EINIGE EINDEUTIGKEITSSÄTZE IN DER THEORIE DER MEROMORPHEN FUNKTIONEN.

VON

ROLF NEVANLINNA

in HELSINGFORS.

Einleitung.

Aus neueren Untersuchungen über die Wertverteilung analytischer Funktionen, welche in der Umgebung einer isolierten, wesentlich singulären Stelle $x=x_0$ eindeutig und meromorph sind, ist hervorgegangen, dass die asymptotischen Eigenschaften einer derartigen Funktion $f(x)$ mit erheblicher Genauigkeit bestimmt sind, wenn die Verteilungen *dreierlei* Stellen der Funktion in der Umgebung des singulären Punktes bekannt sind; so führt z. B. die Angabe der Dichtigkeiten, mit welchen die Wurzeln der Gleichung $f(x)=z$ für drei verschiedene Werte z in der Umgebung von x_0 auftreten, zu ziemlich scharfen Aussagen über die Wurzeldichtigkeit für sämtliche übrigen Werte z. Andererseits zeigt eine einfache Betrachtung, dass die Wurzeln für drei Werte z noch nicht genügen um die bebetreffende Funktion *eindeutig* zu bestimmen; man kann Fälle angeben, wo sogar unendlich viele verschiedene Funktionen existieren, welche dreierlei Stellen gemeinsam haben. Was lässt sich nun allgemein über zwei analytische Funktionen aussagen, welche in der Umgebung einer singulären Stelle mehrere Werte z in genau denselben Punkten annehmen?[1] In der vorliegenden Arbeit werden einige Beiträge zu dieser Frage gegeben.

[1] Diese Ausdrucksweise benutzen wir im folgenden auch dann, wenn die Funktionen den betreffenden Wert z überhaupt nicht annehmen, was nach dem Picardschen Satz höchstens für *zwei* Werte z möglich ist.

Im ersten Paragraphen wird ein allgemeiner Satz über die gemeinsamen Stellen meromorpher Funktionen bewiesen. Als Korollar dieses Satzes ergibt sich u. a., dass zwei meromorphe Funktionen, welche *fünf* verschiedene Werte z in denselben Punkten annehmen, notwendigerweise identisch sind. Im speziellen Fall ganzer Funktionen von endlichem Geschlecht (einer der fünf Werte ist dann unendlich) wurde dieser Satz früher von Herrn PÓLYA[1] gefunden, allerdings unter der einschränkenden Annahme, dass die gemeinsamen Stellen auch mit gleichen Multiplizitäten auftreten. Herr PÓLYA leitete dieses Ergebnis als unmittelbares Korollar aus einem präzieseren Satz ab: er zeigte, dass eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht schon durch ihre z-Stellen für *drei endliche* Werte z eindeutig bestimmt ist, ausser in einem ganz besonderen Ausnahmefall (hierbei werden auch die Multiplizitäten der genannten Stellen berücksichtigt). Als Verallgemeinerung dieses Ergebnisses beweisen wir im zweiten Paragraphen, dass zwei in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes meromorphe Funktionen, welche für *vier* Werte z gemeinsame z-Stellen (von denselben Multiplizitäten) haben, notwendig identisch sind, ausser wieder in einem besonderen Ausnahmefall. Im dritten Paragraphen geben wir schliesslich einige Sätze über meromorphe Funktionen, welche in der Umgebung eines singulären Punktes *drei* verschiedene Werte in denselben Punkten annehmen.

Im folgenden werden wir von einigen Sätzen Gebrauch machen, welche wir in der Arbeit »*Zur Theorie der meromorphen Funktionen*» (Acta mathematica, B. 46, 1925) gegeben haben. Wenn $f(x)$ eine in der Umgebung $|x| \geqq r_0$ des unendlich fernen Punktes eindeutige und meromorphe Funktion ist, so setze man:

$$m(r, f) \equiv m(r; \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(r e^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

$$N(r, f) \equiv N(r; \infty) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t; \infty)}{t} \, dt,$$

wo $n(r; \infty)$ die Anzahl der im Kreisring $r_0 \leqq |x| < r$ gelegenen, ihrer Multiplizität gemäss gezählten Pole von $f(x)$ bezeichnet, und weiter für ein endliches z:

[1] G. PÓLYA: *Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen* (Matematisk Tidsskrift B, København 1921, p. 16—21).

$$m\left(r, \frac{1}{f-z}\right)=m(r; z), \; N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)=N(r; z).$$

Es gelten nun nachstehende Sätze:

I. (*Erster Hauptsatz*). — *Zu jeder nichtkonstanten Funktion $f(x)$, die in der Umgebung des unendlich fernen Punktes eindeutig und meromorph ist, gehört eine bis auf eine additive Grösse $O(\log r)$ wohlbestimmte, von einem gewissen Wert r ab wachsende Funktion $T(r, f)$ derart, dass eine Beziehung der Form*

$$\text{(I)} \qquad m(r; z)+N(r; z)=T(r, f)+O(\log r)$$

für jedes endliche oder unendliche z besteht.

Wenn der Unendlichkeitspunkt eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $f(x)$ ist, so gilt

$$\text{(I)}' \qquad \lim_{r=\infty} \frac{T(r, f)}{\log r}=\infty.$$

II. (*Zweiter Hauptsatz*). — Wenn $z_1, z_2, \ldots, z_q \, (q \geqq 3)$ *unter einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen bezeichnen, so ist*

$$\text{(II)} \qquad (q-2)\, T(r, f) < \sum_1^q N(r; z_\nu) - N'(r, f) + O(\log T(r, f)) + O(\log r),$$

ausser möglicherweise, im Falle unendlicher Ordnungen, für eine Wertmenge r von endlichem Gesamtmass. Hierbei ist

$$N'(r, f)=\int_{r_0}^{r} \frac{n'(t)}{t}\, dt,$$

wo $n'(r)$ die Anzahl der mehrfachen Stellen von $f(x)$ im Kreisring $r_0 \leqq |x| < r$ angibt, doch so, dass jede m-fache Stelle nur $(m-1)$-mal gezählt wird.

Bezeichnet man insbesondere mit $\bar{n}(r; z) \equiv \bar{n}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)$ die Anzahl der *einfach gezählten* z-Stellen von $f(x)$ im Kreisring $r_0 \leqq |x| < r$ und setzt man weiter

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right) \equiv \bar{N}(r; z) = \int_{r_0}^{r} \frac{\bar{n}(t; z)}{t}\, dt,$$

so folgt aus (II) die speziellere Ungleichung

$$(\mathrm{II})' \qquad (q-2)\,T(r,f) < \sum_{1}^{q} \overline{N}(r;\, z_\nu) + O(\log T(r,f)) + O(\log r).$$

III. — *Die logarithmische Ableitung einer in der Umgebung des unendlich fernen Punktes meromorphen Funktion $f(x)$ genügt der Bedingung*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < O(\log T(r,f)) + O(\log r),$$

ausser möglicherweise, im Falle einer Funktion von unendlicher Ordnung, für eine Wertmenge r von endlichem Mass.

§ 1.

Ein allgemeiner Satz über die gemeinsamen Stellen analytischer Funktionen und einige Anwendungen desselben.

1. Im folgenden betrachten wir zwei verschiedene, für $r_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutige und meromorphe Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die in dem unendlich fernen Punkt eine wesentliche Singularität haben. Neben den in der Einleitung besprochenen Hilfsgrössen ist es zweckmässig, noch folgende Bezeichnungen einzuführen.

Es bezeichne $n_0(r;\infty)$ die Anzahl der *gemeinsamen* Pole, $n_1(r;\infty)$ und $n_2(r;\infty)$ die Anzahl der *übrigen* Pole von $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ im Kreisring $r_0 \leqq |x| < r$; jeder Pol soll hierbei *einfach* gezählt werden, so dass also (vgl. S. 369)

$$\overline{n}(r, f_\nu) = n_0(r;\, \infty) + n_\nu(r;\, \infty) \qquad (\nu = 1, 2).$$

Ferner sei

$$N_\nu(r;\, \infty) = \int_{r_0}^{r} \frac{n_\nu(t;\, \infty)}{t}\, dt \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

so dass

$$\overline{N}(r, f_\nu) = N_0(r;\, \infty) + N_\nu(r;\, \infty) \qquad (\nu = 1, 2).$$

In analoger Weise sollen, für ein *endliches* z, die Grössen

$$n_\nu(r;\, z),\ N_\nu(r;\, z) \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

mittels der Pole der Funktionen $\frac{1}{f_1 - z}$ und $\frac{1}{f_2 - z}$ erklärt werden.

Aus den in der Einleitung erwähnten Hauptsätzen I und II werden wir nun nachstehenden Satz herleiten:

Satz 1. — *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_q$ unter einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen und $f_1(x), f_2(x)$ zwei in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes meromorphe Funktionen, die nicht identisch sind. Dann gilt die Ungleichung*

$$(1) \qquad (q-4)\,(T(r,f_1)+T(r,f_2)) < \sum_1^q (N_1(r;z_\nu)+N_2(r;z_\nu)) + O(\log T(r,f_1)) + O\log T(r,f_2)) + O(\log r),$$

ausser möglicherweise, wenn eine der Funktionen f_1, f_2 von unendlicher Ordnung ist, für eine Wertmenge r von endlichem Mass.

Beweis. — Wir nehmen zunächst die Werte z_ν $(\nu=1, 2, \ldots, q)$ sämtlich endlich an. Gemäss dem Hauptsatz II ist dann

$$(q-2)\,T(r,f_\nu) < \sum_{\mu=1}^q \overline{N}\left(r,\frac{1}{f_\nu - z_\mu}\right) + O(\log T(r,f_\nu)) + O(\log r) \qquad (\nu=1,\,2)$$

ausser in einer Intervallfolge I der r-Achse von entlichem Gesamtmass. Setzt man hier $\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_\nu - z}\right) = N_0(r;z) + N_\nu(r;z)$, so ergibt sich durch Addition

$$(1)' \qquad (q-2)\,(T(r,f_1)+T(r,f_2)) < 2\sum_1^q N_0(r;z_\nu) + \sum_1^q (N_1(r;z_\nu)+N_2(r;z_\nu)) + O(\log T(r,f_1)) + O(\log T(r,f_2)) + O(\log r),$$

ausser möglicherweise innerhalb I.

In jeder gemeinsamen z_ν-Stelle der Funktionen f_1 und f_2 wird offenbar die Funktion $\frac{1}{f_1-f_2}$ unendlich und man findet also, wenn man den Hauptsatz I auf die Funktion f_1-f_2 anwendet, dass

$$(1)'' \qquad \sum_1^q N_0(r;z_\nu) \leqq N\left(r,\frac{1}{f_1-f_2}\right) < T(r,f_1-f_2) + O(\log r).$$

Weiter ist $\overset{+}{\log}\,|f_1-f_2| \leqq \overset{+}{\log}\,(|f_1|+|f_2|) \leqq \overset{+}{\log}\,|f_1| + \overset{+}{\log}\,|f_2| + \log 2$, also

$$m(r, f_1-f_2) \leqq m(r, f_1)+m(r, f_2)+\log 2,$$

und, da jeder Pol von (f_1-f_2) in den Polen von entweder f_1 oder f_2 enthalten ist,

$$N(r, f_1-f_2) \leqq N(r, f_1)+N(r, f_2).$$

Durch Addition der letzten Ungleichungen erhält man unter Beachtung des ersten Hauptsatzes

$$(1)''' \qquad T(r, f_1-f_2) < T(r, f_1)+T(r, f_2)+O(\log r).$$

Die zu beweisende Ungleichung (1) folgt nunmehr durch Zusammenfassung der drei Beziehungen (1)′, (1)″ und (1)‴. Unser Satz ist damit für den Fall nachgewiesen, dass sämtliche Zahlen z_ν endlich sind. Ist dagegen eine dieser Zahlen unendlich, so ergibt sich die Beziehung (1), wenn man die obige Überlegung auf die Funktionen $\frac{1}{f_1-a}$ und $\frac{1}{f_2-a}$ $(a \neq z_\nu, \nu=1, \ldots, q)$ anwendet und bemerkt, dass die Fundamentalgrösse T nach dem ersten Hauptsatz gegenüber einer Inversion (von einem additiven Glied $O(\log T)$ abgesehen) invariant bleibt.

2. Als erste Anwendung des Satzes 1 beweisen wir den

Satz 2. — *Wenn die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der Umgebung des wesentlich singulären Unendlichkeitspunktes eindeutig und meromorph sind und wenn, für fünf verschiedene Werte z, die Gleichungen*

$$(2) \qquad f_1(x)=z, \quad f_2(x)=z$$

in denselben Punkten x erfüllt sind, so sind die gegebenen Funktionen unter einander identisch.

Die Annahme, dass die Differenz f_1-f_2 nicht identisch verschwinde, führt in der Tat zu einem unmittelbaren Widerspruch. Sind nämlich $z_1, \ldots, z_5$ die in dem Satze genannten fünf Werte, so ist nach Voraussetzung $N_1(r; z_\nu)=N_2(r; z_\nu)\equiv 0$ $(\nu=1, \ldots, 5)$. Nach Ungleichung (1) wäre also für $q=5$

$$T(r, f_1)+T(r, f_2) < O(\log T(r, f_1))+O(\log T(r, f_2))+O(\log r)$$

ausser höchstens für eine Wertmenge r von endlichem Mass. Hiernach wären die Ausdrücke

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f_\nu)}{\log r} \qquad (\nu=1, 2) \qquad \text{endlich,}$$

was nach dem ersten Hauptsatz (vgl (I)') nur dann möglich ist, wenn die Funktionen f_1 und f_2, im Widerspruch zu der Voraussetzung, in dem unendlich fernen Punkt von rationalem Charakter wären.

Wenn die Anzahl der Werte z, für welche die Gleichungen (2) gleichzeitig befriedigt sind, *vier* beträgt, so kann man nicht mehr allgemein auf die Identität der betreffenden meromorphen Funktionen schliessen. So haben z. B. die Funktionen e^x und e^{-x} gemeinsame Stellen für die vier Werte $z=1, -1, 0$ und ∞. Die Ungleichung (1) gestattet uns indessen auch in bezug auf derartige Funktionen gewisse Schlüsse zu ziehen; es gilt nämlich folgender Satz, der bedeutend schärfer als der obige Satz 2 ist und diesen als unmittelbares Korollar enthält:

Satz 3. — *Wenn die Gleichungen* (2) *für vier Werte* $z=z_\nu$ $(\nu=1, 2, 3, 4)$ *in denselben Punkten* x *erfüllt sind, so ist*

$$(3) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{\sum_1^4 \overline{N}(r;\, z_\nu)}{T(r, f_\mu)} = 2 \quad (\mu=1, 2), \quad \lim_{r=\infty} \frac{T(r, f_1)}{T(r, f_2)} = 1,$$

und weiter

$$(4) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{N_0(r;\, z)}{T(r, f_\mu)} = 0, \quad \lim_{r=\infty} \frac{N_\mu(r;\, z)}{T(r, f_\mu)} = 1 \qquad (\mu=1, 2)$$

für jedes $z \neq z_\nu$ $(\nu=1, \ldots, 4)$.

Hierbei hat man, im Falle unendlicher Ordnungen, zunächst eine eventuelle Wertmenge r von endlichem Mass auszuschliessen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können die vier Werte z_ν endlich angenommen werden. Zum Beweise bemerke man zunächst, dass nach dem Hauptsatz II (für $q=4$)

$$(3)' \qquad T(r, f_\mu) < \frac{1}{2} \sum_1^4 \overline{N}(r;\, z_\nu) + O(\log T(r, f_\mu)) + O(\log r) \qquad (\mu=1, 2)$$

ausserhalb der eventuellen Ausnahmeintervalle I von endlicher Gesamtlänge.[1] Andererseits folgt aus den Ungleichungen (1)' und (1)''' für $q=4$, wenn man bemerkt, dass nach der Voraussetzung $\overline{N}(r;\, z_\nu) = N_0(r;\, z_\nu)$ $(\nu=1, \ldots, 4)$, dass

[1] In der folgenden Überlegung denken wir uns diese Intervalle ausgeschlossen.

$$\sum_{1}^{4} \overline{N}(r;\, z_\nu) < T(r, f_1) + T(r, f_2) + O(\log r).$$

Durch Verbindung dieser Ungleichungen ergibt sich die ausserhalb I gültige Beziehung

$$(3)'' \quad T(r, f_1) + T(r, f_2) = \sum_{1}^{4} \overline{N}(r;\, z_\nu) + O(\log T(r, f_1)) + O(\log T(r, f_2)) + O(\log r),$$

oder also

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f_1) + T(r, f_2)}{\sum_{1}^{4} \overline{N}(r;\, z_\nu)} = 1.$$

Beachtet man noch, dass nach $(3)'$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f_\mu)}{\sum \overline{N}(r;\, z_\nu)} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\mu = 1,\, 2),$$

so erhält man die Gleichheiten (3).

Um die Beziehungen (4) herzuleiten, machen wir von der Ungleichung (1) Gebrauch, indem wir $q = 5$ und $z = z_5$ setzen. Wir finden so:

$$T(r, f_1) + T(r, f_2) < N_1(r;\, z) + N_2(r;\, z) + O(\log T(r, f_1)) + O(\log T(r, f_2)) + O(\log r).$$

Andererseits ist nach Hauptsatz I

$$N_\mu(r;\, z) + N_0(r;\, z) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_\mu - z}\right) < T(r, f_\mu) + O(\log r) \qquad (\mu = 1,\, 2),$$

und man schliesst also, dass

$$(4)' \quad \begin{aligned} N_0(r;\, z) &= O(\log T(r, f_1)) + O(\log T(r, f_2)) + O(\log r), \\ N_\mu(r;\, z) &= T(r, f_\mu) + O(\log T(r, f_1)) + O(\log T(r, f_2)) + O(\log r) \qquad (\mu = 1,\, 2), \end{aligned}$$

woraus die Richtigkeit der Gleichungen (4) hervorgeht.

Wenn f_1 und f_2 insbesondere von *endlicher* Ordnung sind, d. h. wenn die oberen Grenzen

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f_\mu)}{\log r}$$

endlich sind[1], so ist, nach der ersten der Beziehungen (4)',

$$N_0(r;\, z) = O(\log r)$$

für jedes $z \neq z_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, 4)$. Dies ist gemäss der Definition der Grösse N_0 (vgl. S. 370) nur dann möglich, wenn die Anzahl n_0 der gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen (2) *endlich* ist. Es gilt also der

Zusatz. — *Wenn die Funktionen f_1 und f_2 von endlicher Ordnung sind, so sind die Gleichungen* (2) *unter den Voraussetzungen des letzten Satzes für jedes $z \neq z_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, 4)$ in einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punktes ohne gemeinsame Wurzeln.*

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die im Satz 3 enthaltenen Aussagen über die Verteilung der z-Stellen analytischer Funktionen mit einigen allgemeinen Sätzen über die Wertverteilung meromorpher Funktionen zu vergleichen, welche ich in der in der Einleitung zitierten Arbeit gegeben habe.

Wenn $f(x)$ eine in der Umgebung des wesentlich singulären, unendlich fernen Punktes meromorphe Funktion bezeichnet, so kann die Dichtigkeit ihrer z-Stellen durch die Zahl

$$\theta(z) = 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, z)}{T(r)}$$

charakterisiert werden. Es lässt sich zeigen, dass diese Grösse, welche nach dem ersten Hauptsatz im Intervall $0 \leqq \theta(z) \leqq 1$ liegt, für die grosse Mehrzahl der Werte z gleich Null ist: es existiert höchstens eine *abzählbare* Menge z, für welche $\theta(z)$ positiv ist. Ein solcher Wert wird als ein *Ausnahmewert* definiert, und die zugehörige Zahl θ, welche für die »Stärke» des Ausnahmewertes massgebend ist, das *Gewicht* des Ausnahmewertes genannt. Die Ausnahmewerte einer meromorphen Funktion haben ferner folgende fundamentale Eigenschaft:

Die über sämtliche Ausnahmewerte erstreckte Gewichtssumme $\Sigma\,\theta(z)$ ist endlich und höchstens gleich 2.

---

[1] l. c. S. 23. Wenn f_μ in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist, so ist diese Bedingung damit gleichbedeutend, dass

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r, f_\mu)}{\log r}$$

endlich ist, wobei $M(r, f_\mu)$ den Maximalmodul von f_μ bezeichnet.

Man kennt Beispiele von meromorphen Funktionen mit einer beliebig grossen (endlichen) Anzahl von Ausnahmewerten.

Aus dem oben bewiesenen Satz 3 geht hervor, dass wenn zwei verschiedene analytische Funktionen für *vier* Werte z $(z_1, \ldots, z_4)$ gemeinsame z-Stellen haben, sämtliche übrigen z *normale* Werte beider Funktionen sind: in der Tat ist ja nach den Gleichungen (4) $\theta(z)=0$ für jedes $z \neq z_\nu$ $(\nu=1, \ldots, 4)$. Die »gemeinsamen» Werte $z_1, \ldots, z_4$ können dagegen, wie aus (3) zu ersehen ist, sehr wohl Ausnahmewerte der betreffenden Funktionen sein. Bei den oben betrachteten Funktionen $f_1=e^x$ und $f_2=e^{-x}$, welche vier gemeinsame Werte $(0, \infty, 1, -1)$ haben, sind z. B. die beiden Werte 0 und ∞ sogar Picardsche Ausnahmewerte mit den extremen Gewichten Eins.

3. Wir wollen schliesslich, als letzte Anwendung des Satzes 1, einen Satz über die gemeinsamen Stellen von zwei analytischen Funktionen beweisen, welcher in nahem Zusammenhang mit dem oben besprochenen Satz über die Gewichtssumme $\Sigma\theta(z)$ steht.

Die Ungleichung (1) legt es nahe, die relative Dichtigkeit der *gemeinsamen* z-Stellen von zwei meromorphen Funktionen f_1 und f_2 durch die Grösse

$$\lambda(z)=1-\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N_1(r; z)+N_2(r; z)}{T(r,f_1)+T(r,f_2)} \tag{5}$$

zu charakterisieren. Nach dem ersten Hauptsatz variiert $\lambda(z)$ zwischen den Grenzen

$$0 \leqq \lambda(z) \leqq 1.$$

Wenn $\lambda(z)$ für einen gegebenen Wert z *positiv* ausfällt, kann dies von zwei verschiedenen Ursachen abhängen: entweder treten die *gemeinsamen* z-Stellen mit einer mit den Verteilungsdichten der normalen Werte vergleichbaren Dichtigkeit auf, so dass also die Grösse $N_0(r; z)$ von derselben Grössenordnung wie $T(r,f_1)$ und $T(r,f_2)$ ist, oder ist dieser Wert z ein *Ausnahmewert* (in dem oben angegebenen genauen Sinn), welcher von f_1 oder f_2 überhaupt in einer verhältnismässig geringen Anzahl von Punkten angenommen wird.

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung (1) durch $T(r,f_1)+T(r,f_2)$, so ergibt sich für $r \to \infty$, dass

$$\sum_1^q \lambda(z_\nu) \leqq 4.$$

Diese Beziehung gilt nun, wie gross immer die Anzahl q auch gewählt werden mag, und man schliesst demnach:

Satz 4. — *Die Menge der Werte z, für welche die durch (5) definierte Zahl $\lambda(z)$ positiv ist, ist abzählbar. Die über diese Werte erstreckte Summe*

$$\Sigma \lambda(z)$$

ist konvergent und höchstens gleich 4.

§ 2.

Über meromorphe Funktionen, welche vier Werte in denselben Punkten und mit gleichen Multiplizitäten annehmen.

4. In den im ersten Paragraphen bewiesenen Sätzen wurde auf die eventuelle Mehrfachheit der gemeinsamen Stellen der betrachteten analytischen Funktionen keine Rücksicht genommen. Zu vollständigeren Ergebnissen gelangt man, wenn man annimmt, dass die gemeinsamen Stellen auch in Bezug auf Multiplizität übereinstimmen. In der Theorie der ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht ist diese Frage früher von Herrn Pólya untersucht worden[1]; ihm verdankt man folgendes interessante Resultat:

Satz von Pólya. — *Wenn zwei ganze Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von endlichem Geschlecht* d r e i *verschiedene endliche Werte a, b und c in genau denselben Punkten und mit gleichen Multiplizitäten annehmen, so ist im allgemeinen $f_1 \equiv f_2$.*

Eine Ausnahme kann nur dann eintreffen, wenn einer dieser drei Werte (z. B. a) ein Picardscher Ausnahmewert der Funktionen f_1 und f_2 ist, und dieser Wert (a) gleich dem Mittelwert $\left(\frac{b+c}{2}\right)$ der zwei übrigen Werte ist. In diesem besonderen Fall ist, falls nicht $f_1 \equiv f_2$, notwendigerweise

$$f_2 \equiv a + \frac{(a-b)(c-a)}{f_1 - a}.$$

[1] l. c.

Zweck des vorliegenden Paragraphen ist, den Pólyaschen Satz auf beliebige meromorphe Funktionen zu erweitern. Wir werden nämlich folgenden Satz beweisen:

Satz 5. — *Wenn zwei meromorphe Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ vier verschiedene (endliche oder unendliche) Werte a, b, c und d in genau denselben Punkten und mit gleichen Multiplizitäten annehmen, so ist im allgemeinen $f_1 \equiv f_2$.*

Eine Ausnahme kann nur dann eintreffen, wenn zwei dieser vier Werte, z. B. b und d, Picardsche Ausnahmewerte der Funktionen f_1 und f_2 sind, und die Punkte a, b, c, d eine harmonische Punktreihe bilden. In diesem Fall ist entweder $f_1 \equiv f_2$ oder

$$f_2 \equiv S(f_1),$$

wo $S(z)$ diejenige lineare Transformation von z bezeichnet, welche die Punkte $z=a$ und $z=c$ invariant lässt und die Punkte $z=b, z=d$ vertauscht.[1]

5. Durch eine geeignete Inversion kann man erreichen, dass einer der betrachteten vier Werte unendlich wird; im folgenden soll $d=\infty$ angenommen werden. Zum Beweise bilden wir dann mit Herrn Pólya die Ausdrücke

$$\frac{f_1-a}{f_2-a}=\varphi_1, \qquad \frac{f_1-b}{f_2-b}=\varphi_2, \qquad \frac{f_1-c}{f_2-c}=\varphi_3; \tag{6}$$

die so definierten analytischen Funktionen φ_1, φ_2 und φ_3 sind nach der Voraussetzung *von Null und Unendlich verschieden.* Durch Elimination der Funktionen f_1 und f_2 findet man, dass sie der Identität

$$(c-b)\,\varphi_1+(a-c)\,\varphi_2+(b-a)\,\varphi_3+(c-b)\,\varphi_2\,\varphi_3+(a-c)\,\varphi_3\,\varphi_1+(b-a)\,\varphi_1\,\varphi_2\equiv 0 \tag{7}$$

genügen. Nun kann eine derartige lineare, homogene Beziehung zwischen den sechs von Null verschiedenen ganzen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_2\varphi_3, \varphi_3\varphi_1$ und $\varphi_1\varphi_2$ nur dann bestehen, wenn diese Funktionen gewisse speziellere Bedingungen erfüllen. Dies geht aus nachstehendem Hilfssatz hervor, dessen Beweis wir, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, erst in N:o 7 folgen lassen.

---

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Funktionen f_1 und f_2 die vorausgesetzten Eigenschaften nur in einer gewissen Umgebung des wesentlich singulären Unendlichkeitspunktes besitzen. Um ihn in dieser allgemeineren Fassung zu beweisen, hat man in dem nachfolgenden Beweis einige Modifikationen vorzunehmen.

Hilfssatz. — *Es seien $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ $(n \geqq 3)$ ganze Funktionen, welche in jedem endlichen Punkt der Ebene von Null verschieden sind. Wenn diese Funktionen von einander linear abhängig sind, d. h. wenn es eine Identität*

$$\sum_1^n c_\nu F_\nu(x) \equiv 0 \tag{8}$$

gibt, wo $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten sind, die nicht sämtlich verschwinden, so existiert eine Identität derselben Form zwischen gewissen $n-1$ unter den gegebenen Funktionen.[1]

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes schliesst man zunächst, dass unter den Funktionen F_ν wenigstens zwei, z. B. F_1 und F_2, existieren, deren Verhältnis konstant ist. Ausser F_2 kann es noch einzelne Funktionen F_ν geben, welche ebenfalls von F_1 linear abhängig sind; seien diese z. B. $F_3, \ldots, F_{\nu_1}$. Es existiert dann eine Konstante k_1 derart, dass

$$\sum_1^{\nu_1} c_\nu F_\nu(x) \equiv k_1 F_{\nu_1}(x),$$

und also nach (8)

$$k_1 F_{\nu_1} + \sum_{\nu_1+1}^{n} c_\nu F_\nu \equiv 0, \tag{8$'$}$$

wo die einzelnen Funktionen $F_{\nu_1+1}, \ldots, F_n$ von F_{ν_1} linear unabhängig sind.

Wird nun die obige Überlegung auf die Identität (8)$'$ angewandt, so folgt, dass unter den Funktionen $F_{\nu_1+1}, \ldots, F_n$ zwei oder mehrere, z. B. $F_{\nu_1+1}, \ldots, F_{\nu_2}$, vorhanden sind, welche paarweise linear von einander abhängig sind, so dass also

$$\sum_{\nu_1+1}^{\nu_2} c_\nu F_\nu(x) \equiv k_2 F_{\nu_2}(x) \qquad (k_2 = \text{const.}),$$

und gemäss (8)$'$

$$k_1 F_{\nu_1} + k_2 F_{\nu_2} + \sum_{\nu_2+1}^{n} c_\nu F_\nu \equiv 0.$$

---

[1] Dieser Satz ist zuerst von Borel gegeben worden (Vgl. Borel: *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta math., B. XX, 1897). Für $n=3$ ist er mit dem speziellen Picardschen Satz gleichbedeutend.

Die fortgesetzte Wiederholung dieser Betrachtung führt schliesslich zu folgendem Resultat:

Die Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *lassen sich in eine gewisse Anzahl von Gruppen einteilen derart, dass je zwei dieser Funktionen von einander linear abhängig oder unabhängig sind, je nachdem sie zu derselben oder zu verschiedenen Gruppen gehören.*

Ferner sieht man sofort ein, dass *die Partialsummen links in* (8), *welche den verschiedenen Gruppen entsprechen, identisch verschwinden.* Seien nämlich die Elemente der i:ten Gruppe $F_{\nu_{i-1}+1}, \ldots, F_{\nu_i}$ und die Anzahl der Gruppen gleich m, so wird nach (8)

$$\sum_{\nu_{i-1}+1}^{\nu_i} c_\nu F_\nu \equiv k_i F_{\nu_i} \quad (k_i = \text{const.}) \quad \text{und} \quad \sum_1^m k_{\nu_i} F_{\nu_i} \equiv 0.$$

Weil je zwei der Funktionen F_{ν_i} von einander linear unabhängig sind, so muss nach dem Hilfssatz $k_1 = \cdots = k_m = 0$ sein, woraus die Behauptung folgt.

6. Dieses Ergebnis wenden wir nun auf die Beziehung (7) an. Die sechs Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_2\varphi_3, \varphi_3\varphi_1, \varphi_1\varphi_2$ lassen sich also in Gruppen der oben charakterisierten Art einteilen. Da die entsprechenden Glieder links in (7) sämtlich von Null verschieden sind, so kommen als mögliche Einteilungen hierbei folgende in Betracht:

1:o. — Eine einzige Gruppe mit sechs Elementen.
2:o. — Zwei Gruppen mit bzw. vier und zwei Elementen.
3:o. — Zwei Gruppen mit drei Elementen.
4:o. — Drei Gruppen mit zwei Elementen.

Jeder dieser vier Fälle führt unmittelbar zu dem Ergebnis, dass entweder zwei der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von einander linear abhängig sind, oder eine unter diesen Funktionen sich auf eine Konstante reduziert. Ein Blick auf die Formeln (6) zeigt dann weiter, dass die Funktion $f_2(x)$ jedenfalls eine lineare Transformation

$$f_2 = S(f_1) \tag{9}$$

von der Funktion f_1 ist.

Es erübrigt noch nachzuweisen, dass diese lineare Transformation die im Satz 5 behaupteten Eigenschaften hat. Dies könnte direkt mittels der Beziehung (7) bewiesen werden, wird aber am einfachsten durch folgende Überlegung eingesehen: Da eine analytische Funktion in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes höchstens *zwei* Picardsche Ausnahmewerte haben kann, so existieren unter den vier Werten a, b, c, d wenigstens *zwei*, welche die Funktionen f_1 und f_2 in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes tatsächlich annehmen; sei a ein solcher Wert. Nach Voraussetzung ist dann in jedem Punkt, wo $f_1=a$, auch $f_2=a$, und nach (9) also $S(a)=a$. Jeder der Werte a, b, c, d, welcher kein Picardscher Ausnahmewert der Funktionen f_1 und f_2 ist, ist also ein Fixpunkt der Transformation S. Nun reduziert sich eine lineare Transformation, welche drei Punkte invariant lässt, auf die identische Substitution, und man schliesst also, *dass* $f_1 \equiv f_2$, *ausser möglicherweise in dem Falle, wo zwei der betrachteten Werte, z. B.* b *und* d, *Picardsche Ausnahmewerte beider Funktionen sind.*

Liegt nun dieser Ausnahmefall vor, so schliesst man zunächst, dass die Transformation S die Werte a und c invariant lässt. Da weiter b ein Picardscher Ausnahmewert von f_1 ist, so folgt aus (9), dass der Wert $S(b)$ notwendig ein Picardscher Ausnahmewert der Funktion f_2 sein muss. Nun hat diese letzte Funktion schon nach Voraussetzung die Ausnahmewerte b und d, und es muss also nach dem Picardschen Satz entweder

$$S(b)=b \qquad \text{oder} \qquad S(b)=d \tag{10}$$

sein. In derselben Weise findet man von dem Werte d ausgehend, dass weiter

$$S(d)=d \qquad \text{oder} \qquad S(d)=b \tag{10'}$$

sein muss. Die ersten der Beziehungen (10) und (10)′ führen wieder zu der identischen Substitution: $f_2 \equiv S(f_1) \equiv f_1$. Es bleibt also nur der Fall übrig, wo $S(b)=d$ und $S(d)=b$. Diese zwei Bedingungen sind aber nur dann verträglich, wenn das Doppelverhältnis $(a, b, c, d)=-1$ ist, d. h. wenn die Punkte a, b, c, d eine harmonische Punktreihe bilden. Unser Satz ist hiermit bewiesen.

7. Wir kommen jetzt zum Beweise des oben benutzten Hilfssatzes. Es seien also $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ $(n \geqq 2)$ von Null und Unendlich verschiedene meromorphe Funktionen, welche einer linearen homogenen Identität

$$\sum_{1}^{n+1} c_\nu F_\nu \equiv 0 \tag{11}$$

genügen; es gilt zu zeigen, dass ein System von n dieser Funktionen existiert, welche von einander linear abhängig sind. Diese Behauptung ist evident, wenn eine der Zahlen c_ν verschwindet; im folgenden können wir deshalb sämtliche Koeffizienten c_ν als von Null verschieden annehmen. Durch Division mit $c_{n+1} F_{n+1}$ geht die Beziehung (11) dann über in

$$\sum_1^n \Phi_\nu(x) \equiv 1, \tag{12}$$

wo die Funktionen

$$\Phi_\nu = -\frac{c_\nu F_\nu}{c_{n+1} F_{n+1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ebenfalls von 0 und ∞ verschiedene meromorphe Funktionen sind. Um nun zu zeigen, dass zwischen den n Funktionen $F_1, \ldots, F_n$ eine lineare homogene Relation besteht, genügt es offenbar zu beweisen, dass die Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ von einander linear abhängig sind. Dies ist wieder bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \ldots & \Phi_n \\ \Phi'_1 & \ldots & \Phi'_n \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \Phi_1^{(n-1)} & \ldots & \Phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

identisch gleich Null ist. Von der Voraussetzung ausgehend, dass die Determinante D nicht identisch verschwinde, soll im folgenden ein Widerspruch hergeleitet werden.

Durch $(n-1)$-malige Differentiation erhalten wir aus der Beziehung (12) die Identitäten

$$\sum_1^n \Phi_\nu \equiv 1, \quad \sum_1^n \Phi'_\nu \equiv 0, \ldots, \quad \sum_1^n \Phi_\nu^{(n-1)} \equiv 0.$$

Schreibt man hier $\Phi_\nu^{(k)} \equiv \Phi_\nu \cdot \dfrac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, so stellen sie ein System von n linearen Gleichungen zwischen den n Funktionen Φ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ dar, wobei die Determinante der Koeffizienten $\dfrac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu}$:

$$(13) \qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} & \dots & \frac{\Phi'_n}{\Phi_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Phi_1^{(n-1)}}{\Phi_1} & \dots & \frac{\Phi_n^{(n-1)}}{\Phi_n} \end{vmatrix} = \frac{D}{\Phi_1 \cdots \Phi_n}$$

nach der Antithese nicht identisch verschwindet. Bezeichnet man mit $\Delta_\nu(x)$ ($\nu = 1, \dots, n$) die Unterdeterminanten der successiven Elemente der ersten Zeile von Δ, so findet man also für die Funktionen Φ_ν die Darstellung

$$(14) \qquad \Phi_\nu(x) = \frac{\Delta_\nu(x)}{\Delta(x)} \qquad (\nu = 1, \dots, n).$$

Diese Formel werden wir nun anwenden, um die zu der Funktion Φ_ν gehörige Fundamentalgrösse $T(r, \Phi_\nu)$ abzuschätzen. Da $\Phi_\nu(x)$ eine ganze Funktion ist, so ist $N(r, \Phi_\nu) \equiv 0$, und man findet gemäss des ersten Hauptsatzes (vgl. Einleitung), dass

$$(14)' \qquad T(r, \Phi_\nu) = m(r, \Phi_\nu) + O(\log r).$$

Aus (14) folgt weiter, dass

$$\overset{+}{\log} |\Phi_\nu| = \overset{+}{\log} \left| \Delta_\nu \cdot \frac{1}{\Delta} \right| \leqq \overset{+}{\log} |\Delta_\nu| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{\Delta} \right|$$

und somit auch:

$$(14)'' \qquad m(r, \Phi_\nu) \leqq m(r, \Delta_\nu) + m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \cdot$$

Der letzte Mittelwert wird weiter mittels des ersten Hauptsatzes abgeschätzt. Bemerkt man, dass die Elemente der Determinante Δ, und daher auch diese Determinante selbst ganzen Charakter hat, so folgt, dass $N(r, \Delta) \equiv 0$, und demnach:

$$(14)''' \qquad m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) = m(r, \Delta) - N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) + O(\log r) < m(r, \Delta) + O(\log r).$$

Zusammenfassend ergibt sich aus (14)', (14)'' und (14)''', dass

$$(15) \qquad T(r, \Phi_\nu) < m(r, \Delta) + m(r, \Delta_\nu) + O(\log r).$$

Wir machen nun von folgender einfachen Bemerkung Gebrauch: Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_m$ meromorphe Funktionen und $R(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ eine ganze rationale Funktion dieser Funktionen. Nach der Definition des Zeichens $\overset{+}{\log}$ ist offenbar

$$m(r, f_\mu f_\nu) \leqq m(r, f_\mu) + m(r, f_\nu), \quad m(r, f_\mu + f_\nu) \leqq m(r, f_\mu) + m(r, f_\nu) + \log 2,$$

und man findet durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichheiten, dass

$$m(r, R) < \sum_1^m O[m(r, f_\mu)] + O(1).$$

Schreibt man nun in der Determinante Δ:

$$\frac{\Phi_\mu^{(k)}}{\Phi_\mu} = \frac{\Phi_\mu'}{\Phi_\mu} \cdot \frac{\Phi_\mu''}{\Phi_\mu'} \cdots \frac{\Phi_\mu^{(k)}}{\Phi_\mu^{(k-1)}} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

so wird Δ eine ganze rationale Funktion der logarithmischen Ableitungen der Funktionen $\Phi_\mu, \Phi'_\mu, \ldots, \Phi_\mu^{(n-1)}$ $(\mu = 1, \ldots n)$, und es ist also gemäss der obigen Ungleichung

$$(16) \qquad m(r, \Delta) < \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} O\left[m\left(r, \frac{\Phi_\mu^{(k)}}{\Phi_\mu^{(k-1)}}\right)\right] + O(1).$$

Zur weiteren Abschätzung der letzten Mittelwerte benutzen wir nun den in der Einleitung angegebenen fundamentalen Satz III über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion. Bemerkt man, dass sämtliche $\Phi_\mu^{(k)}$ ganze Funktionen sind und dass also, nach dem ersten Hauptsatz,

$$T(r, \Phi_\mu^{(k-1)}) = m(r, \Phi_\mu^{(k-1)}) + O(\log r),$$

so folgt aus dem genannten Satz III, dass

$$(16)' \qquad m\left(r, \frac{\Phi_\mu^{(k)}}{\Phi_\mu^{(k-1)}}\right) < O[\log m(r, \Phi_\mu^{(k-1)})] + O(\log r) \qquad \left(\begin{matrix}\mu = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n-1\end{matrix}\right),$$

ausser möglicherweise in einer Intervallfolge I von endlicher Gesamtlänge. Es ist nun $\Phi_\mu^{(k-1)} = \Phi_\mu^{(k-2)} \dfrac{\Phi_\mu^{(k-1)}}{\Phi_\mu^{(k-2)}}$ und also

$$m(r, \Phi_\mu^{(k-1)}) \leqq m(r, \Phi_\mu^{(k-2)}) + m\left(r, \frac{\Phi_\mu^{(k-1)}}{\Phi_\mu^{(k-2)}}\right).$$

Unter Beachtung der Ungleichung (16)′ (wo man k durch $k-1$ zu ersetzen hat) folgt weiter, dass

$$m(r, \Phi_\mu^{(k-1)}) < m(r, \Phi_\mu^{(k-2)}) + O[\log m(r, \Phi_\mu^{(k-2)})] + O(\log r)$$

$$= O[m(r, \Phi_\mu^{(k-2)})] + O(\log r)$$

ausserhalb der Intervalle I. Wird nun diese Ungleichung successiv für $k-1$, $k-2, \ldots$ angewandt, so ergibt sich dass

$$m(r, \Phi_\mu^{(k-1)}) < O[m(r, \Phi_\mu)] + O(\log r),$$

woraus nach (16)′ die ausserhalb der Intervalle I gültige Ungleichung

$$(16)'' \qquad m\left(r, \frac{\Phi_\mu^{(k)}}{\Phi_\mu^{(k-1)}}\right) < O[\log m(r, \Phi_\mu)] + O(\log r)$$

folgt.

Führt man nun diese Schranke in die Beziehung (16) ein, so wird

$$(16)''' \qquad m(r, \Delta) < \sum_{\mu=1}^{n} O[\log m(r, \Phi_\mu)] + O(\log r).$$

Durch eine vollkommen analoge Überlegung sieht man ferner ein, dass auch

$$m(r, \Delta_\nu) < \sum_{1}^{n} O[\log m(r, \Phi_\mu)] + O(\log r).$$

Unter Beachtung dieser letzten Ungleichungen folgt schliesslich aus (15), dass für jedes r ausserhalb der Intervalle I:

$$T(r, \Phi_\nu) < \sum_{1}^{n} O[\log m(r, \Phi_\mu)] + O(\log r) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Bemerkt man nun, dass die Grösse $m(r, \Phi_\mu)$ nach dem ersten Hauptsatz mit $T(r, \Phi_\mu) + O(\log r)$ vertauscht werden kann, so folgt durch Addition, dass die Ungleichung

$$(17) \qquad \sum_{1}^{n} T(r, \Phi_\nu) < \sum_{1}^{n} O[\log T(r, \Phi_\nu)] + O(\log r)$$

ausserhalb der Intervalle I gelten muss.

Diese letzte Beziehung führt nun unmittelbar zu dem in Aussicht gestellten Widerspruch. In der Tat kann die Ungleichung (17) nur dann bestehen, wenn die untere Grenze

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{T(r, \Phi_\nu)}{\log r} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

endlich ist. Nach dem ersten Hauptsatz muss die ganze Funktion $\Phi_\nu(x)$ sich dann auf ein Polynom reduzieren; andererseits ist aber $\Phi_\nu \neq 0$ in der ganzen endlichen Ebene und man schliesst also, dass $\Phi_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gleich einer (von Null verschiedenen) Konstante sein muss. Dann wäre aber die Determinante Δ und somit auch D, im Widerspruch mit der Antithese, identisch gleich Null. Unser Hilfssatz ist somit erwiesen.

Wir haben in diesem Paragraphen gefunden, dass eine meromorphe Funktion, ausser in einem evidenten Ausnahmefall, durch viererlei Stellen eindeutig bestimmt ist. Es wäre nun interessant zu wissen, ob dieses Ergebnis auch dann besteht, wenn die *Multiplizitäten* der betreffenden Stellen nicht berücksichtigt werden. Einige im ersten Paragraphen gewonnene Resultate (Satz 3 nebst Zusatz) sprechen vielleicht für die Vermutung, dass Satz 5 tatsächlich in der angedeuteten allgemeinen Fassung gültig sei. Wenn dem so wäre, so würde dieser Satz die in den Sätzen 2 und 3 enthaltenen Aussagen als unmittelbare Folgerungen ergeben.

§ 3.

Über meromorphe Funktionen, welche drei verschiedene Werte in denselben Punkten annehmen.

8. Wir betrachten in diesem Paragraphen zwei meromorphe Funktionen f_1 und f_2 derart, dass die Gleichungen

$$f_1(x) = z, \qquad f_2(x) = z$$

für drei Werte $z=a$, $z=b$, $z=c$ gleichzeitig befriedigt sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir wieder einen dieser Werte, z. B. c, unendlich annehmen. Unter der Voraussetzung, dass die a-, b- und ∞-Stellen auch in Bezug auf Mehrfachheit übereinstimmen, stellen die Quotienten

$$\varphi_1 = \frac{f_1 - a}{f_2 - a} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{f_1 - b}{f_2 - b} \tag{18}$$

ganze Funktionen dar, welche den Wert Null als Picardschen Ausnahmewert haben. Sind umgekehrt φ_1 und φ_2 zwei beliebige, von Null verschiedene ganze Funktionen, so haben offenbar die durch Auflösung der Gleichungen (18) erhaltenen meromorphen Funktionen (vgl. hierüber PÓLYA, l. c.)

$$f_1 = a + (a-b)\varphi_1 \frac{1-\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}, \qquad f_2 = a + (a-b)\frac{1-\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} \tag{19}$$

gemeinsame a-, b- und ∞-Stellen.

9. Obgleich also eine meromorphe Funktion durch dreierlei Stellen nicht allgemein eindeutig bestimmt ist, kann man doch weite Funktionsklassen angeben, welche diese Eigenschaft besitzen. Wir beweisen in dieser Hinsicht den

Satz 6. — *Wenn zwei meromorphe Funktionen f_1 und f_2 von endlicher, nichtganzzahliger Ordnung drei verschiedene Werte a, b und c in denselben Punkten und mit denselben Multiplizitäten annehmen, so ist identisch $f_1 = f_2$.*

Beweis. — Wir zeigen zunächst dass die Funktionen f_1 und f_2 von derselben Ordnung sind. Nach den Hauptsätzen I und II ist für jedes z:

$$N\left(r, \frac{1}{f_\nu - z}\right) < T(r, f_\nu) + O(\log r) < N(r;\, a) + N(r;\, b) + N(r;\, c) + O(\log r) \qquad (\nu = 1,\, 2).$$

Setzt man hier der Reihe nach $z = a, b, c$, so ergibt sich (wenn man von dem trivialen Fall absieht, wo $T(r, f_\nu) = O(\log r)$, und f_ν also eine rationale Funktion ist), dass

$$\frac{1}{3} \leqq \varliminf_{r=\infty} \frac{T(r, f_\nu)}{N(r;\, a) + N(r;\, b) + N(r;\, c)} \leqq \varlimsup_{r=\infty} \frac{T(r, f_\nu)}{N(r;\, a) + N(r;\, b) + N(r;\, c)} \leqq 1.$$

Da der Quotient der Grössen $T(r, f_1)$ und $T(r, f_2)$ hiernach für $r \to \infty$ die Unbestimmtheitsgrenzen $\frac{1}{3}$ und 3 hat, so sind die Ordnungen der Funktionen f_1 und f_2, d. h. die oberen Grenzen

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f_\nu)}{\log r} \qquad (\nu = 1, 2),$$

einander gleich.

Wir nehmen nun wieder $c = \infty$ an und bilden die Quotienten (18). Um nun zu zeigen, dass $f_1 \equiv f_2$, genügt es offenbar zu beweisen, dass die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ identisch verschwindet. Dies geht wiederum aus folgender Überlegung hervor: Eine leichte Folgerung aus dem ersten Hauptsatz ist, dass die Ordnung einer meromorphen Funktion, welche *rational* von zwei gegebenen meromorphen Funktionen ψ_1 und ψ_2 abhängt, nicht die Ordnungen beider letztgenannten Funktionen übersteigen kann.[1] Man schliesst hiernach aus den Formeln (18), dass die Ordnungen von φ_1 und φ_2 höchstens gleich der Ordnung von f_1 und f_2 sind. Nimmt man nun weiter an, dass die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ nicht identisch verschwinde, so erhält man für f_1 und f_2 die Darstellungen (19), woraus umgekehrt folgt, dass die Ordnung von f_1 und f_2 auch nicht höher als die höhere der Ordnungen von φ_1 und φ_2 sein kann. Eine dieser letzten Funktionen, z. B. φ_1, müsste demnach von genau derselben Ordnung, wie f_1 und f_2, also von *nichtganzzahliger* Ordnung sein. Dies steht aber im Widerspruch mit der bekannten Tatsache, dass eine ganze Funktion endlicher Ordnung φ_1, welche einen endlichen Picardschen Ausnahmewert (0) besitzt, von *ganzzahliger* Ordnung ist. Es ist also $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$, und somit $f_1 \equiv f_2$, w. z. b. w.

10. Wir beweisen schliesslich nachstehenden Satz, der im Falle endlicher Ordnungen früher von Herrn PÓLYA gegeben worden ist (vgl. G. PÓLYA: Deutsche Math.-Ver., Bd. 32, S. 16, 1923).

Satz 7. — *Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ meromorphe Funktionen, welche zwei Picardsche Ausnahmewerte a und b besitzen. Wenn sie einen dritten Wert c in genau denselben Punkten und mit gleichen Multiplizitäten annehmen, so ist entweder*

---

[1] In der Tat ist

$$m(r, \psi_1 \psi_2) \leqq m(r, \psi_1) + m(r, \psi_2), \quad m(r, \psi_1 + \psi_2) \leqq m(r, \psi_1) + m(r, \psi_2) + \log 2,$$

$$N(r, \psi_1 \psi_2) \leqq N(r, \psi_1) + N(r, \psi_2), \quad N(r, \psi_1 + \psi_2) \leqq N(r, \psi_1) + N(r, \psi_2),$$

und also nach dem Hauptsatz I:

$$T(r, \psi_1 \psi_2) \leqq T(r, \psi_1) + T(r, \psi_2) + O(\log r), \quad T(r, \psi_1 + \psi_2) \leqq T(r, \psi_1) + T(r, \psi_2) + O(\log r).$$

Ferner ist, ebenfalls nach dem Hauptsatz I, $T(r, \psi) = T\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + O(\log r)$. Aus diesen Beziehungen geht hervor, dass die Ordnung durch rationale Operationen nicht erhöht werden kann.

$f_1 \equiv f_2$ oder $f_1 \equiv S(f_2)$, wo S diejenige wohlbestimmte lineare Transformation bezeichnet, welche den Wert c invariant lässt und die Werte a und b vertauscht.

Beweis. — Durch eine lineare Transformation der Funktionen f_1 und f_2 kann man erreichen, dass $a=0$, $b=\infty$ und $c=1$. Setzt man dann

$$\frac{f_1-1}{f_2-1}=f_3, \tag{20}$$

so besteht zwischen den drei Funktionen f_1, f_2 und f_3, welche gemäss der Voraussetzung sämtlich von Null und Unendlich verschieden sind, die identische Beziehung

$$f_1-f_2f_3+f_3\equiv 1. \tag{21}$$

Unter Anwendung des obigen Hilfssatzes (S. 379) schliesst man hieraus durch eine Überlegung, welche der in Nr. 6 durchgeführten vollkommen analog ist, dass die Funktion f_1 eine lineare Transformation $S(f_2)$ von f_2 ist. Man sieht ferner unmittelbar ein, dass diese Transformation, falls sie sich nicht auf die identische Substitution reduziert, notwendigerweise erstens den Wert c invariant lassen und zweitens die Werte a und b vertauschen muss, denn sonst würde eine der Funktionen f_1 und f_2 drei Picardsche Ausnahmewerte besitzen (vgl. S. 381).

Es ist vielleicht von Interesse zu bemerken, dass das obige Ergebnis sogar unter folgenden allgemeineren Voraussetzungen besteht:

Zusatz. — *Satz 7 gilt auch dann, wenn man die Annahme über die Übereinstimmung der Multiplizitäten der c-Stellen fallen lässt.*

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, wollen wir in aller Kürze den Gang des Beweises andeuten:

Der Quotient f_3 ist im allgemeinen unter den vorliegenden Bedingungen nicht mehr von Null und Unendlich verschieden. Seine eventuellen Nullstellen und Pole befinden sich unter den mehrfachen c-Stellen der Funktionen f_1 und f_2, und zwar ist jede μ-fache Nullstelle bzw. Pol von f_3 wenigstens eine $(\mu+1)$-fache Stelle von f_1 bzw. f_2. Hieraus folgt, dass

$$N\left(r,\frac{1}{f_3}\right)+N(r,f_3)\leqq N'(r,f_1)+N'(r,f_2), \tag{22}$$

wo die Grössen N' in der in der Einleitung (Satz II) angegebenen Weise mittels der mehrfachen Stellen von f_1 und f_2 gebildet werden.

Nun ist gemäss dem zweiten Hauptsatz (II), wenn dort $q=3$ und $z_1=a$, $z_2=b$, $z_3=c$ gesetzt wird,

$$T(r, f_\nu)+N'(r, f_\nu)<N(r;\, c)+O[\log T(r, f_\nu)]+O(\log r) \qquad (\nu=1,\, 2)$$

ausser möglicherweise für eine Wertmenge I von endlichem Mass, und weiter nach dem ersten Hauptsatz

$$N(r;\, c)<T(r, f_\nu)+O(\log r),$$

also schliesslich

$$N'(r, f_\nu)<O[\log T(r, f_\nu)]+O(\log r) \qquad (\nu=1,\, 2)$$

ausserhalb I. Wird diese Wertmenge ausgeschlossen, so gilt folglich nach (22):

$$(23) \qquad N\left(r, \frac{1}{f_3}\right)+N(r, f_3)<O[\log T(r, f_1)]+O[\log T(r, f_2)]+O(\log r).$$

Nach dieser Vorbereitung kann man nun die in Nr. 7 angestellten Überlegungen auf die Identität (21) anwenden um zu zeigen, dass die Funktionen f_1, $f_2 f_3$ und f_3 zunächst linear von einander abhängig sind, und dass weiter f_1 und f_2 die im Satz 7 angegebenen Eigenschaften besitzen. In den Beziehungen (14) bis (17) S. 383—386 erscheinen allerdings jetzt gewisse neue, von den Nullstellen und Polen der Funktion f_3 herrührende Glieder, welche in einfacher Weise mittels der Grösse $N(r, f_3)$ und $N\left(r, \frac{1}{f_3}\right)$ gebildet sind. Da diese letzten Grössen aber gemäss (23) von niedrigerer Grössenordnung als die Hauptglieder $T(r, f_1)$ und $T(r, f_2)$ sind, so haben sie keinen wesentlichen Einfluss auf die Folgerungen, welche S. 386 aus den genannten Beziehungen gezogen wurden.

11. Herr Pólya hat den Satz 7 (unter der allgemeineren, in dem letzten Zusatz gegebenen Voraussetzung) für den besonderen Fall bewiesen, dass die betrachteten Funktionen von endlicher Ordnung sind, und als Anwendung dieses Ergebnisses folgendes gezeigt:

Wenn zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ in denselben Punkten ganzzahlige Werte annehmen, so ist enweder $P+Q$ oder $P-Q$ konstant.

Dies ergibt sich als eine unmittelbare Folgerung des obigen Satzes, wenn man $f_1=e^{2\pi i P}$, $f_2=e^{2\pi i Q}$ setzt. Da nun dieser Satz 7 auch für meromorphe Funktionen f_1 und f_2 von unendlicher Ordnung gilt, so folgt, dass das Pólyasche Resultat nicht nur für Polynome, sondern für beliebige ganze Funktionen besteht.

§ 4.

Schlussbemerkung.

13. Die Beweise sämtlicher obigen Sätze gründen sich auf die drei fundamentalen, in der Einleitung angegebenen Sätze. In der S. 368 zitierten Arbeit habe ich gezeigt, dass diese drei Sätze, in unwesentlich modifizierter Form, für eine weite Klasse analytischer Funktionen bestehen, welche innerhalb *des Einheitskreises* meromorph sind; diese Klasse ist durch die Eigenschaft

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} > 0 \tag{24}$$

charakterisiert. Die obigen Beweismethoden sind daher, mit einigen Modifikationen, auf diese Funktionen anwendbar, und man schliesst also, dass *sämtliche obigen Ergebnisse auch für meromorphe Funktionen gültig sind, welche im Einheitskreise der Bedingung* (24) *genügen.* Für den Fall einer im Einheitskreise *regulären* Funktion ist für das Bestehen dieser Bedingung hinreichend, dass

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log \log M}{\log \frac{1}{1-r}} > 1$$

ist, wobei M den Maximalmodul bezeichnet. Durch Beispiele lässt sich ferner zeigen, dass die Sätze 1—7 nicht mehr ausnahmslos für Funktionen gelten, bei denen

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T}{\log \frac{1}{1-r}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log \log M}{\log \frac{1}{1-r}} = 1.$$

Durch eine einfache Variabelsubstitution kann man diese letzten Sätze auf den Fall übertragen, wo die betrachteten Funktionen in einem Winkelraum W eindeutig und meromorph sind. Man gelangt so zu dem Ergebnis, dass die obigen Eindeutigkeitssätze für Funktionen bestehen, welche in W *von höherer Ordnung als* k sind, wobei $\frac{\pi}{k}$ die Öffnung des Winkels W angibt.[1]

[1] Über den Ordnungsbegriff vgl. meine Arbeit: *Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum* (Acta Soc. Sc. Fennicae, T. L, N:o 12, 1925).