

# SUR LA MÉTHODE DES FONCTIONS ARBITRAIRES DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR

B. HOSTINSKÝ

à BRNO.

## Introduction.

La méthode des fonctions arbitraires, inventée par Poincaré, a été appliquée par lui à l'étude de certains problèmes de probabilités continues ou géométriques.<sup>1</sup>

Rappelons d'abord le *problème de la roulette* (voir l'ouvrage cité de Poincaré p. 148). Soit une roue divisée en un grand nombre de parties égales, alternativement rouges et noires; imprimons lui une rotation rapide. Lorsqu'elle s'arrêtera, une de ses divisions se trouvera en regard d'un point de repère fixe: quelle est la probabilité pour que cette division soit rouge ou noire?

Voici le résultat essentiel obtenu par Poincaré. Si la roue tourne d'un angle total  $\theta$ , soit

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) d\theta$$

la probabilité pour que  $\theta$  soit compris entre  $\theta_0$  et  $\theta_1$ . Supposons que chaque division corresponde à un angle  $\varepsilon$ ; divisons l'axe des abscisses en parties égales à  $\varepsilon$  et, par les points de division, menons des ordonnées jusqu'à la rencontre de la courbe

$$y = f(\theta).$$

Comme les divisions changent de couleur, couvrons de hachures les aires qui

---

<sup>1</sup> H. POINCARÉ: *Calcul des probabilités*, 2<sup>ième</sup> édition, Paris 1912, n° 91—93.

correspondent aux divisions rouges, par exemple. La probabilité cherchée sera le rapport de l'aire couverte de hachures à l'aire totale. Quelle que soit la forme de la courbe, quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, ce rapport tendre vers  $\frac{1}{2}$ .

Désignons par  $A$  l'angle maximum dont la roue peut tourner de telle sorte que  $\theta < A$ . Supposons la fonction  $f(\theta)$  continue et admettant une dérivée; admettons de plus que cette dérivée ne dépasse pas un certain maximum  $M$ . Divisons  $A$  en  $n$  parties égales. Soit  $\varepsilon$  une d'elles; on a

$$\varepsilon = \frac{A}{n}.$$

Il y a  $\frac{n}{2}$  aires convertes de hachures et  $\frac{n}{2}$  aires blanches. Poincaré montre que la différence des deux aires totales est plus petite que

$$MA\varepsilon = \frac{MA^2}{n}.$$

Cette différence tend donc vers zéro avec  $\varepsilon$ ; et la probabilité cherchée sera bien  $\frac{1}{2}$ .

Remarquons que M. Borel<sup>1</sup> a montré que, pour arriver à ce résultat, il suffit de supposer que la fonction soit continue et que, suivant M. Fréchet<sup>2</sup>, il suffit de supposer que la fonction soit intégrable. Mais nous supposerons toujours dans la suite que les fonctions que nous allons introduire sont dérivables.

Il y a assez peu de problèmes qui ont été traités par la méthode des fonctions arbitraires (voir les ouvrages cités de Poincaré et de M. Borel). M. Borel a suggéré l'application de cette méthode à la théorie cinétique des gaz dans ses recherches importantes sur ce sujet.<sup>3</sup>

Dans un travail publié en 1917<sup>4</sup> qui a paru plus tard en français<sup>5</sup> j'ai

<sup>1</sup> E. BOREL: *Éléments de la théorie des probabilités*, 3<sup>e</sup> édition, Paris 1924, p. 114 et suiv.

<sup>2</sup> M. FRÉCHET: *Remarque sur les probabilités continues* (Bulletin des sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t. 45, p. 87—88; 1921).

<sup>3</sup> E. BOREL: *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Paris 1914, p. 89. *Éléments* . . . p. 122.

<sup>4</sup> B. HOSTINSKÝ: *Nové řešení Buffonovy ulohy o jehle* (Rozpravy České Akademie, XXVI, 2. třída, č. 13. Praha, 1917).

<sup>5</sup> B. HOSTINSKÝ: *Sur une nouvelle solution du problème d'aiguille* (Bulletin des sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t. 44, 1920, p. 126—136).

montré que cette méthode s'applique aussi au *problème d'aiguille* proposé par Buffon. On lance une aiguille cylindrique sur un plan horizontal, où sont tracées des parallèles équidistantes; la distance  $2a$  de deux parallèles voisines est supposée plus grande que la longueur  $2b$  de l'aiguille. Quelle est la probabilité  $p$  pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles?

La solution classique est donnée par la formule

$$p = \frac{2b}{\pi a}$$

due à Buffon. On suppose, bien entendu, 1° que la probabilité pour que le centre de l'aiguille soit à l'intérieur d'une partie  $a$  du plan, limitée par un contour convexe fermé, est proportionnelle à l'aire de  $a$ , et 2° que la probabilité pour que l'angle  $\omega$  que fait l'axe de l'aiguille avec une droite fixe du plan soit compris entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , est proportionnelle à la différence  $\omega_2 - \omega_1$ .

Changeons maintenant la première hypothèse et supposons que la probabilité pour qu'un rectangle infinitésimal de dimensions  $dx, dy$  dans la position  $(x, y)$  contienne à son intérieur le centre de l'aiguille, est égale à

$$\varphi(x, y) dx dy,$$

$\varphi$  étant une fonction positive. Supposons de plus qu'il y ait  $n$  parallèles, tracées à l'intérieur d'un carré horizontal; et que les points situés en dehors de ce carré ne peuvent être atteints par le centre de l'aiguille de sorte que

$$\iint \varphi(x, y) dx dy = 1,$$

l'intégration étant étendue à l'intérieur du carré. Si le nombre  $n$  augmente indéfiniment, la probabilité cherchée tend vers la valeur donnée par la formule classique (voir plus haut). Le nombre de parallèles joue ici le même rôle que le nombre  $n$  d'aires couvertes de hachures dans le problème de la roulette. La fonction  $\varphi$  représente ce que nous nommons *densité de probabilité*. Les hypothèses de Buffon qui conduisent à la formule classique correspondent au cas, où  $\varphi$  est égal à une constante (densité uniforme de probabilité). —

Je vais exposer, dans ce travail, l'application de la méthode à deux problèmes particuliers (nos 1 et 2); enfin je me permettrai de faire quelques remarques sur elle.

## 1. Premier problème.

Une boule sphérique repose sur un plan horizontal. La surface de la sphère est divisée par un grand cercle  $\mathcal{A}$  en deux parties dont nous appellerons une rouge, l'autre blanche. Supposons que la sphère ait, au début de chaque expérience, la même position initiale de sorte que le point de contact  $A_1$  de la sphère avec le plan soit au centre de la partie rouge; le cercle  $\mathcal{A}$  est alors horizontal. Imprimons à la sphère une vitesse de rotation autour d'un axe horizontal passant par son centre et supposons qu'elle roulera sans glisser sur le plan et qu'elle s'arrêtera à cause du frottement dans une position finale; cette position dépend de la direction de la vitesse angulaire initiale et de sa grandeur.

Quelle est la probabilité pour que le point de contact dans la position finale appartienne à la partie rouge de la sphère?

Soit  $d$  une droite horizontale passant par le point  $A_1$  et soit  $ABCD$  la circonférence d'un grand cercle vertical de la sphère qui roule sur la droite  $d$  pendant le mouvement en question. Nous désignerons par  $A, B, C, \dots$  les points déterminés de la sphère qui se meuvent avec elle; et par  $A_1, B_1, C_1, \dots, A_2, B_2, \dots$  des points du plan horizontal. Soit  $A$  le centre de la partie rouge de la surface sphérique et  $C$  celui de la partie blanche;  $B$  et  $D$  sont les extrémités d'un diamètre de la sphère (ce diamètre est horizontal dans la position initiale). Les arcs  $AB, BC, CD$  et  $DA$  sont égaux entre eux; chacun est égal à un quart de la circonférence entière. Dans la position initiale, le point de contact  $A_1$  se confond avec  $A$ ; quand la sphère aura tourné de  $90^\circ$ , ce sera au point  $B_1$  que le contact aura lieu (le point  $B_1$  coïncidera alors avec  $B$ , le segment  $A_1B_1$  étant égal à l'arc  $AB$ ); quand la sphère aura tourné de  $180^\circ$ , le contact aura lieu au point  $C_1$  qui coïncidera avec  $C$  et ainsi de suite. On a (voir la figure 1<sup>1</sup>)

$$A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_2 = A_2B_2 = \dots = \text{arc } AB.$$

Considérons toutes les droites horizontales  $d$  qui passent par le point fixe  $A_1$ . Nous obtenons ainsi une infinité de mouvements qui, à partir de la même position initiale, amènent la sphère dans des positions différentes. Chaque point  $M_1$  du plan horizontal correspond à une position parfaitement déterminée de la

<sup>1</sup> Dans les figures 1 et 2 le rayon de la sphère est supposé égal à l'unité. Les longueurs des rayons des circonférences concentriques  $\pi, 2\pi, \dots$  sont mises en parenthèses.

sphère; pour l'amener dans cette position, il faut la faire rouler à partir de la position initiale donnée de telle sorte que son point de contact avec le plan décrive le segment rectiligne  $A_1M_1$ .

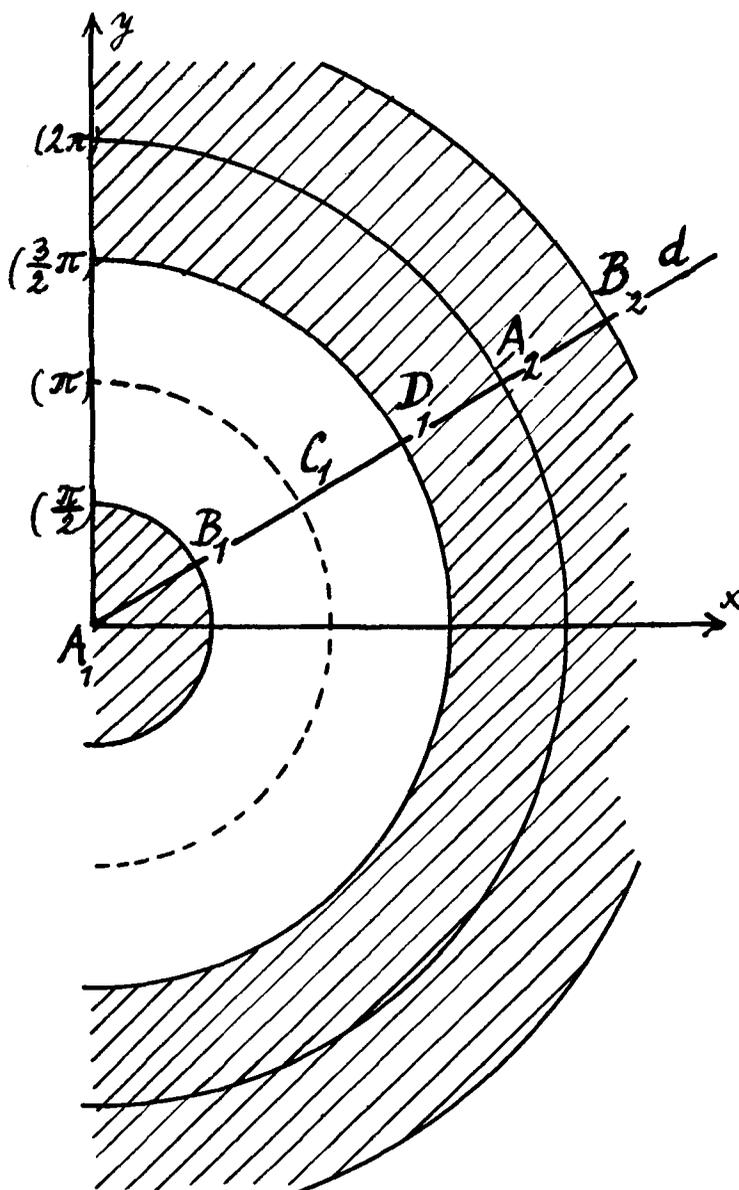


Fig. 1.

Soit  $M_1$  un point quelconque du plan horizontal et considérons la position de la sphère où elle touche le plan au point  $M_1$ ; et soit  $M$  le point de la sphère

qui coïncide avec  $M_1$  dans cette position particulière. Nous dirons qu'il y a contact de première espèce, si  $M$  appartient à la partie rouge et qu'il y a contact de seconde espèce, si  $M$  appartient à la partie blanche.

Couvrons de hachures les parties du plan qui contiennent des points  $M_1$  correspondant au contact de première espèce. Le domaine couvert de hachures se compose d'un cercle de rayon  $A_1B_1 = \frac{1}{2}\pi a$  et d'une infinité de couronnes circulaires concentriques. Les rayons des circonférences qui limitent la  $n^{\text{ième}}$  couronne sont

$$2n\pi a - \frac{\pi a}{2} \text{ et } 2n\pi a + \frac{\pi a}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Une moitié de la première couronne est représentée dans la figure 1.

Choisissons dans le plan horizontal un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires dont l'origine se trouve au point  $A_1$ . L'énergie cinétique de la sphère à l'instant initial étant supposée inférieure à une limite fixe, le point de contact dans la position finale sera toujours à l'intérieur d'un cercle  $\Pi$  qui a le point  $A_1$  pour centre; soit  $l$  le rayon de ce cercle. La probabilité pour que, dans une expérience, la sphère s'arrête de sorte que le point de contact relatif à la position finale se trouve à l'intérieur d'un rectangle dont  $(x, y)$  est un sommet et dont les côtés sont  $dx, dy$ , est égale à

$$\varphi(x, y) dx dy.$$

La probabilité  $p$  pour que le point de contact relatif à la position finale se trouve à l'intérieur d'un domaine  $P$  est donnée par la formule

$$p = \iint_P \varphi(x, y) dx dy.$$

La fonction  $\varphi(x, y)$  mesure la densité de probabilité. Elle dépend du frottement dans diverses directions que peut avoir la droite  $d$  ainsi que de la manière que l'on emploie pour mettre la sphère en mouvement; elle est positive ou nulle à l'intérieur de  $\Pi$ , nulle en dehors de  $\Pi$  et elle vérifie la condition

$$\iint_{\Pi} \varphi(x, y) dx dy = 1.$$

Nous introduirons dans les calculs suivants une fonction  $f(x, y)$  proportionnelle à  $\varphi$ ; on a  $f = k\varphi$ , où la constante  $k$  est déterminée par la condition précédente. La probabilité  $p$  sera donc exprimée par la formule

$$p = \frac{\int \int_P f(x, y) dx dy}{\int \int_U f(x, y) dx dy} \quad (1)$$

Cela posé, notre problème s'énonce comme il suit: un point  $M_1(x, y)$  étant pris à l'intérieur de  $\Pi$ , quelle est la probabilité pour qu'il soit situé dans le domaine couvert de hachures (fig. 1)?

Supposons 1° que la fonction  $f$  ne dépend que de la distance

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

du point  $(x, y)$  à l'origine, et 2° qu'il y a un très grand nombre  $n$  de couronnes couvertes de hachures à l'intérieur du cercle  $\Pi$  de rayon  $l$  (qui contient à son intérieur le point de contact de la sphère avec le plan).

Dans ce cas, le problème est tout à fait analogue au problème de la roulette (voir l'Introduction). Si l'on emploie les coordonnées polaires, la probabilité cherchée  $p$  est

$$p = \frac{\int \int_P F(\varrho) \varrho d\varrho d\theta}{\int \int_U F(\varrho) \varrho d\varrho d\theta}$$

ou bien, en effectuant l'intégration par rapport à l'angle polaire  $\theta$ ,

$$p = \frac{\int_P F(\varrho) \varrho d\varrho}{\int_0^l F(\varrho) \varrho d\varrho}$$

$P$  étant l'ensemble de valeurs du rayon vecteur  $\varrho$  qui correspondent à l'intérieur des couronnes couvertes de hachures. Divisons l'intervalle  $(0, l)$  en un très grand

nombre d'intervalles égaux qui correspondront alternativement aux couronnes couvertes de hachures et aux couronnes blanches. Or quelle que soit la fonction  $F(\varrho)$  pourvu que  $F(\varrho) \cdot \varrho$  satisfasse aux conditions d'ordre très général (voir l'Introduction), l'intégrale au numérateur est égale à une moitié de celle au dénominateur. Donc la probabilité tend vers  $\frac{1}{2}$ , lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Remarquons qu'on arrive au même résultat en supposant que la fonction  $F$  soit inversement proportionnelle à la distance  $\varrho$ . Dans ce cas la probabilité sera égale à l'expression

$$\frac{2\pi k \int_P^l d\varrho}{2\pi k \int_0^l d\varrho} = \frac{\int_P^l d\varrho}{l}$$

qui tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

## 2. Second problème.

Nous aurons à considérer les mêmes mouvements de roulement d'une sphère sur un plan horizontal comme dans le n° précédent. Mais nous supposons maintenant que la surface de la sphère soit divisée en six parties égales. Voici l'énoncé du problème:

La surface d'une sphère est divisée en six quadrilatères réguliers égaux dont les côtés sont de arcs de grands cercles et dont les sommets appartiennent à un cube inscrit. Supposons que la sphère repose sur un plan horizontal de sorte que le contact avec le plan ait lieu à un point déterminé de sa surface. On imprime à la sphère une vitesse de rotation de sorte qu'elle roule sans glisser sur le plan et qu'elle s'arrête après avoir fait  $n$  tours au plus. Quelles sont les probabilités  $p_I, p_{II}, \dots, p_{VI}$  pour que le point de contact, dans la position finale, soit à l'intérieur du premier, second, ... sixième quadrilatère?

Nous donnerons la solution du problème pour deux positions initiales particulières.

Premier cas. — Soient  $A, B, C, D, E, F, G, H$  les sommets du cube inscrit dans la sphère, de sorte que, dans la position initiale, les faces  $ABCD$  et

$EFGH$  soient horizontales, les arêtes  $AE$ ,  $BF$ ,  $CG$  et  $DH$  étant verticales. Les arcs des grands cercles sous-tendus par les arêtes du cube forment les côtés de six quadrilatères sphériques; les angles intérieurs de ces quadrilatères sont égaux à  $\frac{2}{3}\pi$ . Désignons par I, II, III, IV, V et VI respectivement les quadrilatères  $ABCD$ ,  $ABFE$ ,  $BCGF$ ,  $CDHG$ ,  $DAEH$  et  $EFGH$ .

Supposons que, dans la position initiale, la sphère touche le plan horizontal au point  $O_1$  qui coïncide avec le centre du quadrilatère I.

Lorsque la sphère roule, le point de contact avec le plan décrit une droite  $d$  passant par  $O_1$ ; et le lieu des points de la sphère qui deviennent successivement points de contact est un grand cercle  $k$  dont le plan fait un angle  $\varphi$  avec le plan diagonal  $ACGE$  du cube dans sa position initiale. Le cercle  $k$  passe par le point  $O'$  opposé de  $O$  sur la sphère et il coupe les arcs  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{GH}$  et  $\widehat{DC}$  en des points que nous désignerons respectivement par  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$ .

On a, dans le triangle sphérique  $O_1MA$ ,

$$\text{angle } O_1\widehat{A}M = \frac{\pi}{3}, \quad \text{angle } A\widehat{O}_1M = \varphi, \quad \sin(\widehat{OA}) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos(\widehat{OA}) = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Donc, pour déterminer le côté

$$O_1\widehat{M} = r,$$

nous avons les équations

$$\cos(O_1\widehat{MA}) = -\cos\varphi \cos\frac{\pi}{3} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\sin r : \sin(\widehat{O}_1A) = \sin\frac{\pi}{3} : \sin(O_1\widehat{MA}),$$

d'où

$$\sin r = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

ou

$$\sin r = \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}}.$$

Lorsque la sphère roule sur  $d$ , les points  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  deviennent successivement points de contact avec le plan dans les positions  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $M_2$ , ...

et ainsi de suite sur la droite  $d$ ; l'angle compris entre  $d$  et entre la droite  $O_1A_1$  est égal à  $\varphi$ . On a en général,  $a$  étant le rayon de la sphère,

$$\begin{aligned} O_1M_n &= (2[n-1]\pi+r)a, & O_1N_n &= ([2n-1]\pi-r)a \\ O_1P_n &= ([2n-1]\pi+r)a, & O_1Q_n &= (2n\pi-r)a \\ & & (n &= 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

$r$  étant l'angle aigu dont le sinus est déterminé par la formule donnée plus haut.

Lorsque la droite  $d$  tourne autour de  $O_1$ , les lignes lieux de points  $M_1, N_1, \dots, M_2, \dots$  divisent le plan en quadrilatères curvilignes en nombre infini que nous désignerons par I, II,  $\dots$ . Ainsi les quadrilatères plans marqués par la chiffre I contiennent de points  $L_1$  tels que, si la sphère touche le plan au point  $L_1$  c'est un point  $L$  du quadrilatère sphérique I qui coïncide avec  $L_1$ . Deux quadrilatères I sont représentés dans la figure 2; l'un convexe  $A_1B_1C_1D_1$ , l'autre à connexion double  $A_2B_2C_2D_2$ .<sup>1</sup>

Les probabilités  $p_I, p_{II} \dots p_{VI}$  pour que, dans la position finale de la sphère, le point de contact soit situé dans le quadrilatère sphérique I, II,  $\dots$  se calculent d'après la formule (1). La sphère ne pouvant tourner plus de  $n$  fois, le point de contact ne sortira jamais du cercle  $\Pi$  décrit autour de  $O_1$  avec le rayon  $2n\pi a$ ; nous représenterons par  $\Pi$  l'aire du cercle, donc

$$\Pi = 4\pi^2 n^2 a^2.$$

Dans la formule (1), la lettre  $P$  désignera maintenant l'ensemble de quadrilatères I ou II,  $\dots$ , s'il s'agit de calculer la probabilité  $p_I$  ou  $p_{II}, \dots$ . La fonction  $f$  qui est nulle en dehors de  $\Pi$  est supposée ne dépendre que du rayon vecteur  $\varrho$ ; donc en introduisant les coordonnées polaires on a

$$p = \frac{\int \int_P F(\varrho) d\varrho d\varphi}{\int \int_{\Pi} F(\varrho) d\varrho d\varphi} \quad (1')$$

Nous allons calculer les probabilités  $p_I, p_{II}, \dots, p_{VI}$  en supposant d'abord que la fonction  $F$  soit égale à l'unité pour passer ensuite au cas général.

---

<sup>1</sup> Ces quatre points sont situés sur le bord intérieur; le bord extérieur contient les points que nous pouvons désigner par  $A_3, B_3, C_3$  et  $D_3$  (non représentés sur la figure).

Soit  $F=1$ . Cela veut dire que la densité de probabilité est uniforme; la probabilité pour que, dans la position finale de la sphère, le point de contact

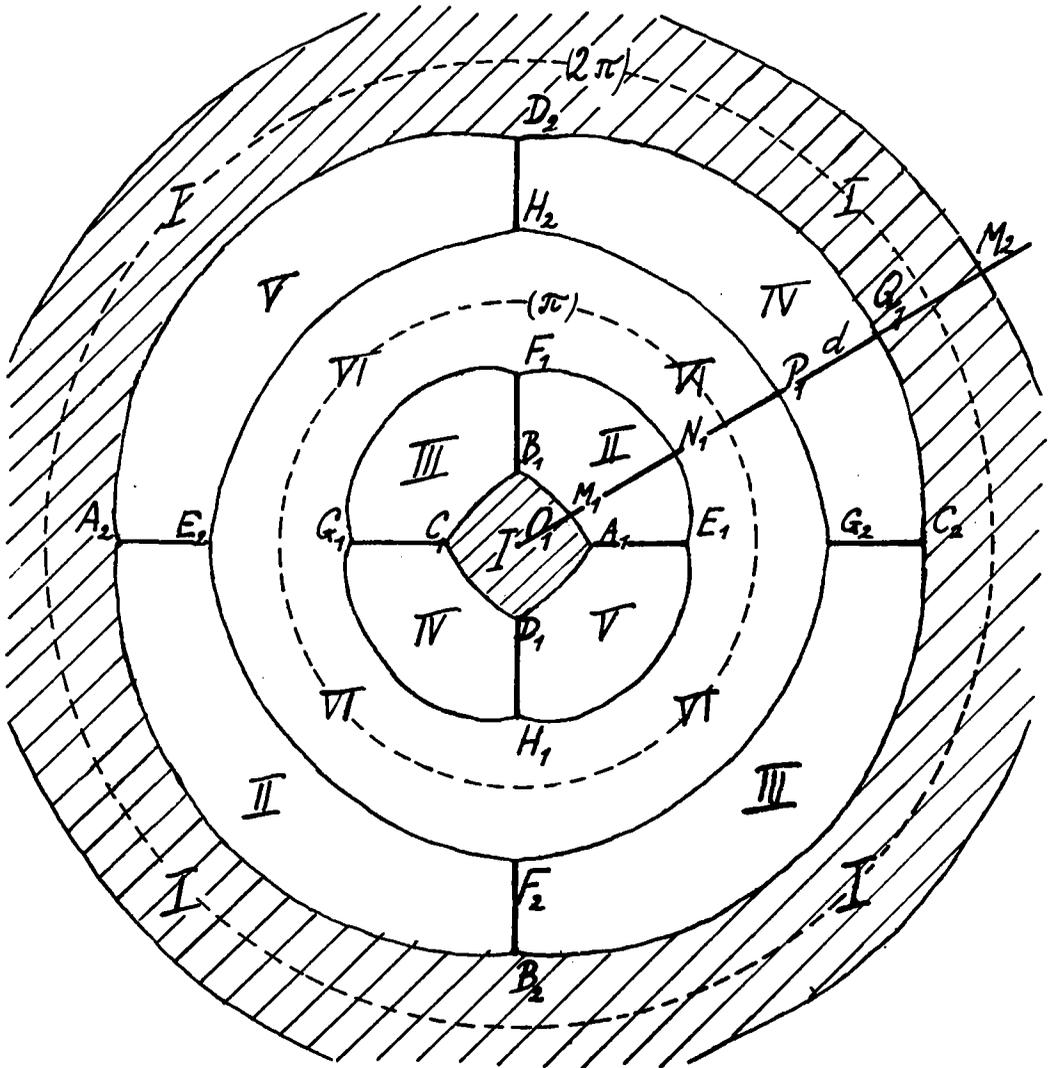


Fig. 2.

soit situé à l'intérieur d'un élément infinitésimal  $d\omega$  du plan est proportionnelle à l'aire de  $d\omega$  et ne dépend pas de sa position.

Couvrons de hachures tous les quadrilatères plans I; la probabilité  $p_1$  sera égale au rapport de l'aire totale  $P$  couverte de hachures à l'aire du cercle II.

Pour évaluer ce rapport, divisons  $\Pi$  au moyen des circonférences concentriques de rayons

$$2\pi a, 4\pi a, 6\pi a, \dots 2(n-1)\pi a$$

en  $n$  parties que nous représenterons par

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots \Gamma_n.$$

$\Gamma_1$  est un cercle de rayon  $2\pi a$ ;  $\Gamma_m$  ( $m > 1$ ) est une couronne circulaire dont les rayons sont  $2(m-1)\pi a$  et  $2m\pi a$ . La couronne  $\Gamma_m$  comprend des parties blanches et des parties couvertes de hachures. L'ensemble  $C_m$  de ces dernières est constitué par deux couronnes non circulaires; les équations, en coordonnées polaires (pôle en  $O_1$ , axe polaire dirigé suivant  $O_1A_1$ ), des bords de la première couronne sont

$$\varrho = 2(m-1)\pi a; \quad \varrho = 2(m-1)\pi a + ra$$

et celles des bords de la seconde

$$\varrho = 2m\pi a - ra, \quad \varrho = 2m\pi a.$$

L'aire totale de  $C_m$  sera donc

$$C_m = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{[2(m-1)\pi + r]^2 - [2(m-1)\pi]^2 + [2m\pi]^2 - [2m\pi a - r]^2\} d\varphi$$

ou

$$C_m = 8(2m-1)\pi I a^2, \tag{2}$$

où  $I$  désigne l'intégrale définie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi$$

ou

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}} d\varphi. \tag{3}$$

La valeur approchée de cette intégrale est 1'319 ...

D'autre part on a

$$\Gamma_m = \pi a^2 [(2m\pi)^2 - (2m-1\pi)^2] = 4\pi^3(m-1)a^2.$$

La valeur du rapport

$$\lambda = \frac{C_m}{\Gamma_m} = \frac{2I}{\pi^2} \tag{4}$$

qui ne dépend pas de  $m$  est égale à peu près, à 0'267 ... Nous avons donc pour la probabilité cherchée

$$p_I = \frac{P}{\Pi} = \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n} = \lambda = 0'267 \dots$$

Pour obtenir  $p_{II}$ , désignons par  $C'_m$  l'aire de la couronne comprise entre les courbes

$$\varrho = (2m-1)\pi a - ra \text{ et } \varrho = (2m-1)\pi a + ra.$$

On trouve

$$C'_m = 8(2m-1)\pi I a^2 = C_m$$

donc

$$p_{VI} = p_I = \frac{2I}{\pi^2} = 0'267 \dots$$

La somme

$$p_I + p_{II} + \dots + p_{VI}$$

étant égale à l'unité nous avons

$$p_{II} + p_{III} + p_{IV} + p_V = 1 - 2p_I = 0'466 \dots$$

et, puisque ces quatre probabilités sont égales entre elles,

$$p_{II} = p_{III} = p_{IV} = p_V = \frac{1}{4} - \frac{I}{\pi^2} = 0'116 \dots$$

Passons au cas général et supposons que la *densité de probabilité est proportionnelle à une fonction du rayon vecteur*  $\varrho$  et que la dérivée de cette fonction est plus petite en valeur absolue qu'une constante  $K$ . La probabilité  $p_I$  sera exprimée par la formule (1'), où  $P$  désigne l'aire totale des parties couvertes de

hachures comprises à l'intérieur du cercle  $\Pi$ . Nous écrivons

$$p_1 = \frac{S'}{S},$$

où

$$S' = \int_P \int F(\varrho) \varrho d\varrho d\varphi, \quad S = \int_{\Pi} \int F(\varrho) \varrho d\varrho d\varphi.$$

Posons encore

$$S'_m = \int_{C_m} \int F(\varrho) \varrho d\varrho d\varphi, \quad S_m = \int_{\Gamma_m} \int F(\varrho) \varrho d\varrho d\varphi$$

et désignons par  $M$  et  $\mu$  la plus grande et la plus petite valeur de la fonction  $F$  dans  $\Gamma_m$ . Nous aurons

$$\lambda S_m < \lambda M \Gamma_m$$

et, puisque  $C_m$  est égale à  $\lambda \Gamma_m$ ,

$$S'_m > \lambda \mu \Gamma_m.$$

Retranchons membre à membre ces deux inégalités, il vient

$$\lambda S_m - S'_m < \lambda(M - \mu) \Gamma_m.$$

Faisons la somme pour  $m = 1, 2, \dots, n$  et remarquons que l'on a

$$M - \mu < 2\pi aK;$$

la somme des aires  $\Gamma_m$  étant égale à  $\Pi$ , on obtient le résultat

$$\lambda S - S' < 2\pi \lambda a K \Pi, \tag{5}$$

où

$$\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2.$$

Il en résulte que la formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'}{S} = \lambda \tag{6}$$

sera valable dans deux cas:

1° si,  $n$  augmentant indéfiniment, le second membre de l'inégalité (5) tend vers zéro; ou

2° si le second membre de (5) est constamment plus petit qu'une quantité constante, mais si en même temps  $S$  et  $S'$  augmentent indéfiniment.

Les valeurs limites des probabilités  $p_{II}$ ,  $p_{III}$ , ... se calculent de la même manière.

En résumé, nous avons le résultat suivant :

*Supposons que, dans la position initiale, la sphère touche le plan horizontal au point  $O_1$  qui coïncide avec le centre  $O$  du quadrilatère sphérique  $I$ , que la densité de probabilité ne dépend que de la distance  $\varrho$  entre  $O_1$  et entre le point de contact final, et que la dérivée de cette fonction soit bornée; si le second membre de l'inégalité (5) tend vers zéro, ou s'il demeure plus petit qu'une constante tandis que  $S$  et  $S'$  augmentent indéfiniment, les valeurs limites des probabilités relatives aux quadrilatères opposés  $I$  et  $VI$  sont*

$$\lim_{n=\infty} p_I = \lim_{n=\infty} p_{VI} = \frac{2I}{\pi^2} \quad (7 a)$$

et les autres

$$\lim_{n=\infty} p_{II} = \lim_{n=\infty} p_{III} = \lim_{n=\infty} p_{IV} = \lim_{n=\infty} p_V = \frac{1}{4} - \frac{I}{\pi^2}, \quad (7 b)$$

$I$  étant l'intégrale (3).

Le second membre de (5) contient trois quantités  $a$ ,  $K$  et  $II$ ; si l'on en veut déduire la relation (6), il faut qu'il y ait quelques relations entre ces quantités. Examinons deux cas particuliers suivants.

Supposons d'abord que la fonction  $F(\varrho)$  soit donnée et que l'on donne en même temps le rayon du cercle  $II$ , d'où le point de contact de la sphère avec le plan ne peut jamais sortir. On a

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{II}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n}}$$

et par conséquent

$$\lambda S - S' < \lambda \cdot \sqrt{\frac{II^3}{\pi}} \cdot K \cdot \frac{1}{n}.$$

Le second membre tend vers zéro, si  $n$  augmente indéfiniment c'est-à-dire si  $a$  diminue de telle manière que  $an$  demeure constant. On arrive ainsi à la formule (6).

Si c'est au contraire le rayon  $a$  de la sphère qui est donné d'avance, écrivons la relation (5) sous la forme

$$\lambda S - S' < 8\pi^3 a^3 \lambda K n^2.$$

Lorsque  $n$  augmente indéfiniment,  $S$  et  $S'$  deviennent aussi infiniment grandes. Il suffit donc, pour obtenir la relation (6) et les formules (7) qui en sont des conséquences, de supposer que la fonction  $F(\varrho)$  change avec  $n$  d'une telle manière que la quantité  $K n^2$  soit toujours plus petite qu'une constante. En d'autres mots, si le rayon  $2\pi n a$  du cercle  $\Pi$  augmente indéfiniment, il faut prendre des fonctions  $F(\varrho)$  ayant des dérivées de plus en plus petites pour obtenir une valeur de  $\frac{S'}{S}$  qui diffère peu de  $\lambda$ .

Second cas. — Supposons maintenant que, dans la position initiale, le point de contact coïncide avec le sommet  $A$  du cube inscrit. Le calcul des probabilités  $p_I, p_{II}, \dots$  s'effectue comme dans le premier cas. Je me borne à énoncer les résultats essentiels.

Si la fonction  $F$  est constante (densité uniforme de probabilité à l'intérieur de  $\Pi$ ), posons

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5 - \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\varphi\right)}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} r' d\varphi \quad (8)$$

et

$$\sin r' = \frac{2}{\sqrt{5 - \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\varphi\right)}};$$

dans la formule (8), il faut déterminer la fonction  $\arcsin \dots$  de telle façon qu'elle soit continue par rapport à la variable  $\varphi$ , qu'elle augmente constamment dans l'intervalle  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  et qu'elle se réduise à  $\frac{\pi}{2}$ , quand  $\varphi$  est égal à  $\frac{\pi}{6}$ .

La valeur approchée de  $I'$  est 1,645...

Pour trouver  $p_I$ , divisons le cercle  $\Pi$  en parties  $\Gamma_m$  comme dans le cas précédent et, à l'intérieur de  $\Gamma_m$ , couvrons de hachures les parties relatives au quadrilatère I; on fera la figure d'après les mêmes principes qui ont servi pour construire la figure 2. La probabilité  $p_I$  sera égale au rapport de la partie

converti de hachures à  $\Gamma_m$ . Ce rapport  $\lambda'$ , indépendant de  $m$ , est donné par la formule

$$\lambda' = \frac{I'}{\pi^2}; \quad (9)$$

sa valeur approchée 0,1666... est très voisine de  $\frac{1}{6}$ . On trouve

$$p_I = p_{II} = p_V = \frac{I'}{\pi^2} = 0,1666 \dots$$

$$p_{III} = p_{IV} = p_{VI} = \frac{1}{3}(1 - 3p_I) = \frac{1}{3} - \frac{I'}{\pi^2} = 0,1666 \dots$$

On introduira la fonction arbitraire  $F(\varrho)$  comme dans le cas précédent. Voici le résultat:

*Si la sphère, dans la position initiale, repose sur le sommet A du cube inscrit qui est en même temps sommet commun des quadrilatères sphériques I, II et V, les mêmes hypothèses d'ailleurs étant admises comme dans le premier cas, on aura, n augmentant indéfiniment*

$$\lim p_I = \lim p_{II} = \lim p_V = \frac{I'}{\pi^2} \quad (10 a)$$

$$\lim p_{III} = \lim p_{IV} = \lim p_{VI} = \frac{1}{3} - \frac{I'}{\pi^2}; \quad (10 b)$$

*l'intégrale  $I'$  est définie par la formule (8).*

Toutes les six valeurs  $\lim p_I$ ,  $\lim p_{II}$ , ... sont très voisines de  $\frac{1}{6}$ .

### 3. Sur l'emploi de la méthode des fonctions arbitraires. Probabilités discontinues et probabilités continues.

Dans tous les problèmes que nous avons rappelés dans l'Introduction ou dont nous nous sommes occupés dans ce travail, un paramètre  $n$  joue un certain rôle. On divise le champ d'intégration d'une intégrale donnée en  $n$  parties dont les unes sont couvertes de hachures, les autres blanches. L'intégrale est divisée ainsi en  $n$  parties; elle sera égale à la somme des intégrales étendues aux domaines couverts de hachures augmentée de la somme de celles qui sont étendues

aux domaines blancs. Le rapport de ces deux sommes dépend en général de la fonction intégrée; mais, si  $n$  augmente indéfiniment, il tend vers une limite qui ne dépend pas de cette fonction pourvu qu'elle vérifie certaines conditions relatives à la continuité ou à la dérivabilité.

Dans les applications aux problèmes réels le nombre  $n$  est toujours fini. Nous avons vu, au n° 2, dans deux cas particuliers, comment il faut choisir  $n$  et les quantités  $K$  et  $a$  pour obtenir un résultat à peu près indépendant de la fonction arbitraire.

Le problème d'aiguille ainsi que les problèmes traités dans ce travail ne sont que des cas particuliers du problème général suivant: on lance un corps solide sur un plan horizontal; calculer la probabilité pour que la position finale du corps satisfasse à des conditions données  $C$ .

Un tel corps étant donné il faut, pour résoudre ce problème, supposer quelque chose sur la nature du mouvement. Par exemple, on pourrait chercher la solution en adoptant les hypothèses suivantes: 1° que l'état initial du corps (position et vitesses à l'instant  $t=0$ ) est déterminé par les valeurs  $x, y, z, \dots$  de certains paramètres; 2° qu'il y a une seule position finale d'équilibre bien déterminée qui correspond aux conditions initiales données; 3° que l'état initial défini par les valeurs  $x, y, z, \dots$  (qui peuvent varier d'une expérience à l'autre) ne s'écarte jamais beaucoup d'un état initial fixe  $(x_0, y_0, z_0, \dots)$  ce qui s'exprime par un système d'inégalités entre les quantités  $x, y, \dots, x_0, y_0, \dots$ . Cela posé soit

$$f(x_0, y_0, z_0, \dots) dx_0 dy_0 dz_0 \dots \quad (11)$$

la probabilité pour que la quantité  $x$  soit comprise entre  $x_0$  et  $(x_0 + dx_0)$ , et que en même temps  $y$  soit entre les limites  $y_0$  et  $(y_0 + dy_0)$  et ainsi de suite. La probabilité cherchée  $p$  s'obtient en intégrant l'expression (11) par rapport aux quantités  $x_0, y_0, z_0, \dots$  le domaine d'intégration  $\mathcal{A}$  étant constitué par l'ensemble d'états »favorables»  $(x_0, y_0, z_0, \dots)$  c'est-à-dire états initiaux qui entraînent des positions finales compatibles avec les conditions  $C$ . Le domaine  $\mathcal{A}$  se compose d'un certain nombre de domaines partiels  $D$  qui sont séparées les unes des autres; le nombre  $n$  (qui correspond précisément au nombre de secteurs dans le problème de roulette) augmente, si les limites entre lesquelles peuvent varier les quantités  $x, y, z, \dots$  deviennent plus larges.

La probabilité  $p$  peut tendre vers une limite, lorsque  $n$  augmente indéfiniment; et cette limite peut dépendre ou non de la fonction  $f$ . Pour se rendre

compte de ces relations, il faut en premier lieu étudier la distribution de domaines  $D$  dans l'espace rempli par tous les points  $(x_0, y_0, z_0, \dots)$ . —

En résumé, chaque problème de probabilités, où il s'agit des mouvements continus de différents corps, peut être traité comme un problème de probabilités continues. Tels sont les problèmes relatifs aux jeux, où l'on jette un dé, ou une pièce de monnaie, ou l'aiguille de Buffon etc.; ou les problèmes, où il s'agit de mouvements des boules (tirages successifs des boules d'une urne, agitation des boules contenues dans une urne) et ainsi de suite.

Les solutions classiques de ces problèmes reposent sur une énumération simple des cas possibles et des cas favorables; elles sont insuffisantes. Prenons par exemple le jeu avec un dé. La théorie élémentaire se contente de dire qu'il y a six cas possibles dont un seul est favorable, quand on cherche à amener un point donné dans un seul coup; donc la probabilité est égale à  $\frac{1}{6}$ . Mais il faut tenir compte de ce que, en réalité, l'ensemble de cas possibles (toutes les positions possibles du dé sur la table) est un ensemble continu; il en est de même de l'ensemble de cas favorables. L'emploi des méthodes fondées sur la notion de probabilité continue est indispensable, si l'on veut dans un tel cas assigner une valeur numérique à la probabilité. Il faut partir des hypothèses sur la nature du mouvement en question, introduire une densité de probabilité qui en général n'est pas uniforme et soumettre le mouvement au calcul. La méthode des fonctions arbitraires est très générale; elle pourra être appliquée dans beaucoup de questions de ce genre.

