ÜBER EINEN NEUEN TYPUS LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

LUDWIG SCHLESINGER

in GIESSEN.

Dem sogenannten Riemannschen Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen (eine lineare Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus zu bestimmen, deren singuläre Punkte und Monodromiegruppe vorgeschrieben sind) hat HILBERT[1] die folgende Wendung gegeben: Es sei auf einer geschlossenen analytischen Kurve C eine Matrix S von Funktionen des Orts mit nicht verschwindender Determinante beliebig vorgeschrieben, man finde eine Matrix Y_i von innerhalb C holomorphen Funktionen und eine Matrix Y_a von ausserhalb C holomorphen (oder höchstens im Unendlichen polar singulären) Funktionen, deren Randwerte auf C durch die Relation $\overline{Y}_a = S . \overline{Y}_i$ verknüpft sind, wo der Überstrich eben die Randwerte andeuten soll. Der Nachweis, dass solche Matrizen existieren, lässt sich mit Hilfe der Fredholmschen Theorie der Integralgleichungen[2] oder durch sukzessive Approximationen[3] erbringen, diese Existenzbeweise geben jedoch keine Einsicht in die analytische Natur des Hilbertschen Problems. Von dem Bestreben geleitet, eine solche Einsicht zu gewinnen, wurde ich zu einem Typus von linearen Differentialgleichungen geführt, deren Interesse mir über das, was mit der Hilbertschen Fragestellung zusammenhängt, hinauszureichen scheint und es ist mir

[1] D. HILBERT, Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses, 1905, S. 233; Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912, S. 81.

[2] Siehe HILBERT a. a. O., J. PLEMELJ, Monatshefte für Math. und Physik XIX, (1908), S. 211, G. D. BIRKHOFF, Mathem. Annalen 74, 1913, S. 122 u. A.

[3] G. D. BIRKHOFF, Proceedings of the American Academy of Arts and Science, 49, 1913, S. 521.

eine besondere Freude, einen ersten Teil der erzielten Ergebnisse dem allverehrten Meister der Analysis Herrn G. MITTAG-LEFFLER als Zeichen treuer und dankbarer Gesinnung darbringen zu können.

I.

Wir betrachten, um mit dem denkbar einfachsten zu beginnen, eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{dy}{dx}=y\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{r_\nu}{x-a_\nu}, \tag{1}$$

wo die a_ν, r_ν Konstanten bedeuten, deren allgemeine Lösung ja sofort in expliziter Form hingeschrieben werden kann. Die a_ν denken wir uns durch eine geschlossene analytische Kurve C verbunden; ohne dadurch die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken können wir annehmen, dass diese, die im Endlichen gelegenen singulären Punkte verbindende Kurve, der Einheitskreis $E(|x|=1)$ sei[1]. Durchläuft man die Peripherie des Einheitskreises im positiven Sinne, so mögen die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ in dieser Reihenfolge getroffen werden. Die Lösung y_i von (1), die für $x=0$ den Wert 1 annimmt, ist innerhalb E holomorph; y_a sei die in der Umgebung von $x=\infty$, also ausserhalb E definierte Lösung, die im Allgemeinen in der Umgebung von $x=\infty$ mehrdeutig, also nur abgesehen von einer Potenz von

$$\omega_{\sigma+1}=e^{2\pi i r_{\sigma+1}},\ r_{\sigma+1}=-\sum_{\nu=1}^{\sigma}r_\nu,$$

als Faktor bestimmt ist. Wir setzen der Einfachheit zuliebe im folgenden immer voraus, dass $\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}r_\nu=0$ sei, dann ist also y_a ausserhalb E holomorph. — Es sei wenn ξ dem Bogen (a_σ, a_1) von E angehört

[1] Man braucht nur entweder das Innere der analytischen Kurve C auf das Innere des Einheitskreises (vergl. M. HAMBURGER, Sitzungsberichte der Berl. Math. Gesellschaft II, 1903, S. 20 ff.) oder einen die Kurve C einschliessenden Ring auf den Ring $\frac{1}{\varrho}<|x|<\varrho$ homöometrisch abzubilden. FUCHS hatte (1873, Werke I, S. 361) den vergeblichen Versuch gemacht, eine brauchbare Abbildung mit Hilfe einer rationalen Funktion (später durch algebraische Funktionen) zu erzielen; die stets mögliche analytische Abbildung leistet aber dieselben Dienste, und dann kann der zweite Teil der Fuchsschen Abhandlung voll zur Geltung gebracht werden.

$$\bar{y}_a(\xi) = s_\sigma \cdot \bar{y}_i(\xi), \tag{2}$$

wo s_σ eine Konstante bedeutet und der Überstrich wieder die Randwerte andeuten soll. Dann gilt für die Punkte ξ des Bogens $(a_\nu, a_{\nu+1})$ von E

$$\bar{y}_a(\xi) = s_\nu \cdot \bar{y}_i(\xi), \quad s_\nu = s_\sigma \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \ldots \omega_\nu, \quad \omega_k = e^{2\pi i r_k}. \tag{3}$$

Wir bringen nunmehr in der Differentialgleichung (1) das Volterra-Fredholmsche Prinzip zur Geltung, indem wir von der rechts stehenden Summe durch den Grenzübergang $\sigma \to \infty$ zu einem über den Kreis E erstreckten Integral übergehen. Es sei etwa $a_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{\sigma}}$ und

$$r_\nu = \delta_\nu \cdot r(a_\nu), \quad \delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu, \tag{4}$$

wo $r(\xi)$ für $\xi = e^{\theta i}$ eine nach 2π periodische Funktion der reellen Variabeln θ bedeutet, die wir als stetig und abteilungsweise analytisch voraussetzen wollen, und

$$\delta_\nu = a_\nu(a_1 - 1) = a_\nu\left(\frac{2\pi}{\sigma} + \frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2 + \cdots\right) i \tag{5}$$

ist. Wir haben dann

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_\nu}{x - a_\nu} = \int_0^{2\pi} \frac{r(\xi)\, \xi \, . \, i\, d\theta}{x - \xi} = \int_E \frac{r(\xi)}{x - \xi}\, d\xi, \tag{6}$$

die Differentialgleichung (1) geht also über in

$$\frac{dy}{dx} = y \int_E \frac{r(\xi)}{x - \xi}\, d\xi, \tag{7}$$

wo wir auch wieder voraussetzen wollen, dass $\int_E r(\xi)\, d\xi = 0$ ist, so dass die Lösungen von (7) in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph sind, während jetzt der Kreis E eine *singuläre Linie* (Coupure nach Hermite[1]) darstellt. — Die Ausführung desselben Grenzübergangs in den Formeln (3) wird uns Aufschluss über das Verhalten der Lösungen von (7) an dieser singulären Linie geben. Setzen wir

[1] Ch. Hermite, Cours professé à la Faculté des Sc. 3. éd. 1887, S. 71; Crelles Journal 91, 1881, S. 54, Lettre à M. Mittag-Leffler.

$$\omega_\nu = e^{2\pi i r_\nu} = 1 + 2\pi i r_\nu + \frac{(2\pi i r_\nu)^2}{2} + \cdots = 1 + \delta_\nu \, . \, \omega(a_\nu),$$

so ist nach (4) und (5)

$$\omega(\xi) = 2\pi i r(\xi) + \frac{1}{2}(2\pi i r(\xi))^2 \, . \, \xi(a_1 - 1) + \cdots \tag{8}$$

und folglich nach (3), wenn ξ auf dem Bogen $(a_\nu, a_{\nu+1})$ von E liegt,

$$\bar{y}_a(\xi) = s_\sigma \, . \prod_{k=1}^{\nu} (1 + \delta_k \, \omega(a_k)) \, . \, \bar{y}_i(\xi). \tag{9}$$

Nun ist[1] für eine integrierbare Funktion $f(\xi)$

$$\left\{\begin{aligned} \lim_{\sigma\to\infty} \prod_{k=1}^{\nu} (1 + \delta_k f(a_k)) &= \lim_{\sigma\to\infty} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + a_k i \frac{2\pi}{\sigma} f(a_k)\right) = e^{\int_0^\theta f(\xi)\xi i d\theta} = e^{\int_0^\xi f(\xi) d\xi} \\ &= \widehat{\int_0^\xi} (1 + f(\xi) d\xi), \end{aligned}\right. \tag{10}$$

also, da sich nach (8) $\omega(\xi)$ für $\sigma \to \infty$ auf $2\pi i \, . \, r(\xi)$ reduziert,

$$\lim_{\sigma\to\infty} \prod_{k=1}^{\nu} (1 + \delta_k \, \omega(a_k)) = \widehat{\int_0^\xi} (1 + 2\pi i r(\xi) d\xi) = e^{2\pi i \int_0^\xi r(\xi) d\xi}, \tag{11}$$

aus (3) ergibt sich also durch Ausführung des Grenzüberganges

$$\bar{y}_a(\xi) = s(\xi) \, . \, \bar{y}_i(\xi), \tag{12}$$

wo jetzt y_i und y_a innerhalb bezw. ausserhalb E holomorphe Lösungen der Differentialgleichung (7) sind, und

$$s(\xi) = s_\sigma \, . \, e^{2\pi i \int_0^\xi r(\xi) d\xi}, \tag{13}$$

also eine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

---

[1] Siehe z. B. L. SCHLESINGER, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl. 1922, S. 17. In diesem einfachen Falle, wo das Produktintegral als Exponentialfunktion einer Quadratur darstellbar ist, kann der Grenzwert ganz elementar ausgewertet werden.

$$\frac{ds}{d\xi} = s \cdot 2\pi i \cdot r(\xi) \tag{14}$$

ist. Auf eine ins Einzelne gehende Rechtfertigung der ausgeübten Grenzübergänge wollen wir verzichten, da sich die Richtigkeit der Gleichungen (12), (13) direkt bestätigen lässt. Für die Funktion

$$\varphi(x) = \int_E \frac{r(\xi)\, d\xi}{x - \xi}$$

ergibt sich nämlich nach HERMITE (a. a. O.)

$$\overline{\varphi}_a(\xi) = \overline{\varphi}_i(\xi) + 2\pi i \cdot r(\xi),$$

woraus die Gleichungen (12) und (13) unmittelbar hervorgehen.

Die Gleichung (7) stellt den einfachsten Fall eines neuen Typus linearer Differentialgleichungen dar, der eine singuläre Linie darbietet. Die Punkte dieser Linie können in gewissem Sinne als »singuläre Punkte der Bestimmtheit« angesehen werden, wobei zu beachten ist, dass die Definition eines singulären Punktes, in dem eine Funktion sich bestimmt verhält, ihrer ursprünglichen Fassung nach nur für eine *isolierte* singuläre Stelle gedacht ist. In der Gleichung (7) ist auch der Fall enthalten, wo man es mit einer abzählbar unendlichen Menge singulärer Stellen von diesem Charakter zu tun hat, ein Fall der z. B. bei den von POINCARÉ sogenannten fonctions fuchsoides auftritt. Man sieht hier sehr deutlich, wie eine Häufungsstelle von solchen singulären Stellen der Bestimmtheit selbst wieder eine ebensolche Stelle sein kann; natürlich ist ihr Charakter ein ganz anderer, als im Falle, wo die Stelle isoliert ist. Im übertragenen Sinne wird man auch von der Differentialgleichung (7) sagen können, dass sie zum *Fuchsschen Typus* gehöre. — Die Bestimmung der *Sprungfunktion* $s(\xi)$ in der Gleichung (12) entspricht der Herstellung der Monodromiegruppe im Falle rationaler Koeffizienten; dagegen kann die Bestimmung von $r(\xi)$ aus der Gleichung (14) für ein gegebenes $s(\xi)$ als eine Modifikation des Problems von HILBERT angesehen werden, also als das Analogon des Riemannschen Problems für den Fall rationaler Koeffizienten. — Die analytische Natur dieser beiden Aufgaben tritt in der Gleichung (14) deutlich hervor; die erste, der Bestimmung der Monodromiegruppe entsprechende, erfordert die Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die zweite, dem Riemannschen Problem entsprechende, sogar nur die Ausführung einer logarithmischen Differentiation. — Natürlich wird die Sache bei weitem nicht mehr so einfach, wenn wir den allgemeinen Fall eines Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung in Betracht ziehen, wir werden aber sehen, dass auch in dem allgemeinen Falle ganz ähnliche Erscheinungen auftreten. — Wir bemerken nur noch, dass die Gleichung (14) für das Hilbert-Riemannsche Problem die *Residuenfunktion* $r(\xi)$ nicht durch $s(\xi)$ selbst, sondern durch die logarithmische Derivierte von s bestimmt, so dass also bei s ein konstanter Faktor willkürlich bleibt. Das zeigt, dass die Voraussetzung, wonach $\int\limits_E r(\xi)\,d\xi = 0$ sein, also die Lösungen im Unendlichen holomorph sein sollten, irrelevant ist, da der durch die Mehrdeutigkeit des Integrals ausserhalb E hinzutretende konstante Faktor das s nur unwesentlich modifiziert.

II.

Wenn wir uns jetzt dem Falle eines Systems von n Differentialgleichungen von der Form

$$(1)\qquad \frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa}, \qquad a_{\lambda\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} r_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

zuwenden, so müssen wir uns der üblichen Matrizenrechnung und Bezeichnung bedienen, wie sie z. B. in dem oben (S. 194, Fussnote) genannten Buche auseinandergesetzt ist. Für die Matrix von n^2 Elementen schreiben wir stets den entsprechenden grossen Buchstaben, also wenn $y_{\lambda\varkappa}$ eine Integralmatrix des Systems (1) bedeutet, so kann dieses System in der Form

$$(1')\qquad \frac{d\,Y}{d\,x} = Y \, . \, A, \qquad A = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{R_\nu}{x-a_\nu}$$

geschrieben werden. Es seien dann

$$(2)\qquad Y_i = \widehat{\int_0^x} (A\,d\,x + I), \qquad Y_a = \widehat{\int_\infty^x} (A\,d\,x + I)$$

die innerhalb bezw. ausserhalb des Kreises E holomorphen Integralmatrizen und es möge, wenn ξ einen Punkt des Bogens (a_σ, a_1) von E bedeutet, zwischen den Randwerten dieser beiden Integralmatrizen die Beziehung

$$\overline{Y}_a(\xi) = S_\sigma \overline{Y}_i(\xi) \tag{3}$$

bestehen, wo S_σ eine konstante Matrix ist. — Es sei nun Ω_ν die konstante Matrix, mit der sich Y_i von links her multipliziert, wenn x einen geschlossenen Umlauf um den Punkt a_ν vollzieht, dann ist also $\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_\sigma = I$, und wenn ξ einen Punkt von E zwischen a_ν und $a_{\nu+1}$ bedeutet, so gilt

$$\overline{Y}_a(\xi) = S_\nu \, . \, \overline{Y}_i(\xi), \qquad S_\nu = S_\sigma \, . \, \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma - 1). \tag{4}$$

Zur Bestimmung der Fundamentalsubstitution Ω_ν verfährt man gewöhnlich so, (vergl. FUCHS, a. a. O., siehe besonders Gl. (4), S. 400) dass man die zu dem singulären Punkte a_ν gehörige Integralmatrix

$$H_\nu = (x - a_\nu)^{R_\nu} \, . \, \Phi_\nu, \tag{5}$$

wo die Elemente von Φ_ν in der Umgebung von a_ν holomorph und Det. $\Phi_\nu(a_\nu) \neq 0$ ist, aufstellt und die Übergangssubstitution B_ν bestimmt, für die $Y_i = B_\nu H_\nu$ gilt; dann ist $\Omega_\nu = B_\nu \, . \, e^{2\pi i R_\nu} \, . \, B_\nu^{-1}$. Für unsere Zwecke, besonders für die Durchführung des Grenzüberganges $\sigma \to \infty$ ist es aber bequemer, statt H_ν eine Integralmatrix

$$\mathfrak{Y}_\nu = \widehat{\int_{t_\nu}^{x}} (A \, . \, dx + I) \tag{6}$$

einzuführen, wo t_ν einen in der Umgebung von a_ν und im Innern von E gelegenen Punkt bedeutet; man erhält dann die zu dieser Integralmatrix gehörige Fundamentalsubstitution O_ν entweder in der Form

$$O_\nu = H_\nu(t_\nu)^{-1} \, . \, e^{2\pi i R_\nu} \, . \, H_\nu(t_\nu) = \Phi_\nu(t_\nu)^{-1} \, . \, e^{2\pi i R_\nu} \, . \, \Phi_\nu(t_\nu) \tag{7}$$

oder durch Anwendung der Fuchs-Caquéschen Reihenentwicklung (Methode der sukzessiven Approximationen) in der Form[1]

[1] Siehe z. B. L. SCHLESINGER, a. a. O. S. 301, Gl. (32 a).

$$O_\nu = I + 2\pi i \,.\, R_\nu + \cdots, \tag{7 a}$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder in den $r_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ von zweitem und höheren Graden sind. — Wir haben dann zwischen Y_i und $\mathfrak{Y}_\nu$ die Beziehung $Y_i = Y_i(t_\nu) \,.\, \mathfrak{Y}_\nu$ und folglich

$$\Omega_\nu = Y_i(t_\nu) \,.\, O_\nu \,.\, Y_i(t_\nu)^{-1}, \tag{8}$$

also nach (4)

$$\overline{Y}_a(\xi) = S_\sigma \prod_{\varkappa=1}^{\nu} Y_i(t_\varkappa) \,.\, O_\varkappa \,.\, Y_i(t_\varkappa)^{-1} \,.\, \overline{Y}_i(\xi). \tag{9}$$

Wir machen nun den Grenzübergang $\sigma \rightarrow \infty$, indem wir uns ganz an die oben für den Fall einer Gleichung benutzten Bezeichnungen anschliessen. Wir setzen also

$$r_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = \delta_\nu \,.\, r_{\lambda\varkappa}(a_\nu) \qquad \text{oder} \qquad R_\nu = \delta_\nu \,.\, R(a_\nu), \tag{10}$$

wo die $r_{\lambda\varkappa}$ wieder als nach 2π periodische, stetige und abteilungsweise analytische Funktionen von θ für $\xi = e^{\theta i}$ vorausgesetzt werden sollen. Wir erhalten dann

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{R_\nu}{x - a_\nu} = \int_0^{2\pi} \frac{R(\xi) \,.\, \xi \,.\, i \,.\, d\theta}{x - \xi} = \int_E \frac{R\, d\xi}{x - \xi} \tag{11}$$

und das Differentialsystem (1) verwandelt sich in

$$\frac{dY}{dx} = Y \,.\, \int_E \frac{R\, d\xi}{x - \xi}. \tag{12}$$

Die Bedingung

$$\int_E R(\xi)\, d\xi = 0 \tag{13}$$

bringt mit sich, dass die ausserhalb E definierten Lösungen Y_a von (12) in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph sind; macht man nämlich die Transformation $x = \frac{1}{t}$, so verwandelt sich (12) in der Umgebung von $t = 0$ in

(12 a) $$\frac{dY}{dt} = -Y\left\{\frac{1}{t}\int_E R\,d\xi + \int_E R\,.\,\xi\,.\,d\xi + t\int_E R\,.\,\xi^2\,.\,d\xi + \cdots\right\},$$

der Punkt $t=0$ oder $x=\infty$ ist also im allgemeinen eine isolierte singuläre Stelle der Bestimmtheit, und nur wenn die Bedingung (13) erfüllt ist, eine reguläre, d. h. nichtsinguläre Stelle des Differentialsystems.

Zwischen den Randwerten der Y_a und denen der innerhalb E definierten Lösungen Y_i von (12) besteht dann die Beziehung

(14) $$\overline{Y}_a(\xi) = S_\sigma\,.\,S\,.\,\overline{Y}_i(\xi),$$

wo S_σ eine konstante Matrix bedeutet und S durch den Grenzübergang $\sigma \to \infty$ aus dem Ausdruck (vergl. (9))

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu} Y_i(t_\varkappa)\,.\,O_\varkappa\,.\,Y_i(t_\varkappa)^{-1}$$

hervorgeht. Bei diesem Grenzübergang sind in dem Ausdruck (7 a) die Glieder zu vernachlässigen, die zweite und höhere Potenzen der δ_ν enthalten; $O_\varkappa$ reduziert sich folglich auf $I + 2\pi i\,.\,\delta_\varkappa\,.\,R(a_\varkappa)$ und $Y_i(t_\varkappa)$ geht in $\lim\limits_{t_\varkappa \to a_\varkappa} Y_i(t_\varkappa)$ über, wobei $t_\varkappa$ aus dem Innern von E kommend in $a_\varkappa$ einrückt. Wir erhalten also

$$S = \lim_{\sigma\to\infty} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} \left(I + 2\pi i\,.\,\delta_\varkappa\,.\,Y_i(a_\varkappa)\,R(a_\varkappa)\,Y_i(a_\varkappa)^{-1}\right),$$

d. h. mit Anwendung der Bezeichnung des *Produktintegrals*[1]

(15) $$S = \widehat{\int_0^{\xi}} \left(I + d\xi\,.\,2\pi i\,.\,\overline{Y}_i(\xi)\,.\,R(\xi)\,.\,\overline{Y}_i(\xi)^{-1}\right);$$

die Existenz und die Stetigkeit der Randwerte $\overline{Y}_i(\xi)$ lässt sich aus den über die Funktionen $r_{\lambda\varkappa}(\xi)$ gemachten Annahmen unschwer erschliessen.[2] Dann folgt aber aus (15) durch Differentiation nach ξ:

---

[1] Siehe z. B. L. Schlesinger, a. a. O. S. 138—141 oder Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, 1908, S. 20 und 52. Das Produktintegral tritt zuerst bei Volterra (1887, 1899) auf.

[2] Vergl. Birkhoff, Proceedings of the Am. Acad. of Arts and Sc. 49, 1913, S. 530.

$$D_\xi S = S^{-1}\frac{dS}{d\xi} = 2\pi i\,.\,\overline{Y}_i(\xi)\,.\,R(\xi)\,.\,\overline{Y}_i(\xi)^{-1}. \tag{16}$$

Auch hier wollen wir, statt die Zulässigkeit der einzelnen vollzogenen Grenzübergänge nachzuprüfen, die Formel (16) direkt zu verifizieren suchen. Setzt man

$$\Phi(x) = \int\limits_E \frac{R\,d\xi}{x-\xi},$$

so ist nach Hermite (vergl. oben Nr. I)

$$\overline{\Phi}_a(\xi) = \overline{\Phi}_i(\xi) + 2\pi i\,.\,R(\xi),$$

also gilt

$$D_\xi\,\overline{Y}_i(\xi) = \overline{\Phi}_i(\xi), \qquad D_\xi\,\overline{Y}_a(\xi) = \overline{\Phi}_a(\xi) = \overline{\Phi}_i(\xi) + 2\pi i\,.\,R(\xi).$$

Da aber[1]

$$D_\xi\,\overline{Y}_a(\xi) = D_\xi(S\,.\,\overline{Y}_i(\xi)) = \overline{Y}_i^{-1}\,.\,D_\xi S\,.\,\overline{Y}_i + D_\xi\,\overline{Y}_i$$

ist, so folgt

$$\overline{\Phi}_i(\xi) + 2\pi i\,.\,R(\xi) = \overline{Y}_i^{-1}\,.\,D_\xi S\,.\,\overline{Y}_i + \overline{\Phi}_i(\xi)$$

oder in Übereinstimmung mit (16)

$$D_\xi S = \overline{Y}_i\,.\,2\pi i\,.\,R(\xi)\,.\,\overline{Y}_i^{-1}.$$

Für den neuen Typus von Differentialsystemen, wie er durch (12) dargestellt wird, spielt die Bestimmung der *Sprungfunktion* S an der singulären Linie E die analoge Rolle, wie für das Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten vom Fuchsschen Typus (1) die Bestimmung der Monodromiegruppe. Wir sehen, dass zur Bestimmung von S erforderlich ist: 1) die Integration des Differentialsystems (12) innerhalb des Kreises E und 2) die Integration des ebenfalls linearen Differentialsystems (16) auf der Peripherie dieses Kreises E. — Auch hier bleibt die konstante Matrix S_σ unbestimmt; sie hängt wesentlich von der Wahl der ausserhalb E definierten Integralmatrix Y_a ab. Wenn die Bedingung (13) nicht erfüllt, also Y_a in der Umgebung von $x=\infty$ im allgemeinen mehrdeutig ist, so ändert sich S_σ, wenn man x Umläufe um den unendlich fernen Punkt vollziehen lässt.

[1] Die für das Derivationssymbol D_x der Matrizen geltenden einfachen Regeln findet man z. B. in Schlesinger's oben genannten Vorlesungen, S. 26 ff. zusammengestellt.

Die umgekehrte Aufgabe ist das Problem von HILBERT, das dem Riemannschen für den Fall des Differentialsystems mit rationalen Koeffizienten (1) entspricht. Wir haben aber diesem Problem von HILBERT eine neue Wendung gegeben, indem wir bei gegebener Sprungfunktion S nicht nach den die Gleichung (14) befriedigenden Matrizen Y_i und Y_a fragen, sondern direkt nach der Residuenmatrix $R(\xi)$, wobei es noch dahingestellt bleiben kann, ob wir (13) als Nebenbedingung fordern oder nicht, da ja in (16) doch nur die derivierte Matrix $D_\xi S$ auftritt, so dass eine Linksmultiplikation von S mit einer konstanten Matrix ohne Belang bleibt. Das modifizierte Hilbertsche Problem wird aus (16) in der Form gegeben:

$$(17) \qquad \begin{cases} R(\xi) = \dfrac{1}{2\pi i}\, \overline{Y}_i(\xi)^{-1} \cdot \left(S^{-1}\dfrac{dS}{d\xi}\right) \cdot \overline{Y}_i(\xi), \\ \text{wo} \\ Y_i(x) = \widehat{\displaystyle\int_0^x} (A \cdot dx + I), \qquad A = \displaystyle\int_E \frac{R(\xi)\,d\xi}{x-\xi} \end{cases}$$

ist. Es ist dies ein neuer Typ von Integralgleichungen, in dem die zu bestimmende Matrix von Funktionen R unter einer gewöhnlichen Quadratur erscheint, über die sich aber noch ein Produktintegral aufbaut. Für eine direkte Lösung dieser Integralgleichung (17) wird man wohl am besten eine Methode der sukzessiven Approximationen ansetzen, z. B. in der Form

$$R_0 = \frac{1}{2\pi i} \cdot D_\xi S, \qquad \frac{dY_1}{dx} = \int_E \frac{R_0\,d\xi}{x-\xi}, \qquad |x| < 1,$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \overline{Y}_1(\xi)^{-1} \cdot D_\xi S \cdot \overline{Y}_1(\xi), \qquad \frac{dY_2}{dx} = Y_1 \int_E \frac{R_1\,d\xi}{x-\xi}, \qquad |x| < 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\pi i \cdot \overline{Y}_\nu(\xi)\, R_\nu = D_\xi S \cdot \overline{Y}_\nu(\xi), \qquad \frac{dY_{\nu+1}}{dx} = Y_\nu \int_E \frac{R_\nu\,d\xi}{x-\xi}, \qquad |x| < 1.$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Man kann hier die Elemente der Matrizen

$$\overline{Y}_\nu(\xi) \cdot R_\nu - \overline{Y}_{\nu-1}(\xi) \cdot R_{\nu-1} = \frac{1}{2\pi i} D_\xi\, S(\overline{Y}_\nu(\xi) - \overline{Y}_{\nu-1}(\xi))$$

abschätzen und dadurch zu einem Konvergenzbeweise gelangen.

Wenn man über die Matrix $R(\xi)$, die in dem Differentialsystem (12) als *Residuenmatrix* auftritt, möglichst allgemeine Voraussetzungen macht, so wird in (12) nicht nur das Problem der Differentialsysteme (1) mit rationalen Koeffizienten, sondern auch das von Differentialsystemen mit abzählbar unendlich vielen singulären Punkten enthalten sein. Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und auch noch für die Ordnungszahl n des Differentialsystems (12) den Volterra-Fredholmschen Grenzübergang vollziehen. Man kommt dann[1] zu einer Integrodifferentialgleichung und zwar zu der Feldgleichung

$$
(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy(x/\lambda, \varkappa)}{dx} &= a(x/\lambda, \varkappa) + \int_0^1 y(x/\lambda, \mu)\, a(x/\mu, \varkappa)\, d\mu \\ a(x/\lambda, \varkappa) &= \int_E \frac{R(\xi/\lambda, \varkappa)\, d\xi}{x - \xi}, \end{aligned} \right. \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq \lambda \leqq 1 \\ 0 \leqq \varkappa \leqq 1 \end{pmatrix}
$$

von der man sagen kann, dass sie bei hinreichend allgemeinen Voraussetzungen über das Funktionenfeld $R(\xi/\lambda, \varkappa)$ das allgemeinste Problem umfasst, das auf dem Gebiete der Theorie der linearen Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus denkbar ist. Um diese Gleichung mit Erfolg behandeln zu können, bedarf es aber noch erheblicher Vorarbeiten, über die ich bei anderer Gelegenheit berichten werde.

[1] Vergleiche L. SCHLESINGER, Jahresbericht der D.M.-V. 24, 1915, S. 84.