le signe, dans (28), peut s'écrire

$$\frac{\chi(t)\, e^{-(x-\alpha_1)t}}{\Sigma h_\nu e^{-(\alpha_\nu - \alpha_1)t}};$$

par suite, pour x tel que l'on ait $R(x-\alpha_1) > \varrho$, c'est à dire pour x dans le demi-plan $P_{0, \varrho + \alpha_1}$, elle tend à zéro et (théor. I) l'intégrale (28) représente, pour ces valeurs de x, une fonction analytique régulière, qui est une solution effective de l'équation (1).

Si la partie positive de l'axe réel contient quelque racine de $a(-t)$, ou est une direction limite, on substituera à (28) l'expression

$$(28') \qquad \int_0^\infty \frac{\chi(\tau e^{i\mu})\, e^{-x\tau e^{i\mu}}\, e^{i\mu}\, d\tau}{\Sigma h_\nu e^{-\alpha_\nu \tau e^{i\mu}}}$$

où la demi-droite d'argument μ est choisie de façon à ne pas contenir des racines de $a(t)$ ni à être une direction limite, et l'on trouve, comme auparavant, que (28') représente dans le demi-plan $P_{-\mu, \varrho + R(\alpha_s)}$ une fonction analytique qui vérifie la (1); $\alpha_s \tau$ est ici celle des $\alpha_\nu \tau$ qui a la partie réelle minima.

On conclut que la solution formelle (28) de (1) donne toujours une solution effective.

14. Il s'agit maintenant de répondre à la deuxième question énoncée au début du No. 12: comment peut-on prolonger la fonction qu'on vient de trouver, en dehors du demi-plan où elle est représentée par la formule (28)? Considérons, à cet effet, un secteur circulaire borné par un arc de cercle de centre O et de rayon r très grand et par deux rayons d'arguments μ' et μ'': ces derniers étant pris de façon à n'être pas directions limites et à ne pas comprendre entre eux ni des directions limites, ni des racines de $a(-t)$.

L'intégrale de $\frac{\chi(t)e^{-xt}}{a(-t)}$ prise le long du contour de ce secteur sera nulle. Mais (No. 12, d) on peut rendre aussi petite que l'on veut la partie de cette intégrale prise le long de l'arc de cercle; il en résulte

$$\int_0^\infty \frac{\chi(\tau e^{i\mu'})e^{-x\tau e^{i\mu'}}e^{i\mu'}d\tau}{a(-\tau e^{i\mu'})} = \int_0^\infty \frac{\chi(\tau e^{i\mu''})e^{-x\tau e^{i\mu''}}e^{i\mu''}d\tau}{a(-\tau e^{i\mu''})};$$

or, la première de ces expressions donne une fonction analytique régulière dans le demi-plan $P_{-\mu'\varrho+R(\alpha_s)}$, la seconde dans le demi-plan $P_{-\mu'',\varrho+R(\alpha_s)}$; dans la partie commune aux deux demi-plans elles représentent donc la même fonction analytique et l'expression du second membre nous donne donc le prolongement analytique de la fonction représentée par le premier membre.

15. Si maintenant on intègre le long de deux rayons qui ne soient ni ne comprennent des directions limites, mais qui comprennent des racines de $a(-t)$, en nombre nécessairement fini, et que nous désignerons par $-\beta_h$ $(h=1, 2, \ldots k)$, l'intégrale prise le long du contour du secteur sera égale à la somme des intégrales

$$\int_{(-\beta_h)} \frac{\chi(t)e^{-xt}dt}{a(-t)}$$

prises le long de circonférences très petites entourant les racines $-\beta_h$. Ces intégrales, dans le cas de racines simples, sont de la forme $Ce^{\beta_h x}$; on omet la modification bien facile dans le cas des racines multiples. On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{\chi(\tau e^{i\mu'})e^{-x\tau e^{i\mu'}}e^{i\mu'}dt}{a(-\tau e^{i\mu'})} = \int_0^\infty \frac{\chi(\tau e^{i\mu''})e^{-x\tau e^{i\mu''}}e^{i\mu''}d\tau}{a(-\tau e^{i\mu''})} + \sum_{h=1}^{k} c_h e^{\beta_h x}; \tag{33}$$

mais, puisque les intégrales aux deux membres sont des solutions effectives de l'équation (1), le dernier terme résout l'équation

$$\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=0,$$

qui appartient à la forme (19). Ce résultat confirme ce qui a été dit à la fin du § 2.

16. Il faut remarquer le cas où $\chi(t)$ est divisible par $a(-t)$, c'est-à-dire où le quotient des deux fonctions est une fonction entière. En ce cas, la fonction analytique donnée par (28) peut se prolonger dans tout le domaine extérieur à un cercle de centre O et de rayon $\varrho + |\alpha_r|$, où $|\alpha_r|$ est le module maximum des α_ν; cette fonction admet par conséquent un développement en série

$$\sum \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

et satisfait à l'équation

$$\int_{(l)} A(y-x)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

où (l) est une ligne fermée, p. ex. une circonférence de centre O et de rayon $l > \varrho + |\alpha_r|$. Pour $x > R + l$, on aura le développement de $f(x)$ en une série (cfr. § 1) ordonnée selon les dérivées de $A(-x)$:

$$f(x) = \sum \frac{1}{n!} c_n A^{(n)}(-x).$$

17. On a supposé jusqu'ici que $a(t)$ ne s'annule pas pour $t=0$ (No. 12). Si cela était, $t=0$ serait une racine d'un ordre fini p, et tandis que l'expression (28) n'aurait plus de sens, l'expression

$$\varphi_p(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\,e^{-xt}\,t^p\,dt}{a(-t)}$$

aurait un sens déterminé dans les cas considérés ci-dessus, et donnerait une solution de l'équation

$$\Sigma h_\nu \varphi_p(x+\alpha_\nu) = f^{(p)}(x).$$

On peut donc prendre comme expression de $\varphi(x)$ l'intégrale indéfinie $p^{\text{ème}}$ de $\varphi_p(x)$, en déterminant d'une façon convenable les constantes arbitraires.

§ 6. Transcendantes auxquelles amène la solution qu'on vient d'obtenir.

18. L'équation (1), où $f(x)$ est régulière à l'extérieur d'un cercle de centre O et de rayon ϱ, admet donc comme solution l'expression (28), où l'intégration est prise le long d'une demi-droite d'argument μ qui ne passe par aucune racine

de $a(-t)$ et ne soit pas une direction limite pour $a(-t)$. Si $t=0$ est racine de $a(-t)$, on se rapportera à la remarque du No. 17. La solution trouvée peut être prolongée analytiquement comme on l'a dit au No. 14.

Si l'on suppose que $1: a(-t)$ soit développable en une série d'exponentielles

$$1: a(-t)=\Sigma c_n e^{-\beta_n t},$$

on aura en substituant dans (28) et en admettant l'intégration terme à terme;

$$\varphi(x)=\Sigma c_n f(x+\beta_n). \tag{35}$$

Quand le développement formel ainsi trouvé pour $\varphi(x)$ a un sens, on obtient la solution de l'équation (1) sous une forme remarquable, aussi à cause de la réciprocité qui se manifeste entre (1) et (35).

19. Prenons la fonction $a(t)$ sous la forme

$$a(t)=(1-h_1 e^{\alpha_1 t})(1-h_2 e^{\alpha_2 t})\cdots(1-h_m e^{\alpha_m t}). \tag{36}$$

En ce cas, les solutions des équations (1) correspondantes admettent des développements de la forme (35). Ces développements vont nous amener à une classe remarquable de fonctions, où sont comprises certaines transcendantes rencontrées par M. Appell d'une façon différente[1] et qui donnent une intéressante généralisation des fonctions Euleriennes.

On supposera positives toutes les $R(\alpha_\nu)$; on supposera en outre qu'aucune des racines de $a(t)$ ne soit sur l'axe réel. Il serait facile de renoncer en tout ou en partie à ces restrictions, que nous gardons pour simplifier et parceque le cas auquel elles se rapportent suffit à donner ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie que nous voulons esquisser.

L'expression (28) prend la forme, dans le cas actuel:

$$\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, dt}{\Pi(1-h_\nu e^{-\alpha_\nu t})}; \tag{37}$$

$\chi(t)$ est une fonction entière, comme au No. 11, et par le No. 12, on peut indiquer un nombre M tel que pour tout x dont la partie réelle est $\geq \varrho_1 > \varrho$, on ait

$$\int_0^\infty |\chi(t)\, e^{-xt}|\, dt < M, \text{ et même } \int_0^\infty |\chi(t)\, e^{-xt}|\, t^m\, dt < M. \tag{38}$$

---

[1] Math. Annalen, T. XIX.

20. Ceci posé, distinguons plusieurs cas.

I^er^ cas. Les $|h_\nu|$ soient tous plus petits que l'unité. La condition

$$|h_\nu e^{-\alpha_\nu t}| < 1$$

est satisfaite pour t réel et tel que l'on ait

$$t > \frac{1}{R(\alpha_\nu)} \log |h_\nu|,$$

et par suite, puisque l'on a $|h_\nu| < 1$, d'une valeur négative de t jusqu'à $+\infty$. Il en résulte que l'on peut développer

$$\frac{1}{1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t}}$$

en série $\Sigma h_\nu^n e^{-n\alpha_\nu t}$ convergente absolument et uniformément pour toute valeur de t de zéro à $+\infty$, y compris $t=0$. Il en est de même pour le produit de ces séries relatives aux diverses valeurs de ν, et en indiquant par $\Sigma C_n e^{-\beta_n t}$ la série produit et en substituant dans (37), on pourra intégrer terme à terme. En effet, ε étant positif et arbitrairement petit, on peut déterminer un indice m tel que pour $n \geq m$ le reste de la série précédente soit plus petit que ε pour toute valeur de t, de zéro (inclus) à $+\infty$; m étant fixé, on a

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \chi(t) e^{-xt} \sum_0^m C_n e^{-\beta_n t} dt + \int_0^\infty \chi(t) e^{-xt} \sum_{m+1}^\infty C_n e^{-\beta_n t} dt,$$

d'où, d'après (38) et en exécutant l'intégration dans la première intégrale

$$\left| \varphi(x) - \sum_0^m C_n f(x+\beta_n) \right| < \varepsilon M.$$

Cette inégalité démontre que la série $\sum_0^\infty C_n f(x+\beta_n)$ est convergente et admet $\varphi(x)$ pour somme; la série (35) a donc, dans le cas présent, un sens effectif.

21. Quant à la formation de la série qu'on vient de trouver, on a

$$\Sigma C_n e^{-\beta_n t} = \frac{1}{\Pi(1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t})} = \Sigma h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \cdots h_m^{\lambda_m} e^{-(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots \lambda_m\alpha_m)t}$$

où la somme s'étend à tous les systèmes de valeurs entières, positives ou nulles, de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, et il s'ensuit

$$(39) \qquad \varphi(x) = \Sigma h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \cdots h_m^{\lambda_m} f(x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m).$$

Comme fonction des $m+1$ variables x et $h_1, h_2, \ldots h_m$, celle-ci est régulière pour toutes les valeurs des h_ν inférieures en module à l'unité, et pour x tel que $R(x) > \varrho$.

En particulier, si l'on fait $\chi(t) = 1$, on a la formule

$$(40) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{\Pi(1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t})} = \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_m = 0}^{\infty} \frac{h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \cdots h_m^{\lambda_m}}{x + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m}.$$

Les deux membres représentent la même fonction analytique, mais le second est valable dans un champ plus étendu: le premier pour $R(x) > 0$, tandis que le second l'est pour toutes les valeurs de x, sauf celles comprises dans la formule

$$-(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m)$$

pour les valeurs entières positives ou nulles des λ. Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) - \Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu) + \Sigma h_\mu h_\nu \varphi(x + \alpha_\mu + \alpha_\nu) - \cdots \pm h_1 h_2 \cdots h_m \varphi(x + \alpha_1 + \cdots + a_m) = \frac{1}{x}.$$

Dans le cas particulier d'un seul binôme, l'équation se réduit à

$$(41) \qquad \varphi(x) - h\,\varphi(x+\alpha) = \frac{1}{x}$$

dont la solution, donnée pour $|h| < 1$ par

$$(42) \qquad \int^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{1 - h e^{-\alpha t}} = \sum \frac{h^n}{x + n\alpha},$$

qui n'est autre que la série hypergéométrique $\frac{1}{x} F\left(\frac{x}{\alpha}, 1, \frac{x}{\alpha} + 1; h\right)$.

22. *II*$^{\text{ème}}$ *cas.* Si l'on considère le cas où certaines des h_ν ont leur module supérieur à l'unité, sans toutefois que les racines des binômes $1 - h_\nu e^{-\alpha_\nu t}$ soient sur la ligne d'intégration, les séries étudiées au No. 20 ne sont plus convergentes

et, par suite, on ne peut établir la formule (39). Tandis que $\varphi(x)$ admet encore l'expression sous forme d'intégrale définie, on perd le développement en série; la fonction conserve d'ailleurs ses autres propriétés; ainsi, dans le cas le plus simple, celui de l'équation (41), la série au second membre est divergente, mais l'intégrale au premier membre de (42) donne une fonction analytique qui vérifie l'équation (41) et l'équation différentielle des fonctions hypergéométriques.

23. *III*^ème^ *cas.* En laissant de côté le cas où certaines des h_ν sont plus petites et les autres égales en module à l'unité, nous traiterons celui où toutes les h_ν se réduisent à l'unité; ce cas nous aménera à la généralisation des fonctions Euleriennes dont on a parlé plus haut.[1]

Soit donc

$$a(-t)=\prod_{\nu=1}^{m}(1-e^{-\alpha_\nu t}),$$

où tous les α_ν ont leur partie réelle positive. En ce cas, l'expression (37) n'a pas de sens puisque la fonction sous le signe est infinie d'ordre m pour $t=0$; l'expression

$$(-1)^m\,\varphi^{(m)}(x)=\int_0^\infty\frac{\chi(t)\,e^{-xt}\,t^m\,dt}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})} \tag{43}$$

a cependant un sens, et la condition qu'il n'y ait pas d'autres racines de $a(t)$ sur l'axe réel est vérifiée d'elle même.

24. Démontrons qu'il est possible de remplacer l'expression intégrale (43) par une série analogue à celle du premier cas. Dans ce but, commençons par démontrer le lemme suivant.

»La valeur de (43) tend à zéro si la partie réelle de x tend à $+\infty$.»[2]

25. Cela posé, en indiquant par μ_ν des nombres entiers positifs quelconques, le produit $\Pi(1-e^{-\mu_\nu\alpha_\nu t})$ est divisible par $\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})$, et l'on a l'identité:

$$\frac{1}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})}=\sum_{\lambda_\nu=0}^{\mu_\nu-1}e^{-(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m)}+\frac{e^{-\mu_1\alpha_1 t}+e^{-\mu_2\alpha_2 t}+\cdots\pm e^{-(\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_m\alpha_m)t}}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})}$$

---

[1] Cfr. ma note dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (T. CXI, 23 janvier 1888).

[2] On a supprimé, dans cette traduction, la démonstration du Lemme qui n'offre pas de difficultés. (*t*)

où, sous le signe Σ, l'indice λ_n peut prendre, indépendamment des autres, toutes les valeurs entières positives de o à $\mu_\nu - 1$. Si l'on multiplie les deux membres par $\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m\, dt$ et l'on intègre entre o et ∞:

1:o) le premier membre donne $(-1)^m \varphi_m(x)$;

2:o) le premier terme du second membre donne

$$(-1)^m \sum_{\lambda_\nu=0}^{\mu_\nu-1} f^{(m)}(x+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m);$$

3:o) le second terme du second membre donne un nombre fini de termes (2^m-1), de la forme

$$\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-(x+p)t}\, t^m\, dt}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})},$$

où p est une quantité de la forme $\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots$, dont la partie réelle est positive: si celle-ci est assez grande, on sait par le lemme du No. 24 que la valeur absolue est aussi petite que l'on voudra: si donc σ est un nombre positif arbitrairement petit, on pourra prendre les entiers μ_ν assez grands pour que chacune des intégrales précédentes soit plus petite que $\frac{\sigma}{2^m-1}$, d'où

$$\left|\varphi^{(m)}(x) - \sum_{\lambda_\nu=0}^{\mu_\nu-1} f^{(m)}(x+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m)\right| < \sigma;$$

on a ainsi démontré que, pour $R(x)>\varrho$, on a

$$(-1)^m \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, e^{-xt}\, t^m\, dt}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})} = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots=0}^{\infty} f^{(m)}(x+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m). \tag{44}$$

Le raisonnement précédent démontre aussi la convergence absolue de la série, puisqu'on peut remplacer $\chi(t)$ par la même série où les coefficients sont remplacés par leurs modules.

26. Si l'on fait $\chi(t)=1$, la formule précédente donne

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\, t^m\, dt}{\Pi(1-e^{-\alpha_\nu t})} = m! \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m)^{m+1}}, \tag{45}$$

où la convergence du second membre est démontrée, pour $R(x)>0$, d'après le No. précédent.

§ 7. Démonstration directe de la convergence de la série précédente. Aperçu sur les propriétés de la fonction qu'elle représente.

27. La série au second membre de (45) a une importance particulière, en sorte qu'il convient d'en démontrer directement la convergence, non seulement pour $R(x)>0$, mais encore pour toutes les valeurs de x qui n'appartiennent pas à l'ensemble

$$w=-(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m), \tag{46}$$

les α_m ayant la partie réelle positive, et les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ étant des entiers positifs ou nuls.

En général, la série

$$\sum\frac{1}{(x+w)^k} \tag{47}$$

converge en même temps que la série

$$\sum{}'\frac{1}{w^k},\ [1] \tag{48}$$

comme le montre le rapport des termes correspondants; or l'on a évidemment

$$|w|\geq R(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m)$$

ou, si l'on pose $R(\alpha_\nu)=\gamma_\nu$,

$$|w|\geq\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\cdots+\lambda_m\gamma_m.$$

Soit γ_1 la plus petite des γ_ν, et un au moins des λ_ν soit égal à l, et l'on aura

$$|w|>l\gamma_1. \tag{49}$$

Cela posé, groupons les termes de la série (48) de la façon suivante: on prend d'abord les w où tous les λ ont la valeur 1, puis le groupe des w où l'un des indices λ au moins est égal à 2, pendant que les autres sont égaux à 1, et ce groupe contient 2^m-1 termes; puis le groupe où l'un des indices au moins est égal à 3, tandis que les autres sont égaux à 1 ou 2: ce groupe contient

[1] Le signe Σ' indique que l'on exclut le système des λ tous nuls. La démonstration qui suit est, avec quelques changements, la généralisation de celle qui sert, pour $m=2$, à démontrer la convergence des séries qui servent au développement des fonctions elliptiques suivant la méthode de Weierstrass. (V. p. ex. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques,* T. I, p. 358).

3^m-2^m termes, ...; en général, le groupe où l'un au moins des indices est égal à n, tandis que les autres sont égaux à $1, 2, 3, \ldots$ ou $n-1$, groupe qui contient $n^m-(n-1)^m$ termes. Mais on a, d'après (49), pour un terme de ce groupe:

$$\frac{1}{|w^k|}<\frac{1}{n^k\gamma_1^k},$$

en sorte que pour tout le groupe la somme des modules des termes correspondants de (48) sera plus petite que

$$\frac{1}{\gamma_1^k}\cdot\frac{n^m-(n-1)^m}{n^k},$$

ou en développant,

$$\frac{1}{\gamma_1^k}\left\{\frac{m}{n^{k-m+1}}-\frac{\binom{m}{2}}{n^{k-m+2}}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{n^k}\right\}.$$

Or il est clair que les groupes formés comme on vient de le dire épuisent tous les w, excepté ceux où l'un des indices est nul; en indiquant par Σ'' la somme faite avec cette restriction, on aura:

$$\sum{}''\frac{1}{|w^k|}<\frac{1}{\gamma_1^k}\left\{m\sum_1^\infty\frac{1}{n^{k-m+1}}-\binom{m}{2}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{k-m+2}}+\cdots+(-1)^m\sum_1^\infty\frac{1}{n^k}\right\}.$$

Au second membre on a un nombre fini de séries absolument convergentes si l'exposant au dénominateur est >1; la condition de convergence de la série précédente est donc

$$k>m, \tag{50}$$

et si k doit être entier,

$$k\geq m+1. \tag{50'}$$

Dans la série Σ'' manquent les termes où l'un des indices est nul: mais il est clair que ces termes donnent un nombre fini de séries analogues à Σ'', mais avec moins de m indices, et qui convergent donc à fortiori pour $k>m$; les (50), (50') sont donc les conditions de convergence absolue des séries

$$\sum{}'\frac{1}{w^k} \text{ et } \sum{}'\frac{1}{(x+w)^k}.$$

28. Si l'on pose

$$(51)\quad (-1)^m\, m! \sum \frac{1}{(x+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m)^{m+1}} = \psi^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m)$$

la fonction ainsi définie est uniforme, régulière dans tout le plan, sauf l'ensemble des points w, et vérifie l'équation (1) dont la forme est actuellement

$$(52)\quad \begin{aligned} &\psi^{(m)}(x)-\psi^{(m)}(x+\alpha_1)-\psi^{(m)}(x+\alpha_2)-\cdots-\psi^{(m)}(x+\alpha_m)+ \\ &+\psi^{(m)}(x+\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+(-1)^m\psi^{(m)}(x+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)=\frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}; \end{aligned}$$

en outre on déduit, de (45), la relation

$$(53)\quad \psi^{(m)}(x;\alpha_2,\ldots\alpha_m)=\psi^{(m)}(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m)-\psi^{(m)}(x+\alpha_1;\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m)$$

entre $\psi^{(m)}(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ et $\psi^{(m)}(x;\alpha_2,\ldots)$.

29. D'une façon analogue, si l'on pose pour k entier et plus grand que m

$$(54)\quad \psi^{(k)}(x)=(-1)^k\, k! \sum \frac{1}{(x+w)^{k+1}},$$

les fonctions $\psi^{(k)}$ jouissent des propriétés exprimées par les équations (52) et (53); elles peuvent être regardées comme les dérivées successives d'une même fonction: ces dérivées admettent un développement en séries convergentes de la forme (47) pour les seuls indices non inférieurs à m. Ces fonctions généralisent évidemment la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, dérivée logarithmique de la fonction eulérienne $\Gamma(x)$:[1] dans ce cas, les séries (47) existent à partir de la dérivée première de $\Psi(x)$, pour laquelle on sait que

$$\Psi'(x)=\sum \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Pour $m=2$ la première série convergente de la forme (47) est

$$\psi''(x;\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{\lambda_1,\lambda_2} \frac{1}{(x+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)^3};$$

[1] Gauss, Werke, Bd. III, p. 201.

c'est la derivée seconde logarithmique de la fonction O de Heine[1], dont les termes forment partie de la série qui donne la fonction $\wp'(x)$ dans la théorie des fonctions elliptiques selon Weierstrass.[2]

30. Si l'on intègre terme à terme la série (51), on obtient une série divergente; mais si on soustrait à chaque terme la constante $\frac{1}{w^m}$ correspondante, il est facile de voir qu'on rétablit la convergence; on ne fait ainsi qu'appliquer le procédé bien connu du théorème de M. Mittag-Leffler. En intégrant successivement, et en appliquant à chaque intégration le procédé du théorème de M. Mittag-Leffler, on arrive enfin à une série convergente, de la forme

$$\psi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)=\sum\left(\frac{1}{x+w}-r_w(x)\right),$$

où $r_w(x)$ est une fonction entière rationnelle de x, du degré $m-1$. L'on obtient ainsi une fonction qui jouit des propriétés exprimées par les équations

$$(52)' \qquad \psi(x)-\psi(x+\alpha_1)-\psi(x+\alpha_2)-\cdots+\psi(x+\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+ \\ +(-1)^m\psi(x+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)=\frac{1}{x}$$

et

$$(53)' \qquad \psi(x+\alpha_1; \alpha_1\,\alpha_2, \ldots \alpha_m)=\psi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)-\psi(x; \alpha_2, \ldots \alpha_m),$$

qui, à part une légère différence de forme, n'est autre que la dérivée logarithmique de la fonction $O(x)$ de M. Appell.[3] Dans le travail de cet auteur, c'est la relation $(53)'$[4] qui a le caractère fondamental.

Remarquons enfin que si, dans la formule (54) on regarde comme variables non seulement $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, mais encore k, on obtient, par rapport à cette variable, une classe de fonctions dont le premier exemple est la fonction bien connue que Riemann a indiquée par $\zeta(x)$ et qu'il a appliquée à la théorie des nombres premiers.

---

[1] Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. I, p. 109.

[2] V. p. ex. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, T. I, p. 309.

[3] Mathem. Annalen, T. XIX, p. 84.

[4] La formule correspondante porte, dans le travail cité, le No. (4), à la page 85.

On peut remarquer qu'en même temps que l'équation (1), se trouvent résolues par la même méthode des équations analogues. Telle est, par exemple, l'équation, apparement plus générale

$$(55) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} \left\{ h_{\nu,0}\, \varphi(x+a_\nu) + h_{\nu,1}\, \varphi'(x+\alpha_\nu) + \cdots + \frac{h_{\nu,r_\nu}}{r_\nu!}\, \varphi^{(r_\nu)}(x+\alpha_\nu) \right\} = f(x),$$

pour laquelle la fonction caractéristique $A(z)$ a la forme

$$A(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{h_{\nu,0}}{z-\alpha_\nu} + \cdots + \frac{h_{\nu,r_\nu}}{(z-\alpha_\nu)^{r_\nu+1}} \right).$$

Toutes les formules de résolution données pour (1) s'appliquent à l'équation (55) avec les mêmes considérations, et la fonction indiquée par $a(t)$ est ici

$$\sum_{\nu=1}^{m} \left(h_{\nu,0} + h_{\nu,1}\, t + \cdots + \frac{h_{\nu,r_\nu}\, t^{r_\nu}}{r_\nu!} \right) e^{\alpha_\nu t}.$$