

# ANSCHAULICHES ZUR RIEMANNSCHEN ZETA-FUNKTION.

VON

ALWIN WALTHER

in GÖTTINGEN.

Während für die Gammafunktion eine zeichnerische Darstellung des Verlaufes bei reellem Argument schon von BESSEL gegeben worden ist<sup>1</sup> und in zahlreichen Lehrbüchern vorkommt, fehlte es für die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma = \Re(s) > 1)$$

bisher daran, obwohl gerade bei dieser theoretisch so oft und weitgehend untersuchten Funktion das Bedürfnis nach bildlicher Veranschaulichung vielfach empfunden worden sein mag. Der erwähnte Mangel erklärt sich daraus, dass für die Zetafunktion im Gegensatz zu vielen anderen in der Analysis gebrauchten Funktionen gedruckte Tafeln bis vor kurzem nicht vorhanden waren. Im Herbst 1924 sind nun aber durch C. BURRAU, den ich auf der Innsbrucker Naturforscherversammlung um Nachforschungen in dieser Richtung gebeten hatte, unter dem Nachlass von J. P. GRAM recht umfassende Tafeln der Zetafunktion gefunden worden und, von N. E. NÖRLUND herausgegeben, Ende 1925 in den Schriften der Kopenhagener Akademie im Druck erschienen.<sup>2</sup> Diese Tafeln enthalten die Werte von  $\zeta(s)$  für  $-24 \leq s \leq 24$  und die Zehntel des Arguments, zumeist mit zehn Stellen nach dem Komma, ferner die Werte der ganzen transzendenten

---

<sup>1</sup> F. W. BESSEL, Über die Theorie der Zahlenfakultäten, Königsberger Archiv Naturw. Math. 1 (1812), p. 241—270, insb. Kupfertafel hinter p. 368 = Abh. 1, Leipzig 1875, p. 342—352, insb. p. 351.

<sup>2</sup> J. P. GRAM, Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion, herausgegeben von N. E. NÖRLUND, Danske Vidsk. Selsk. Skr. (Mém. Acad. Copenhague) (naturw.-math.) (8) 10 (1925) Nr. 3, p. 311—325.

Funktion  $(s-1)\zeta(s)$  und ihre Differenzen bis zur vierten Ordnung für  $-2 \leq s \leq 4$ , ebenfalls mit dem Argumentintervall 0,1 und mit zehn oder elf Dezimalen nach dem Komma.

Auf Grund der Gramschen Tafel, meiner eigenen früheren umfangreichen Rechnungen und neuer Zusatzrechnungen sind die folgenden beiden Figuren<sup>1</sup> und die beigegefügte Tafel der logarithmischen Ableitung  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  entstanden. Fig. 1 bringt den Verlauf der Zetafunktion  $\zeta(s)$  selbst und der ganzen transzendenten Funktionen  $(s-1)\zeta(s)$  und  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  für  $-6 \leq s \leq 5$ . Durchwandern wir die Abszissenachse von rechts nach links, so ist  $\zeta(s)$  zunächst wenig grösser als 1 in Übereinstimmung mit  $\zeta(s) \rightarrow 1$  für  $\sigma \rightarrow \infty$  und nimmt dann bei Annäherung an den Pol  $s=1$  monoton nach  $+\infty$  zu. Die Kurve für  $\zeta(s)$  ist also, ganz roh gesprochen, vom Typus eines Zweiges einer gleichseitigen Hyperbel. Links von  $s=1$  ist  $\zeta(s)$  zunächst negativ, die Kurve kommt von  $-\infty$  herauf, durchschneidet die Ordinatenachse in der Tiefe  $\frac{1}{2}$  unter dem Nullpunkte und trifft die Abszissenachse in der ersten trivialen Nullstelle  $s=-2$  von  $\zeta(s)$ . Zwischen den trivialen Nullstellen  $s=-2n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) wird  $\zeta(s)$  abwechselnd positiv und negativ, wie aus

$$\zeta(-2n+1) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

wegen des abwechselnden Vorzeichens der Bernoullischen Zahlen<sup>2</sup>  $B_{2n}$  hervorgeht. Die Kurve hat also bei negativem  $s \leq -2$  einen wellenlinienartigen Verlauf. In den negativen geraden Zahlen und sonst nirgends schneidet sie die Abszissenachse, dazwischen verläuft sie abwechselnd oberhalb und unterhalb von ihr. Die Einzelwellen haben zunächst sehr kleine Amplituden, sodass in der Figur, um die ersten Wellen zwischen  $s=-2$  und  $s=-6$  überhaupt von der Abszissenachse unterscheiden zu können, 200fache Überhöhung angewandt ist. Weiter nach links hin erhalten jedoch die Einzelwellen infolge der starken Zunahme der Ber-

<sup>1</sup> Die Originalzeichnungen in viermal so grossem Massstabe habe ich auf dem Deutschen Mathematikertag in Danzig 1925 vorgelegt.

<sup>2</sup> Für die Definition der Bernoullischen Zahlen vgl. N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, p. 18. Es ist

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}.$$

noullischen Zahlen rasch immer grössere Amplituden. Der Höchstwert von  $|\zeta(s)|$  im Intervall  $-2n \leq s \leq -2n+2$  ist übrigens<sup>1</sup> asymptotisch noch im Verhältnis  $\frac{n}{2e \log n}$  grösser als der Wert  $|\zeta(-2n+1)|$  und wird in einem Punkte erreicht, der bei wachsendem  $n$  immer näher an die Nullstelle  $s=-2n$  von  $\zeta(s)$  heranrückt, sein asymptotischer Abstand von ihr beträgt  $\frac{1}{\log n} + \frac{o(1)}{\log n}$ . Die Kurve für  $\zeta(s)$  steigt oder fällt demnach bei grossem  $n$  vom Punkte  $s=-2n+1$  nach links hin noch beträchtlich bis in die unmittelbare Nähe der Nullstelle  $s=-2n$ , um dann jäh nach dieser abzustürzen oder hinaufzuführen. Die folgende kleine Zusammenstellung gibt eine Vorstellung von den Wellenbergen und -tälern:

zwischen  $-2$  und  $-4$  Höhe etwa 0.009,  
 zwischen  $-4$  und  $-6$  Tiefe etwa 0.004,  
 zwischen  $-16$  und  $-18$  Tiefe etwa 4,  
 zwischen  $-20$  und  $-22$  Tiefe etwa 400,  
 zwischen  $-22$  und  $-24$  Höhe etwa 5000.

Wegen dieser starken Zahlenverschiedenheiten lässt sich der Verlauf von  $\zeta(s)$  für ein grösseres Stück der negativen Halbachse schlecht in einem einzigen Bilde darstellen; in Fig. 1 ist daher die Zeichnung nur bis  $s=-6$  geführt worden.

Ausser der Kurve für  $\zeta(s)$  findet man in Fig. 1 noch die Kurven der ganzen transzendenten Funktionen  $(s-1)\zeta(s)$  und  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ . Die Kurve für  $(s-1)\zeta(s)$  kommt, da  $(s-1)\zeta(s)$  bei grossem positivem  $s$  asymptotisch gleich  $s-1$  wird, rechts annähernd geradlinig aus dem Unendlichen herein, erreicht für den Pol  $s=1$  der Zetafunktion die Höhe 1, für  $s=0$  die Höhe  $\frac{1}{2}$  und schneidet die negative Halbachse in den trivialen Nullstellen  $s=-2, -4, \dots$  von  $\zeta(s)$ , dazwischen Wellen von grösserer Amplitude und entgegengesetztem Ausschlag wie  $\zeta(s)$  bildend, deren erste mit 20facher Überhöhung gezeichnet sind. Die Kurve für  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  verläuft, was besonders interessant ist, im gezeichneten Intervall  $-6 \leq s \leq 5$  ziemlich geradlinig, links ganz wenig erhaben, rechts ganz wenig hohl nach unten. Die Ordinatenachse wird in der Höhe  $\frac{1}{2}$ , die Parallele zur Ordina-

<sup>1</sup> Vgl. A. WALTHER, Über die Extrema der Riemannschen Zetafunktion bei reellem Argument, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 34 (1925), p. 171—177.

Riemannsche  
Zetafunktion  $\zeta(s)$   
Ganze transzendente Funktionen

$$(s-1)\zeta(s) \text{ und } \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

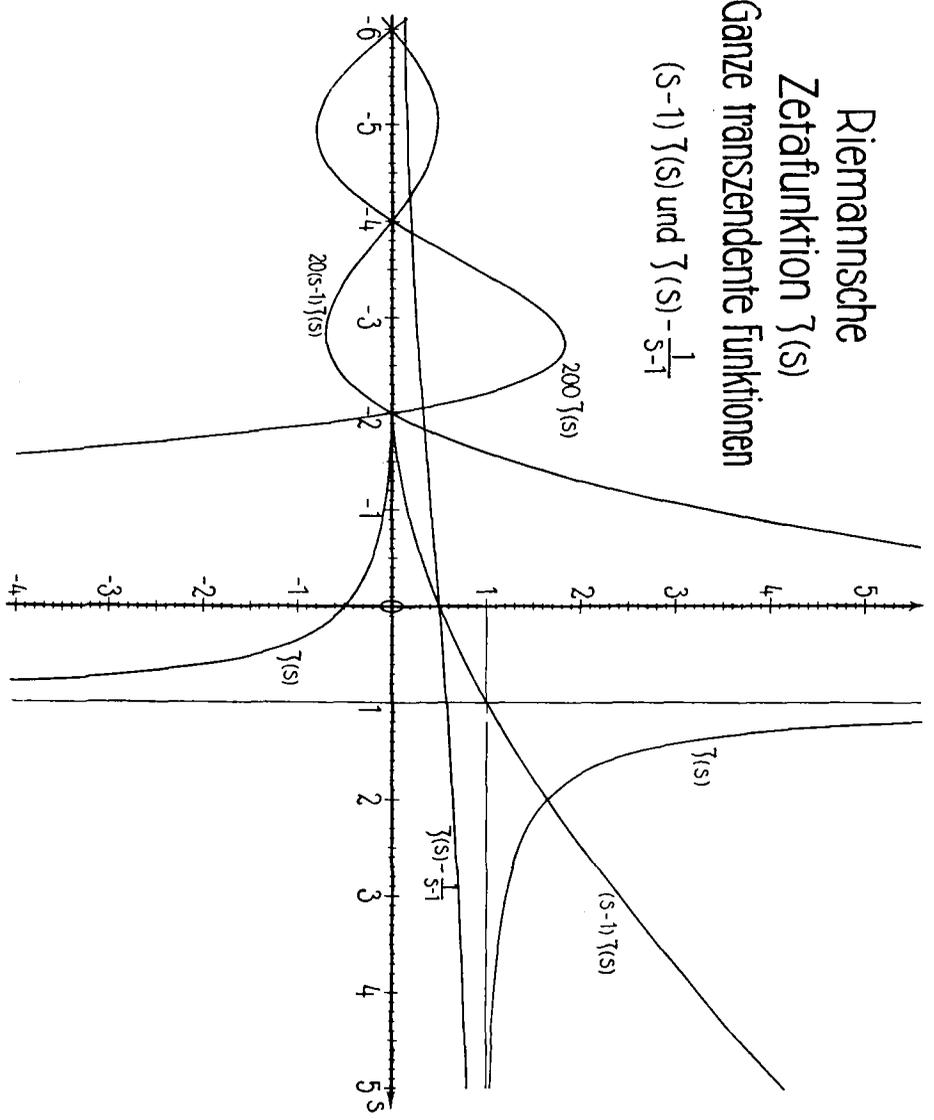


Fig. 1.

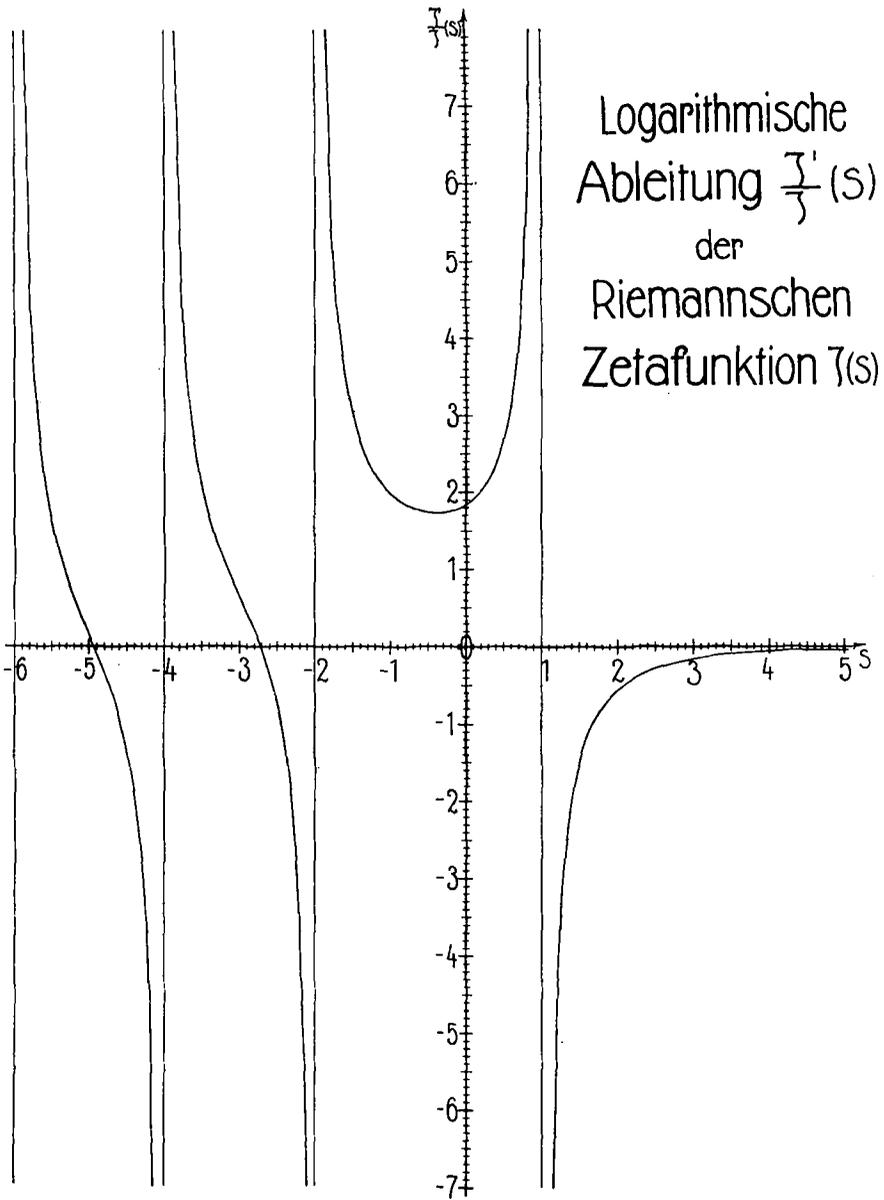


Fig. 2.

tenachse durch den Pol  $s=1$  der Zetafunktion in der Höhe der Eulerschen Konstanten  $C \approx 0.57721\ 56649$  geschnitten. Die berechneten Werte von  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  zwischen  $s=-6$  und  $s=-2$  für die Zehntel lassen von dem wellenförmigen Verlaufe von  $\zeta(s)$  nichts mehr bemerken, nehmen vielmehr monoton zu.

Fig. 2 gibt das Bild der logarithmischen Ableitung  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  von  $\zeta(s)$  für  $-6 \leq s \leq 5$  nach der am Schlusse mitgeteilten Tafel von  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ . Die Kurve, die für grosse positive  $s$  sehr wenig unterhalb der Abszissenachse liegt, fällt bei nach 1 abnehmendem  $s$  nach  $-\infty$  hin ab, hat dann zwischen  $s=1$  und  $s=-2$  einen haarnadelförmigen, nach unten erhabenen Ast oberhalb der Abszissenachse und weiter links Äste, welche im Aussehen an die der Kotangenskurve erinnern. Der Schnittpunkt des Astes zwischen  $s=-2n$  und  $s=-2n+2$  mit der Abszissenachse rückt bei wachsendem  $n$  immer mehr an den Punkt  $s=-2n$  heran, von dem er den asymptotischen Abstand  $\frac{1}{\log n} + \frac{o(1)}{\log n}$  hat.<sup>1</sup> Die Figur veranschaulicht sehr gut die Tatsache<sup>1</sup>, dass die Ableitung  $\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'$  für  $s \leq -1$  und sogar für noch etwas grösseres  $s$  beständig negativ, noch weiter rechts dann aber beständig positiv ist. Die Nullstelle von  $\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'$ , d. h. den tiefsten Punkt des haarnadelförmigen Astes von  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ , gewinnt man aus den unten angeführten Werten von  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  durch umgekehrte Interpolation<sup>2</sup> angenähert zu  $-0.38553$ .

Die beigefügte Tafel von  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  ist aus den Gramschen Tafeln von  $\zeta(s)$  und  $(s-1)\zeta(s)$ , die ich mit meinen eigenen Werten soweit als möglich verglichen habe, durch numerische Differentiation berechnet worden. Dabei kam die durch Differentiation der Stirlingschen Interpolationsformel entstehende Formel

$$(*) \quad \omega f'(a) = (0.1) - \frac{1}{6}(0.3) + \frac{1}{30}(0.5) - \frac{1}{140}(0.7) + \text{Restglied}$$

zur Verwendung. Hierin bedeutet  $f(x)$  die mit dem Intervalle  $\omega$  vertafelte Funk-

<sup>1</sup> Vgl. A. WALTHER, Über die Extrema der Riemannschen Zetafunktion bei reellem Argument, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 34 (1925), p. 171—177.

<sup>2</sup> Vgl. E. T. WHITTAKER—G. ROBINSON, The calculus of observations, London-Glasgow-Bombay 1924, p. 60—61.

tion,  $a$  ist der Punkt, in dem man die Ableitung wünscht, und (0.1), (0.3), ... sind die in einer Wagerechten mit  $f(a)$  und in der 1., 3., ... Differenzenspalte befindlichen Mittelwerte von Differenzen in Gauss-Encke-Rungescher Schreibweise. Differenziert wurden teils  $\zeta(s)$ , wodurch sich  $\zeta'(s)$  und bei Division mit  $\zeta(s)$  das gewünschte  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  ergeben, teils  $(s-1)\zeta(s)$ , wodurch  $(s-1)\zeta'(s) + \zeta(s)$ , bei Division mit  $(s-1)\zeta(s)$  und Subtraktion von  $\frac{1}{s-1}$  dann  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  zustandekommt, teils sowohl  $\zeta(s)$  als auch  $(s-1)\zeta(s)$ . Das Restglied in der Formel (\*) habe ich nicht berücksichtigt, dafür aber die berechneten Werte von  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  einer sehr scharfen Probe mittels der durch Differentiation der Riemannschen Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2 \cos \frac{\pi s}{2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s)$$

herleitbaren Beziehung

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi s}{2} + \log 2\pi - \Psi(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

unterzogen, wobei ich die nötigen Werte der trigonometrischen Funktionen aus der Tafel von PETERS<sup>1</sup>, die Werte von  $\Psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$  aus der Tafel von GAUSS<sup>2</sup> entnahm. Die Rechnungen wurden sämtlich mit mindestens acht Dezimalen nach dem Komma durchgeführt; ausgezeichnete Dienste leistete hierbei die Rechenmaschine Mercedes-Euklid Nr. 6671 mit elektrischem Antrieb (Eigentum des Göttinger Mathematischen Instituts). In der Tafel sind sieben Stellen nach dem Komma angegeben; nach dem Ergebnis der Proben glaube ich, gewährleisten zu dürfen, dass die letzte Stelle höchstens um eine Einheit fehlerhaft ist. Auf geläufige Konstanten zurückführbar sind die Werte von  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  für  $s=0$  und  $s=\frac{1}{2}$ :

<sup>1</sup> J. PETERS, Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Kosinus..., Abh. Akad. Berlin (phys. math.) - 1911, Anhang, Abh. I, p. 1-54.

<sup>2</sup> C. F. GAUSS, Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots,$$

Commentat. Soc. sc. Göttingensis rec. (math.) 2 (1813), Nr. 1, p. 1-46, insb. p. 44-46 = Werke 3, Göttingen 1866, neuer Abdruck Göttingen 1876, p. 123-162, insb. p. 161-162.

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log 2\pi \approx 1.83787\ 70664,$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{C}{2} + \log 2 \approx 2.68609\ 17096.$$

Tafel für die logarithmische Ableitung  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta(s)$ .

s	$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$	s	$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$	s	$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$	s	$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$	s	$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$
-6.0	∞	-3.0	+ 0.645 4291	0.0	+ 1.837 8771	+ 3.0	- 0.164 8227	+ 6.0	- 0.012 6331
-5.9	+ 9.904 6250	-2.9	+ 0.431 3274	+ 0.1	+ 1.913 9193	1	- 0.148 6450	1	- 0.011 7095
8	+ 4.837 6313	8	+ 0.205 9037	2	+ 2.020 3814	2	- 0.134 3606	2	- 0.010 8567
7	+ 3.102 5786	7	- 0.046 2897	3	+ 2.168 8583	3	- 0.121 7002	3	- 0.010 0689
6	+ 2.198 5342	6	- 0.347 6274	4	+ 2.378 9306	4	- 0.110 4406	4	- 0.009 3407
5	+ 1.624 4296	5	- 0.735 6803	5	+ 2.686 0917	5	- 0.100 3956	5	- 0.008 6675
4	+ 1.212 3247	4	- 1.283 2658	6	+ 3.161 5813	6	- 0.091 4087	6	- 0.008 0448
3	+ 0.889 2164	3	- 2.158 1066	7	+ 3.971 9037	7	- 0.083 3475	7	- 0.007 4685
2	+ 0.617 3746	2	- 3.861 0152	8	+ 5.616 9182	8	- 0.076 0992	8	- 0.006 9351
1	+ 0.374 2884	1	- 8.892 6221	9	+ 10.596 5024	9	- 0.069 5676	9	- 0.006 4411
-5.0	+ 0.144 3924	-2.0	∞	+ 1.0	∞	+ 4.0	- 0.063 6698	+ 7.0	- 0.005 9836
-4.9	- 0.085 0983	-1.9	+ 11.056 2164	1	- 9.441 0364	1	- 0.058 3343		
8	- 0.326 9679	8	+ 6.035 9888	2	- 4.458 3372	2	- 0.053 4990		
7	- 0.596 7776	7	+ 4.352 3471	3	- 2.808 0944	3	- 0.049 1100		
6	- 0.917 0321	6	+ 3.505 1363	4	- 1.990 3740	4	- 0.045 1201		
5	- 1.325 4519	5	+ 2.994 2574	5	- 1.505 2354	5	- 0.041 4878		
4	- 1.895 0284	4	+ 2.652 9977	6	- 1.186 0649	6	- 0.038 1769		
3	- 2.793 6871	3	+ 2.409 9332	7	- 0.961 4822	7	- 0.035 1551		
2	- 4.522 4781	2	+ 2.229 4069	8	- 0.795 8164	8	- 0.032 3941		
1	- 9.582 3132	1	+ 2.091 6903	9	- 0.669 2656	9	- 0.029 8686		
-4.0	∞	-1.0	+ 1.985 0537	+ 2.0	- 0.569 9610	+ 5.0	- 0.027 5562		
-3.9	+ 10.301 6255	-0.9	+ 1.902 1688	1	- 0.490 3595	1	- 0.025 4369		
8	+ 5.243 8373	8	+ 1.838 3194	2	- 0.425 4406	2	- 0.023 4929		
7	+ 3.518 4697	7	+ 1.790 4507	3	- 0.371 7353	3	- 0.021 7082		
6	+ 2.624 6290	6	+ 1.756 6442	4	- 0.326 7714	4	- 0.020 0683		
5	+ 2.061 2903	5	+ 1.735 8261	5	- 0.288 7407	5	- 0.018 5605		
4	+ 1.660 5620	4	+ 1.727 6200	6	- 0.256 2910	6	- 0.017 1732		
3	+ 1.349 4950	3	+ 1.732 3010	7	- 0.228 3918	7	- 0.015 8957		
2	+ 1.090 4199	2	+ 1.750 8402	8	- 0.204 2447	8	- 0.014 7188		
1	+ 0.860 8939	1	+ 1.785 0507	9	- 0.183 2216	9	- 0.013 6338		