SUR LA RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES.

PAR

HENRI LEBESGUE

à PARIS.

1. Le problème de la recherche des fonctions primitives pouvait être considéré comme entièrement résolu à l'époque où l'on ne s'occupait que de fonctions continues; il était alors identique à celui de la recherche des intégrales indéfinies. Mais, à mesure que des classes de plus en plus vastes de fonctions discontinues étaient considérées, ces deux problèmes auraient du être étudiés à nouveau. Or, il est bien remarquable que, tandis que la généralisation de la notion d'intégrale retenait l'attention de tant de mathématiciens, la recherche des fonctions primitives ait été si complètement négligée que, par exemple, Riemann ne se demande même pas quel progrès la définition qu'il donne pour l'intégrale permet de faire dans la recherche des fonctions primitives. Et c'est seulement en 1881 que M. Volterra montra, par un exemple, que l'intégration riemannienne ne permettait pas la recherche des fonctions primitives pour toutes les fonctions dérivées bornées.

Depuis, pour ces fonctions, l'intégration des fonctions sommables a fourni les fonctions primitives. Mais la recherche des fonctions primitives des dérivées non bornées exigeait encore d'autres procédés. En 1912, M. A. Denjoy a fait connaître une opération qu'il a appelée la totalisation et qui permet de trouver la fonction primitive de toute fonction dérivée. La totalisation permet même de trouver une fonction connaissant non plus sa dérivée en tout point, mais simplement un nombre dérivé en tout point.

Ces beaux résultats ne sont pas encore assez connus, je me propose seulement ici d'aider à les répandre.

La totalisation est un procédé opératoire transfini appliqué à partir de la notion d'intégrale de fonction sommable. Il est bien certain, et bien connu, qu'on peut toujours, au moins théoriquement, remplacer la considération d'intégrales de fonctions sommables par celle des sommes intervenant dans le calcul des intégrales de Riemann. Il m'a semblé qu'il y aurait avantage à montrer qu'ici on pouvait très facilement effectuer cette substitution. On arrive ainsi à remplacer la totalisation de M. Denjoy par une opération très voisine, reposant essentiellement sur le même procédé transfini, et qui permet d'effectuer la recherche des fonctions primitives des fonctions dérivées[1] sans qu'on ait à faire appel à une notion d'intégrale supposée antérieurement connue.

Il me semble qu'on met ainsi mieux en évidence l'importance et la puissance du procédé transfini qui a été utilisé tout d'abord par Cantor et dont M. Baire s'est si judicieusement servi pour l'étude des fonctions limites de fonctions continues.

Sous sa nouvelle forme, le procédé de recherche des fonctions primitives s'appuie essentiellement sur des résultats de M. Baire et il suit en quelque sorte pas à pas le procédé de construction, donné par M. Baire, d'une série de fonctions continues représentant une fonction ponctuellement discontinue donnée.

La recherche d'une fonction primitive se réduira en somme à ceci: la dérivée $\varphi(x)$ étant donnée dans (a, b) on peut, d'apres M. Baire, trouver un intervalle (α, β) dans lequel $\varphi(x)$ est constante à moins de ε près. Dans (α, β) la fonction primitive $f(x)$ de $\varphi(x)$ peut être représentée par une ligne droite, à moins de $\varepsilon(\beta-\alpha)$ près. $f(x)$ est ainsi représentée approximativement par une ligne polygonale, sauf aux points d'un ensemble partout non dense E_1.

Mais, d'après un théorème de M. Baire, on peut trouver un intervalle (α, β) contenant des points de E_1 et dans lequel $f(x)$ peut être représentée approximativement par un segment de droite. Cela permet de connaître approximativement $f(x)$ sauf aux points d'un ensemble E_2, partout non dense sur E_1; etc. C'est la répétition transfinie de ce raisonnement qui donnera $f(x)$.

Comme mon but est, non pas d'ajouter vraiment à ce que nous a appris M. Denjoy, mais d'aider à faire mieux connaître ses résultats, je n'ai pas craint d'entrer dans des détails et je n'ai à peu près rien supposé connu du Lecteur; sauf dans les deux derniers paragraphes où, l'exposition du procédé de recherche des fonctions primitives achevé, je donne quelques indications sur des rapprochements ou des prolongements qu'il suggère.

---

[1] Ce procédé ne permettrait pas d'effectuer la recherche des fonctions primitives des nombres dérivés, ce que permet de faire la totalisation.

2. Etant donnée la dérivée $\varphi(x)$ d'une fonction continue $f(x)$, nous nous proposons de construire, à une constante additive près, la fonction $f(x)$. Nous procéderons pour cela comme dans le cas où $\varphi(x)$ est continue; seulement, tandis qu'on porte en général son attention sur le calcul de l'intégrale définie, nous formerons directement l'intégrale indéfinie. Nous imiterons donc les raisonnements relatifs aux théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles du premier ordre bien plus que ceux qui fournissent la définition des quadratures.

Nous allons essayer de construire une fonction $f_\varepsilon(x)$, *représentant* $f(x)$ *avec l'approximation relative* ε, c'est-à-dire telle que, quels que soient x_1 et x_2 dans l'intervalle que nous considérons (a, b), $[a \leq x_1 < x_2 \leq b]$, on ait:

$$
|[f(x_2)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(x_1)]| < \varepsilon(x_2-x_1). \tag{1}
$$

C'est ce que l'on fait habituellement en prenant une fonction $f_\varepsilon(x)$ représentée par une ligne polygonale telle qu'on ait: $|f_\varepsilon'(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$, en tout point où $f_\varepsilon'(x)$ existe, c'est-à-dire pour toute valeur de x qui ne soit pas abscisse d'un sommet de la ligne polygonale. On s'appuie alors sur deux remarques qui vont être constamment utilisées:

1°. *Si dans* (a_1, b_1) *on a:* $|\varphi(x)-M| < \varepsilon$, *la fonction* $f_\varepsilon(x, a_1, b_1) = Mx$ *représente* $f(x)$ *dans* (a_1, b_1) *avec l'approximation relative* ε.

2°. *Si nous connaissons deux fonctions* $f_\varepsilon(x, a_1, b_1)$, $f_\varepsilon(x, b_1, b_2)$, *représentant, avec l'approximation relative* ε, $f(x)$ *dans deux intervalles* (a_1, b_1), (b_1, b_2), $[a_1 < b_1 < b_2]$, *la fonction continue* $f_\varepsilon(x, a_1, b_2)$, *égale à* $f_\varepsilon(x, a_1, b_1)$ *dans* (a_1, b_1) *et égale dans* (b_1, b_2) *à* $f_\varepsilon(x, b_1, b_2)+f_\varepsilon(b_1, a_1, b_1)-f_\varepsilon(b_1, b_1, b_2)$, *représente* $f(x)$ *avec l'approximation* ε *dans* (a_1, b_2).

Il est clair, en effet, que l'on a l'inégalité (1) si x_1 et x_2 sont tous deux dans (a_1, b_1) ou tous deux dans (b_1, b_2) et, si x_1 est dans (a_1, b_1) et x_2 dans (b_1, b_2), on a:

$$
\begin{aligned}
&|[f(x_2)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(x_2, a_1, b_2)-f_\varepsilon(x_1, a_1, b_2)]| = \\
&=|[f(b_1)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(b_1, a_1, b_2)-f_\varepsilon(x_1, a_1, b_2)]+[f(x_2)-f(b_1)]-[f_\varepsilon(x_2, a_1, b_2)-f_\varepsilon(b_1, a_1, b_2)]| \\
&\leq |[f(b_1)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(b_1, a_1, b_1)-f_\varepsilon(x_1, a_1, b_1)]|+|[f(x_2)-f(b_1)]-[f_\varepsilon(x_2, b_1, b_2)-f_\varepsilon(b_1, b_1, b_2)]| \\
&\qquad < \varepsilon(b_1-x_1)+\varepsilon(x_2-b_1) = \varepsilon(x_2-x_1).
\end{aligned}
$$

3. A ces deux remarques, ajoutons les suivantes:

3°. *Si une fonction* $f_\varepsilon(x)$ *définie à l'intérieur de* (a, b), — *c'est-à-dire pour* $a<x<b$, — *représente* $f(x)$ *avec l'approximation relative* ε *à l'intérieur de* (a, b), — *c'est-à-dire vérifie l'inégalité* (1) *toutes les fois que l'on a:* $a<x_1<x_2<b$, — $f_\varepsilon(x)$ *tend vers des valeurs déterminées quand* x *tend vers* a *et vers* b *et la fonction* $f_\varepsilon(x)$, *définie comme étant égale à ces valeurs limites en* a *et en* b, *représente* $f(x)$ *avec l'approximation* ε *dans tout* (a, b).

$f(x)$ étant uniformément continue dans (a, b), dès que η est assez petit positif, les inégalités $a<x_1<x_2<b$, $x_2-x_1<\eta$, entraînent

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon,$$

d'où, à cause de (1),

$$|f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(x_1)|<\varepsilon+\varepsilon\eta.$$

$f_\varepsilon(x)$ est donc uniformément continue dans (a, b) et les valeurs que nous prenons pour $f_\varepsilon(a)$ et $f_\varepsilon(b)$ existent bien.

Faisant alors tendre x_1 vers a, x_2 restant fixe, on obtient:

$$|[f(x_2)-f(a)]-[f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(a)]|\leq\varepsilon(x_2-a);$$

mais, en prenant x dans (x_2, b), on a:

$$|[f(x)-f(x_2)]-[f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x_2)]|<\varepsilon(x-x_2),$$

et, par addition:

$$|[f(x)-f(a)]-[f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(a)]|<\varepsilon(x-a).$$

De même on aurait:

$$|[f(b)-f(x)]-[f_\varepsilon(b)-f_\varepsilon(x)]|<\varepsilon(b-x),$$

et, par addition:

$$|[f(b)-f(a)]-[f_\varepsilon(b)-f_\varepsilon(a)]|<\varepsilon(b-a).$$

L'inégalité (1) est donc bien vérifiée pour $a\leq x_1<x_2\leq b$.

Des remarques 2° et 3° il résulte que si l'on a des intervalles (a_i, b_i), tels que les a_i tendent en décroissant vers a et que les b_i tendent en croissant vers b, et des fonctions $f_\varepsilon(x, a_i, b_i)$ y représentant $f(x)$ avec l'approximation relative ε, la fonction continue $f_\varepsilon(x)$, égale à $f_\varepsilon(x, a_1, b_1)$ dans (a_1, b_1) et telle que la différence $f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x, a_i, b_i)$ soit constante dans chacun des deux intervalles (a_i, a_{i+1}),

(b_{i+1}, b_i), est uniformément continue dans (a, b) et y représente $f(x)$ avec l'approximation relative ε.

4°. *Si l'on connait des fonctions $f_\varepsilon(x, I_k)$ définies dans les différents intervalles I_k contigus à un ensemble fermé*[1] *E et y représentant $f(x)$ avec une approximation relative ε, et une fonction continue $f_0(x)$ définie dans (a, b) et telle que l'on ait: $|[f(x_2)-f(x_1)]-[f_0(x_2)-f_0(x_1)]| < \varepsilon(x_2-x_1)$, quand x_1 et x_2 sont points de E, $x_1<x_2$, on peut construire une fonction $f_\varepsilon(x)$ représentant $f(x)$ dans tout (a, b) avec l'approximation relative ε.*

Voici comment nous construirons $f_\varepsilon(x)$. x_0 étant un point choisi sur E, par exemple celui de plus petite abscisse, et (a_k, b_k) étant l'intervalle I_k, nous appellerons $f_k(x)$ la fonction continue égale à $f_0(x_0)$ en x_0, telle que $f_k(x)-f_{k-1}(x)$ soit constante dans chacun des deux intervalles (a, a_k), (b_k, b) et que $f_k(x)-f_\varepsilon(x, I_k)$ soit constante dans (a_k, b_k), $f_\varepsilon(x)$ sera définie comme la limite des $f_k(x)$.

Cette limite existe, évaluons en effet la différence f_k-f_{k-1}. Si, par exemple, x_0 est dans (a, a_k) cette différence est nulle dans (a, a_k); elle est constante dans (b_k, b) et par suite égale à $f_k(b_k)-f_{k-1}(b_k)$; or on a:

$$\begin{aligned}|f_k(b_k)-f_{k-1}(b_k)| &= |[f_k(b_k)-f_k(a_k)]-[f_{k-1}(b_k)-f_{k-1}(a_k)]| \\ &= |[f_\varepsilon(b_k, I_k)-f_\varepsilon(a_k, I_k)]-[f_0(b_k)-f_0(a_k)]| < 2\varepsilon(b_k-a_k).\end{aligned}$$

Enfin dans (a_k, b_k) on a:

$$\begin{aligned}|f_k(x)-f_{k-1}(x)| = |[f_k(x)-f_k(a_k)]-[f_{k-1}(x)-f_{k-1}(a_k)]| &\leq |[f_\varepsilon(x, I_k)-f_\varepsilon(a_k, I_k)]| \\ + |[f_0(x)-f_0(a_k)]| < |f(x)-f(a_k)| &+ \varepsilon(x-a_k) + |f_0(x)-f_0(a_k)|.\end{aligned}$$

Si donc, pour $k>n$, la somme $\Sigma(b_k-a_k)$ des longueurs des intervalles I_k est inférieure à ε_n et si, de plus, $|f(x)-f(y)|$ et $|f_0(x)-f_0(y)|$ restent inférieures à η_n dès que x et y diffèrent de moins de ε_n, la différence $|f_k(x)-f_{k-1}(x)|$ est au plus $\varepsilon\varepsilon_n+2\eta_n$ si x est dans (a_k, b_k) et au plus $2\varepsilon(b_k-a_k)$ dans le cas contraire. Donc $|f_k(x)-f_n(x)|$ est au plus $(\varepsilon\varepsilon_n+2\eta_n)+2\varepsilon\Sigma(b_k-a_k)<3\varepsilon\varepsilon_n+2\eta_n$ et ceci montre la convergence uniforme des f_k vers une limite f_ε.

[1] Je rappelle qu'un ensemble fermé est un ensemble contenant tous ses points limites. L'ensemble E étant supposé dans (a, b), les intervalles contigus à E sont ceux qui ont pour origines et extrémités a, b ou des points de E et qui ne contiennent à leur intérieur aucun point de E. Ces intervalles étant sans points intérieurs communs, il y en a au plus $\frac{b-a}{l}$ de longueur l, de sorte qu'on peut les classer par ordre de longueur décroissante en convenant, par exemple, lorsqu'on trouvera plusieurs contigus égaux de les ranger dans l'ordre où ils se succèdent de a vers b. Ces intervalles ainsi rangés sont les intervalles I_k du texte.

D'ailleurs on a:

$$\left|[f(x_2)-f(x_1)]-[f_k(x_2)-f_k(x_1)]\right| < \varepsilon(x_2-x_1),$$

pour $x_1<x_2$, x_1 et x_2 appartenant à E ou à l'un des intervalles $I_1, I_2, \dots I_k$. Donc on en conclut, pour tous les points de (a, b),

$$\left|[f(x_2)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(x_1)]\right| \leq \varepsilon(x_2-x_1).$$

Mais ici encore le signe égal peut être supprimé; ceci est évident si x_2 et x_1 appartiennent à un même I_k — car, dans cet I_k, $f_\varepsilon(x)$ est égale à $f_\varepsilon(x, I_k)$ à une constante additive près — ou si x_2 et x_1 appartiennent à deux intervalles I_k ayant une extrémité commune, ou s'ils appartiennent à un même intervalle ne contenant que des points de E, auquel cas $f_\varepsilon(x)$ ne diffère de $f_0(x)$ que par une constante. Dans les autres cas, on pourra prendre entre x_1 et x_2 deux points x_1' et x_2' situés dans un même intervalle I et, en appliquant l'identité

$$\begin{aligned}[f(x_2)-f(x_1)]-[f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(x_1)] &= \{[f(x_1')-f(x_1)]-[f_\varepsilon(x_1')-f_\varepsilon(x_1)]\} \\ &+ \{[f(x_2')-f(x_1')]-[f_\varepsilon(x_2')-f_\varepsilon(x_1')]\} + \{[f(x_2)-f(x_2')]-[f_\varepsilon(x_2)-f_\varepsilon(x_2')]\},\end{aligned}$$

on obtiendra l'inégalité (1).

4. Nous ferons appel au célèbre théorème de M. Baire sur les fonctions limites de fonctions continues. Je vais d'ailleurs le démontrer sous la forme où nous l'utiliserons.

On considère une fonction $f(x)$, qui admet dans un intervalle (a, b) une dérivée déterminée et finie $\varphi(x)$, et un ensemble fermé E formé de points de (a, b). On peut trouver dans (a, b), un intervalle (α, β) contenant à son intérieur des points de E et tel que, pour tout couple de points x_1, x_2 appartenant à E et à (α, β), le rapport

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ait une valeur constante à moins de ε près; ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Posons
$$\varphi(x, y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{y};$$

la fonction $\varphi(x, y)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables x, y pour tous les points, $a \leq x \leq b$, $0 < y \leq b-x$. Elle n'est ni définie, ni continue aux points de $y=0$. Convenons de poser $\varphi(x, 0)=\varphi(x)$; $\varphi(x, y)$ est alors définie aux points de $y=0$, mais elle n'y est pas en général continue et c'est pourquoi notre énoncé a besoin de justification. Seulement, puisque, par définition de la dérivée, $\varphi(x, 0)$ est la limite de $\varphi(x, y)$ pour x constant et y tendant vers zéro, la fonction $\varphi(x, y)$, considérée comme fonction de y seul, est continue pour $y=0$.

Puisque l'on a:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\varphi(x_1, x_2-x_1),$$

pour légitimer l'énoncé il suffira de prouver l'existence d'un intervalle (α, β) contenant des points de E et tel que $\varphi(x, y)$ soit constante à moins de ε près pour les points (x, y) dont les abscisses appartiennent à E et qui sont dans le carré $\alpha\leq x\leq\beta$, $0\leq y\leq\alpha-\beta$; en d'autres termes tel que, si x, y et x', y' sont deux couples de valeurs satisfaisant aux conditions précédentes, on ait:

$$(2) \qquad |\varphi(x, y)-\varphi(x', y')|<\varepsilon.$$

Soit E_n l'ensemble des points de E pour lesquels on a:

$$(3) \qquad \left|\varphi(x, y)-\varphi\left(x, \frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

dès que l'on a $y\leq\frac{1}{n}$. E_n est formé des points communs à la fois à tous les ensembles $E_{n,1}, E_{n,2}, \ldots$; $E_{n,p}$ étant l'ensemble des points de E en lesquels on a l'inégalité (3) dès que l'on a: $\frac{1}{n+p}\leq y\leq\frac{1}{n}$. $E_{n,p}$ est un ensemble fermé car, si x_0 ne vérifie pas l'inégalité (3) pour une certaine valeur y_0 de y, cette inégalité n'est pas non plus vérifiée pour les valeurs de x voisines de x_0 et les valeurs de y voisines de y_0.

E_n est aussi fermé, car si x_0 n'appartient pas à E_n c'est qu'il n'appartient pas à l'un des $E_{n,p}$, soit à E_{n,p_0}. Alors aucun des points suffisamment voisins de x_0 n'appartient à E_{n,p_0}, donc à E_n.

Ceci étant, si, dans (a, b), E n'est pas identique à E_1, on peut trouver un point x_0 de (a, b) appartenant à E sans appartenir à E_1 et, comme E_1 est fermé, aucun des points de E suffisamment voisins de x_0 n'appartiendrait à E_1. En d'autres termes, on pourrait trouver un intervalle (a_1, b_1) entièrement intérieur à (a, b), $[a<a_1<b_1<b]$ et contenant des points de E sans contenir de points de E_1.

De même, ou bien dans (a_1, b_1) E et E_2 sont identiques, ou bien on peut trouver un intervalle (a_2, b_2), $[a<a_1<a_2<b_2<b_1<b]$, contenant des points de E sans contenir de points de E_2.

En continuant ainsi, on arrivera à un intervalle (a_{n_0-1}, b_{n_0-1}) dans lequel il y a des points de E et dans lequel E et E_{n_0} sont identiques; sans quoi, en effet, nous aurions dans (a, b) un point x_0 de E n'appartenant pas à E_1, dans (a_1, b_1) un point x_1 de E n'appartenant pas à E_2, etc. Ces points x_i auraient au moins un point limite ξ; ξ appartiendrait à E puisque E est fermé. ξ n'appartiendrait pas à E_n car les points $x_n, x_{n+1}, \ldots$ appartenant à (a_n, b_n) ξ est dans (a_n, b_n). Ainsi ξ serait point de E sans être point d'aucun des E_n, or ceci est impossible car, d'après la continuité de $\varphi(x, y)$ par rapport à y pour $y=0$, tout point ξ de E est point de E_n dès que n est assez grand.

Diminuons l'intervalle (a_{n_0-1}, b_{n_0-1}) que nous venons de trouver de façon qu'il continue à contenir des points de E à son intérieur, que sa longueur soit au plus égale à $\frac{1}{n_0}$ et que $\varphi\left(x, \frac{1}{n_0}\right)$ varie de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$ quand x varie dans l'intervalle ainsi restreint. Je dis que cet intervalle (α, β) répond à la question. Si l'on a, en effet,

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad 0 \leq y \leq \alpha-\beta \leq \frac{1}{n_0}, \quad \alpha \leq x' \leq \beta, \quad 0 \leq y' \leq \alpha-\beta \leq \frac{1}{n_0},$$

x et x' appartenant à E, il en résulte:

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y)-\varphi(x', y')| \leq \left|\varphi(x, y)-\varphi\left(x, \frac{1}{n_0}\right)\right| &+ \left|\varphi(x', y')-\varphi\left(x', \frac{1}{n_0}\right)\right| \\ &+ \left|\varphi\left(x, \frac{1}{n_0}\right)-\varphi\left(x', \frac{1}{n_0}\right)\right| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

les deux premiers termes du second membre sont, en effet, inférieurs à $\frac{\varepsilon}{3}$ parceque x et x' sont points de E_{n_0}, et le troisième terme d'après la condition imposée à la variation de $\varphi\left(x, \frac{1}{n_0}\right)$ dans (α, β); l'inégalité (2) est donc bien vérifiée.

Si M est la valeur à ε près de $\varphi(x, y)$ dans le carré considéré, on a pour tous les couples x_1, x_2, $(x_1<x_2)$, de points de la portion e de E située dans (α, β)

$$|[f(x_2)-f(x_1)]-[Mx_2-Mx_1]| < \varepsilon(x_2-x_1);$$

en d'autres termes, Mx peut être prise pour la fonction $f_0(x)$ de notre quatrième remarque, attachée à l'ensemble e.

5. Nous sommes maintenant en mesure de construire une fonction $f_\varepsilon(x, a, b)$ représentant dans tout (a, b) avec l'approximation relative ε la fonction primitive $f(x)$ d'une dérivée $\varphi(x)$ donnée dans (a, b).

Soit (l, m) une partie quelconque de (a, b), prenons cette partie pour ensemble E et appliquons lui le théorème de M. Baire; nous trouvons, dans (l, m), un intervalle (α, β) dans lequel $\varphi(x)$ est égale à moins de ε près à une constante M; la fonction Mx est une fonction $f_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$. (l, m) étant quelconque, il y a des intervalles (α, β) dans toute partie de (a, b); les points x qui ne sont pas intérieurs à de tels intervalles (α, β) forment donc, s'ils existent, un ensemble E_1 non dense dans toute partie de (a, b).[1] E_1 est d'ailleurs fermé, car un point intérieur à un intervalle (α, β) n'a évidemment dans son voisinage que des points intérieurs à (α, β), donc n'appartenant pas à E_1.

Soit (A, B) un intervalle contigu à E_1, soit (α, β) l'un des intervalles dont nous avons parlé et qui soit intérieur à (A, B). Si β est différent de B, β est dans un intervalle (α_1', β_1) dans lequel φ est constante à ε près. Si β_1 n'est pas en B, β_1 est dans un intervalle analogue (α_2', β_2). Je dis qu'on peut choisir ces intervalles de façon tout au moins que $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ tendent en croissant vers B. Si non cette suite croissante aurait un point limite β_0 différent de B, donc intérieur à l'un (α', β') des intervalles (α, β); tous les β_i seraient intérieurs à (α', β') dès que i surpasserait une certaine valeur n et l'on pourrait donc remplacer la suite des intervalles $(\beta_{n+1}, \beta_{n+2})$, $(\beta_{n+2}, \beta_{n+3})$, ... par l'unique intervalle (β_{n+1}, β') qui nous conduirait au delà de β_0.

De même, on peut atteindre A, ou tendre vers A, à l'aide d'une suite décroissante $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ limitant des intervalles (α_1, α), (α_2, α_1) dans chacun desquels $f(x)$ est représentable avec l'approximation relative ε par une fonction linéaire. Nous sommes donc dans les conditions d'application des remarques 1°, 2°, 3°; nous construisons $f_\varepsilon(x, A, B)$.

L'opération O_1 consistera en la détermination de E_1 et en la construction des fonctions $f_\varepsilon(x, I_k)$ relatives aux divers intervalles I_k contigus à E_1. Si E_1 n'existait pas, la détermination de $f_\varepsilon(x, a, b)$ serait terminée.

6. Supposons que E_1 existe, soit (l, m) un intervalle contenant des points de E_1 et appliquons le théorème de M. Baire à la partie de E_1 située dans (l, m)

[1] Nous considérons que a fait partie de E_1, s'il n'existe pas d'intervalle (a, β) dans lequel $\varphi(x)$ est constante à ε près et nous faisons une convention analogue pour b.

jouant le rôle de l'ensemble E de notre énoncé. Nous trouvons dans (l, m) un intervalle (α, β) contenant des points de E_1 et telle que dans (α, β) on puisse attacher à la partie e_1 de E_1 située dans (α, β) une fonction linéaire comme fonction $f_0(x)$. Alors, dans (α, β), nous pouvons, à l'aide de la remarque 4°, construire $f_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$; puisque nous connaissons $f_0(x)$ et, par O_1, les fonctions f_ε attachées aux contigus à e_1.

Les points de E_1 qui ne sont pas intérieurs à de tels intervalles (α, β), forment, s'ils existent, un ensemble E_2 partout non dense sur E_1. On voit comme plus haut que E_2 est fermé.[1]

Soit (A, B) un intervalle contigu à E_2, on le décompose comme précédemment en un nombre fini ou infini d'intervalles par des points

$$A < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < B$$

et on en déduit la construction de $f_\varepsilon(x, A, B)$.

L'opération O_2 consistera en la détermination de E_2 et des fonctions f_ε attachées aux divers intervalles contigus à E_2. Si E_2 n'existait pas, $f_\varepsilon(x, a, b)$ serait obtenue.

7. Si, continuant ainsi, on épuise la suite des indices entiers sans obtenir $f_\varepsilon(x, a, b)$ c'est que tous les ensembles E_n existent. Ces ensembles sont fermés, chacun est contenu dans le précédent, donc, d'après un raisonnement déjà fait, il y a des points communs à tous ces ensembles et ces points forment un ensemble fermé. Nous le désignerons par E_ω, ω n'étant plus un nombre, mais un symbole distinctif, une sorte de prénom.

Soit (A, B) un intervalle contigu à E_ω. Si (A, B) est contigu à E_n pour une certaine valeur de n, on connait $f_\varepsilon(x, A, B)$; sinon, il y a dans (A, B) des intervalles contigus à E_n, quel que soit n. Soit (a_1, b_1) un intervalle contigu à E_1 et contenu dans (A, B), soit (a_2, b_2) l'intervalle contigu à E_2 et contenant (a_1, b_1), $[A \leq a_2 \leq a_1 < b_1 \leq b_2 \leq B]$. Soit de même (a_i, b_i) l'intervalle contigu à E_i et contenant (a_{i-1}, b_{i-1}). La suite non croissante $a_1, a_2, \ldots$ a une limite a_0, je dis que $a_0 = A$. En effet a_0 est point de E_1, car $a_1, a_2, \ldots$ sont points de E_1; a_0 est point de E_2, car $a_2, a_3, \ldots$ sont points de E_2, etc. Donc a_0 étant point de $E_1, E_2, \ldots$ est point de E_ω et par suite ne peut être intérieur à (A, B). Ainsi les intervalles (a_i, b_i) finissent par couvrir tout l'intérieur de (A, B) et comme

[1] Moyennant une précaution analogue à celle déjà prise concernant les conditions que devront remplir a et b pour appartenir ou non à E_2.

après l'opération O_i nous connaissons $f_\varepsilon(x, a_i, b_i)$, nous pouvons, par notre troisième remarque, construire $f_\varepsilon(x, A, B)$.

L'opération O_ω consistera en la détermination de E_ω et en la construction de fonctions f_ε attachées aux intervalles contigus à E_ω. Cette opération O_ω est en quelque sorte plus simple que les précédentes, notre remarque 4° n'intervenant pas.

8. Nous effectuerons ensuite des opérations que l'on pourra noter $O_{\omega+1}$, $O_{\omega+2}, \ldots$, ou de toute autre manière, et qui sont exactement analogues aux opérations $O_2, O_3, \ldots$

D'une façon plus précise, supposons que nous ayons effectué un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations sans obtenir f_ε dans tout (a, b), définissons l'opération qui suivra celles déjà effectuées.

Deux cas sont à considérer: ou bien, dans les opérations déjà effectuées, il y a une opération qui a été effectuée après toutes les autres; ou bien il n'en est pas ainsi. Par exemple, on est dans le premier cas s'il s'agit des opérations

$$O_1, O_2, \ldots\ldots O_{100},$$

ou

$$O_1, O_2, \ldots O_p, \ldots O_\omega, O_{\omega+1}, \ldots O_{\omega+100},$$

p parcourant la suite des nombres entiers; on est dans le second cas s'il s'agit des opérations

$$O_1, O_2, \ldots\ldots O_p, \ldots$$

ou

$$O_1, O_2, \ldots O_p, \ldots O_\omega, O_{\omega+1}, \ldots O_{\omega+p}, \ldots O_{2\omega}, \ldots O_{2\omega+p}, \ldots$$

p parcourant la suite des nombres entiers.

Dans le premier cas, si O_λ est le symbole de la dernière opération effectuée, elle nous a fait connaître un ensemble partout non dense E_λ et des fonctions f_ε attachées aux intervalles contigus à E_λ. Alors nous appliquerons le théorème de M. Baire pour trouver un intervalle (α, β) dans lequel E_λ a des points qui forment un ensemble e_λ et pour lequel la fonction $f_0(x)$ attaché à e_λ est linéaire. Les remarques 1°, 2°, 3°, 4°, nous donnent $f_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$. Or les points de E_λ qui ne sont pas intérieurs à de tels intervalles (α, β) forment un ensemble E_μ partout non dense sur E_λ, d'après le théorème de M. Baire, et la remarque 3° nous permet de construire f_ε pour chaque intervalle contigu à E_μ à partir de fonctions connues $f_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$.

L'opération suivant O_λ, qu'on pourra noter $O_{\lambda+1}$ ou de toute autre manière, O_μ par exemple, consistera en la détermination de E_μ et des fonctions f_ε attachées aux intervalles contigus à E_μ.

Dans le second cas, les opérations effectuées sont en nombre nécessairement infini et, par hypothèse, cette infinité d'opérations est dénombrable. Supposons ces opérations rangées en suite simplement infinie $O^1, O^2, \ldots$ L'opération O^1 était, dans nos constructions, précédées par d'autres opérations, à moins que O^1 ne soit identique à O_1. Barrons dans la suite $O^1, O^2, \ldots$ celles des opérations qui précédaient O^1 dans les constructions; soit $O^1, O^{p_2}, O^{p_3}, \ldots$ la suite ainsi obtenue. De la suite $O^{p_2}, O^{p_3}, \ldots$ barrons de même celles des opérations qui précédaient O^{p_2} dans la construction, etc. Nous arriverons ainsi à une suite $O^1, O^{p_2}, O^{q_3}, O^{r_4}, \ldots$ contenant nécessairement une infinité de symboles, puisqu'aucune opération O n'est effectuée après toutes les autres, et telle que, si O_φ est l'une des opérations effectuées, il y a certainement des opérations effectuées après O_φ et qui figurent parmi $O^1, O^{p_2}, \ldots$

Ceci étant, les ensembles $E^1, E^{p_2}, \ldots$ données par les opérations de cette suite, sont des ensembles fermés chacun contenu dans le précédent, donc il y a des points communs à tous ces ensembles; ils forment un ensemble fermé, notons-le E_λ. Si (A, B) est un intervalle contigu à E_λ, ou bien (A, B) est contigu à l'un des $E^1, E^{p_2}, E^{q_3}, \ldots$ et alors on connait déjà $f_\varepsilon(x, A, B)$; ou bien on trouve, comme précédemment, des intervalles (a^1, b^1), (a^{p_2}, b^{p_2}), (a^{q_3}, b^{q_3}), $\ldots$, contenus chacun dans les suivants, respectivement contigus à $E^1, E^{p_2}, \ldots$; les a tendent vers A, les b vers B. De sorte que notre remarque 3° nous fournit $f_\varepsilon(x, A, B)$ à partir des $f_\varepsilon(x, a^1, b^1)$, $f_\varepsilon(x, a^{p_2}, b^{p_2})$, $\ldots$ qui sont connues.

L'opération suivant alors celles dont nous sommes parties, que nous pourrons noter O_λ, consistera à trouver E_λ et à construire les f_ε attachées aux contigus à E_λ. Cette opération est, en un certain sens, plus simple que celle relative au premier cas.[1]

Nous dirons qu'une opération O_λ, ou que son indice λ, est de la première ou de la deuxième espèce suivant que nous sommes dans l'un ou l'autre des deux cas que nous venons d'examiner: il y a, ou il n'y a pas, une opération déterminée précédant immédiatement O_λ.

9. Je dis qu'après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opéra-

[1] L'ensemble E_λ peut être défini comme l'ensemble des points communs à tous les ensembles $E_1, E_2, \ldots$ donnés par les opérations précédentes; il ne dépend donc d'aucun choix. Au contraire, dans la définition des f_ε, nous ne nous sommes pas astreint à introduire assez de conditions pour que ces fonctions ne dépendent plus d'aucun choix, même dans le cas simple d'une fonction f_ε linéaire donnée par notre première remarque. Il n'y aurait aucune difficulté à préciser la définition des fonctions f_ε de façon qu'elles soient uniquement déterminées; mais cela n'aurait aucune importance, ni aucun intérêt véritable.

tions, nous arriverons à une opération O_λ pour laquelle E_λ n'existe pas, c'est-à-dire faisant connaître $f_\varepsilon(x, a, b)$.

Si E_1 n'existe pas, $\lambda = 1$. Si E_1 existe, soient $I_1, I_2, \ldots$ les intervalles contigus à E_1 rangés d'une certaine manière. O_α étant une opération pour laquelle il existe encore un ensemble E_α, soit I_p^α l'intervalle contigu à E_α et qui contient I_p. Chaque I_p est en effet contenu dans l'un des contigus à E^α; la suite $I_p^2, I_p^3, \ldots, I_p^\alpha, \ldots$ rangée dans l'ordre de succession des opérations O_2, $O_3, \ldots O_\alpha, \ldots$ fait connaître des intervalles dont chacun est contenu dans les précédents. Il se peut d'ailleurs que O_α précédant O_β, I_p^α soit identique à I_p^β; alors tous les I_p^γ, relatifs aux O_γ effectués après O_α et avant O_β et à la même valeur de p, sont aussi identiques à I_p^α.

Soient $\alpha_p^1, \alpha_p^2, \ldots$ les indices supérieurs de ceux des I_p^α qui ne sont pas identiques à certains de ceux qui les précèdent. Dans cette liste deux symboles consécutifs $\alpha_p^i, \alpha_p^{i+1}$ ne peuvent être tous deux de deuxième espèce, sans quoi tous les intervalles I_p^β relatifs aux opérations O_β effectués après $O_{\alpha_p^i}$ et avant $O_{\alpha_p^{i+1}}$ seraient identiques et par suite, d'après la définition de l'ensemble $E_{\alpha_p^{i+1}}$, pour α_p^{i+1} de deuxième espèce, les extrémités de I_p^β appartiendraient à $E_{\alpha_p^{i+1}}$ et $I_p^{\alpha_p^{i+1}}$ serait aussi identique à I_p^β, ce qui est contradictoire. Donc, entre deux α_p^i de seconde espèce, il y a des α_p^i de première espèce. Pour démontrer que les α_p^i sont en nombre fini ou forment tout au plus une infinité dénombrable, il suffit donc de le démontrer pour la liste des α_p^i de première espèce. Or, à chaque α_p^i de première espèce, nous pouvons attacher un nombre positif e_p^i, égal à la différence de longueur entre $I_p^{\alpha_p^i}$ et $I_p^{\alpha_p^{i-1}}$, représentant l'accroissement subi par $I_p^{\alpha_p^i}$. Mais la longueur des $I_p^{\alpha_p^i}$ reste inférieure à $(b-a)$, donc il n'y a que $\frac{b-a}{e}$ au plus nombres α_p^i pour lesquels e_p^i surpasse e, $e > 0$; c'est dire que les α_p^i forment tout au plus une infinité dénombrable. Cette conclusion subsiste qu'il s'agisse des α_p^i de première espèce seulement ou des deux espèces.

Faisons maintenant varier p aussi bien que i, les α_p^i forment une infinité dénombrable; or, tous les indices des opérations O_α, donnant des ensembles exceptionnels E_α, figurent dans cette infinité, car E_α n'est identique à aucun des ensembles donnés par les opérations précédentes; donc, après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations, on aura épuisé la série des opérations faisant varier certains au moins des I_p^α et fournissant encore des ensembles E_α. L'opération suivante O_λ ne donne pas d'ensemble exceptionnel E_λ, car celui ci ne saurait être identique aux E_α antérieurement obtenus et certains I_p^α varieraient dans l'opération O_λ. Donc l'opération O_λ fournit f_ε dans tout (a, b).

Ayant ainsi obtenue la fonction $f_\varepsilon(x, a, b)$, que l'on peut assujettir à avoir la valeur $f(a)$ pour $x=a$, il suffit de prendre la limite de f_ε pour ε tendant vers zéro pour trouver $f(x)$ dans tout (a, b).

10. Nous venons de nous placer au point de vue de l'intégrale indéfinie, si nous nous occupions de l'intégrale définie, la construction d'une fonction $f_\varepsilon(x, a, b)$ serait remplacée par le calcul à $\varepsilon(b-a)$ près de la différence $f(b)-f(a)$. Voici les calculs qui remplacent, à cet égard, les constructions précédentes. Au moment où nous effectuons O_α nous déterminons un ensemble fermé E_α et, dans chaque intervalle (A, B) contigu à E_α, une double suite de points

$$A < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < \beta_2 < \cdots B$$

et nous prenons pour valeur approchée de $f(B)-f(A)$, à $\varepsilon(B-A)$ près, la somme

$$v(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{\infty} v(\alpha_i, \alpha_{i-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} v(\beta_{i-1}, \beta_i),$$

le symbole $v(l, m)$ désignant une valeur approchée à $\varepsilon(m-l)$ près de $f(m)-f(l)$. Les séries ne sont en général que semi-convergentes.

Quand il s'agit d'une opération de seconde espèce, les $v(l, m)$ qui y interviennent sont déjà connues.

S'il s'agit de l'opération O_1, dans chacun des intervalles (α, β), (α_i, α_{i-1}) (β_{i-1}, β_i) $\varphi(x)$ est constante à ε près; on prend pour valeur approchée de $[f(B)-f(A)]$

$$(\beta-\alpha)\,\varphi(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{i-1}-\alpha_i)\,\varphi(\xi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i-\beta_{i-1})\,\varphi(\eta_i)$$

les ξ, ξ_i, η_i étant des nombres pris arbitrairement respectivement dans (α, β), (α_i, α_{i-1}), (β_{i-1}, β_i).

S'il s'agit d'une autre opération de première espèce, dans chacun des intervalles à considérer, l'intervalle (α, β) par exemple, on a un ensemble fermé non dense e sur lequel φ est constante à ε près, et l'on connait des nombres v relatifs aux différents intervalles contigus à e. Soit x_0 un point de e, I_1, I_2, ... les contigus à e, $v(I_1)$, $v(I_2)$ ... les nombres v connus correspondants.

Calculons des valeurs approchées de $f(B)-f(A)$ à l'aide des fonctions que nous avons appelées f_0, f_1 ... dans notre quatrième remarque.

$f_0(x)$ est prise égale à $\varphi(x_0).x$, d'où la première valeur approchée $\varphi(x_0)(\beta-\alpha)$.

$f_1(x)$ est construite à l'aide de $f_0(x)$ et de la fonction qui, dans I_1, a donnée $v(I_1)$, d'où pour $f(\beta)-f(\alpha)$ la valeur approchée

$$\varphi(x_0)[(\beta-\alpha)-m(I_1)]+v(I_1);$$

$m(I_1)$ désignant la longueur de I_1.

$f_2(x)$ donne de même

$$\varphi(x_0)[(\beta-\alpha)-m(I_1)-m(I_2)]+v(I_1)+v(I_2).$$

Et finalement $f_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ nous donne

$$\varphi(x_0)[(\beta-\alpha)-\Sigma m(I_k)]+\Sigma v(I_k);$$

les séries sont ici absolument convergentes, car on a:

$$|v(I_k)|\leq|\varphi(x_0)|m(I_k)+\varepsilon m(I_k).$$

La quantité entre crochets est celle qui a reçu le nom de mesure[1] de e et que l'on note $m(e)$, nous attachons donc à (α, β) le nombre

$$v(\alpha, \beta)=\varphi(x_0)m(e)+\Sigma v(I_k).$$

11. Revenons au point de vue de l'intégrale indéfinie afin de comparer notre construction aux procédés utilisés par M. Baire pour prouver que toute fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait est la limite d'une suite de fonctions continues, c'est-à-dire la réciproque de la proposition que nous avons partiellement démontrée au n° 4.

De la proposition directe complète résulterait que notre dérivée $\varphi(x)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé; supposons donc $\varphi(x)$ donnée et essayons, par les procédés de M. Baire[2], de former une série de fonctions continues convergeant vers $\varphi(x)$.

---

[1] On remarquera que je n'utilise nullement la théorie de la mesure, je me sers seulement du *mot* »mesure»; mais je définis, pour l'ensemble e, ce qu'il signifie, sans avoir besoin d'aucune théorie générale.

[2] On pourra prendre l'exposé de ces procédés que donne M. Baire dans son livre: *Leçons sur les fonctions discontinues;* mais on pourrait se reporter à tout autre exposé conduisant non

Tout l'effort va porter sur la construction d'une série de fonctions continues convergeant vers une fonction $\varphi_\varepsilon(x)$ différant en tout point de $\varphi(x)$ de moins de ε; car, à partir de telles séries, on saurait en déduire une convergeant vers $\varphi(x)$. On ne réussira pas du premier coup à construire des fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ relatives à tout (a, b), on passera par l'intermédiaire de fonctions $\varphi_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ relatives à des parties (α, β) de (a, b).

Au premier stade de la construction, M. Baire porte son attention sur l'ensemble des points en lesquels $\varphi(x)$ subit une discontinuité au moins égale à ε. Cet ensemble est précisément notre ensemble E_1. Soit (A, B) un intervalle contigu à E_1, M. Baire le divise, précisément comme nous l'avons divisé, par des points

$$A \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < \beta_2 < \cdots B,$$

de manière que dans chaque intervalle partiel φ soit constante à moins de ε près. Et il construit tout d'abord, c'est sa première opération o_1, une série représentant dans chaque (A, B) la fonction $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ égale à $\varphi(\xi)$ dans (α, β), à $\varphi(\xi_i)$ dans (α_i, α_{i-1}), à $\varphi(\eta_i)$ dans (β_{i-1}, β_i); les nombres ξ, ξ_i, η_i étant ceux du numéro précédent. Donc les opérations O_1 et o_1, se correspondent entièrement et O_1 fournit les fonctions $f_\varepsilon(x, A, B)$ qui ont pour dérivées les fonctions $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ que donne o_1; ou plutôt, puisque la dérivée de $f_\varepsilon(x, A, B)$ n'existe pas aux points α_i et β_i, disons que $f_\varepsilon(x, A, B)$ est l'intégrale indéfinie de $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$.

Au second stade, la parenté entre les deux procédés est très grande, mais ne va plus jusqu'à l'identité.

L'opération o_2 de M. Baire consisterait à prendre l'ensemble e_2 des points où la discontinuité sur e_1 de la fonction φ considérée seulement sur e_1 est au moins égale à ε; si (A, B) est un intervalle contigu à e_2, M. Baire le partage par des points α_i, β_i, toujours de la même manière, en intervalles tels que (α, β). Dans (α, β) il y a une partie e de e_1 sur laquelle $\varphi(x)$ conserve à moins de ε près une valeur constante $\varphi(x_0)$ et l'on connait $\varphi_\varepsilon(x, I_k)$ dans les différents contigus à e. La fonction $\varphi_\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ que considère M. Baire est égale à $\varphi(x_0)$ sur

seulement à la démonstration du *théorème de M. Baire* mais aussi, comme dit M. de la Vallée-Poussin, à la solution du *problème de M. Baire.* C'est-à-dire qu'il faut écarter les raisonnements qui, comme ceux que j'ai donnés, fournissent un théorème d'existence de la série mais ne donnent pas un procédé régulier de construction de la série. Il y a fort longtemps que j'ai signalé la différence essentielle entre les deux espèces de démonstrations possibles (Journ. de Math. t. I, 1909, p. 176 en note et p. 183; C. R. t. CXXXIX, 1904); celles qui ne fournissent que le théorème d'existence peuvent ne pas faire appel à un procédé transfini tandis qu'un tel procédé parait indispensable pour la résolution du problème de M. Baire.

e et à $\varphi_\varepsilon(x, I_k)$ dans chaque I_k. Si donc (A, B) était aussi un intervalle contigu à notre ensemble E_2, la fonction $f_\varepsilon(x, A, B)$ donnée par notre opération O_2 apparaîtrait encore comme une sorte d'intégrale indéfinie de $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ donnée par o_2.[1] Mais en général notre ensemble E_2 contient plus de points que l'ensemble e_2 de M. Baire[2], il y a seulement parenté et non plus identité entre les deux modes de construction. Mais on peut rétablir l'identité de la façon suivante: supposons que, par inadvertance, nous ayons, au deuxième stade de la construction de M. Baire et aux stades suivants, défini de façon trop large l'ensemble exceptionnel; que, pour déclarer régulier un point de E_1, nous ayions, par exemple, exigé non seulement que ce soit un point en lequel φ a sur E_1 une discontinuité inférieure à ε mais encore que ce soit un point intérieur à l'un des intervalles (α, β) que fournit le théorème du numéro 4. Alors e_2 sera remplacé par E_2. Et il y aura identité entre les opérations o_2 et O_2.

En d'autres termes, si nous effectuons les opérations de construction de M. Baire, mais relativement à nos ensembles exceptionnels E_α, chaque opération o_α donne $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ dans les intervalles contigus à E_α et l'opération O_α fournit, dans les mêmes intervalles contigus, des fonctions $f_\varepsilon(x, A, B)$ qui sont des sortes d'intégrales indéfinies des $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$.[3]

12. On a vu, au numéro 10, comment les considérations précédentes conduisent naturellement aux sommes qui définissent l'intégrale de Riemann. Il ne serait pas difficile non plus de rattacher à ces considérations le procédé d'intégration des fonctions sommables; je ne m'y arrêterai pas.

Je fais remarquer seulement que si l'on connait la théorie des fonctions sommables, et même seulement des fonctions sommables bornées, lorsque l'on considère un intervalle (A, B) contigu à E_1, on sait, dans chacun des intervalles (α, β), (β, β_1), etc. en lesquels est divisé (A, B), calculer $f(x)$ non seulement avec l'approximation relative ε, mais exactement à une constante additive près. L'opération O_1 fournit alors exactement $f(x)$ dans (A, B). Il n'est pas difficile ensuite de modifier notre remarque 4° pour le cas où l'on connait $f(x)$ dans les

[1] D'une façon plus précise l'intégration terme à terme de la série donnant $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ fournirait $f_\varepsilon(x, A, B)$.

[2] En d'autres termes, la série donnant $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ n'est pas en général intégrable terme à terme dans tout (A, B), mais seulement dans les parties de (A, B) limitées par les points de E_2 qui sont dans (A, B).

[3] En d'autres termes, $f_\varepsilon(x, A, B)$ est définie par l'intermédiaire de l'intégration terme à terme d'une série servant à la définition de $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$. Je parle de séries servant à la définition de $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$ et non pas des séries de fonctions continues convergeant vers $\varphi_\varepsilon(x, A, B)$, bien qu'il paraisse vraisemblable qu'on puisse rendre celles-ci intégrables terme à terme.

contigus à un ensemble fermé E et où la dérivée $\varphi(x)$ de $f(x)$ est bornée sur E de façon que les opérations O_α successives nous fassent toutes connaître exactement $f(x)$ dans les intervalles contigus aux E_α.

On est ainsi conduit à l'opération même de la totalisation au sens de M. Denjoy; à cela près que nos ensembles exceptionnels $E_1, E_2, \ldots$ sont encore définis de façon trop large. Mais je n'insiste pas, le seul intérêt de ces remarques étant de rattacher très intimement la totalisation aux procédés et aux théorèmes de M. Baire.

M. Denjoy a d'ailleurs signalé, dès le début, qu'on pouvait baser la recherche des fonctions primitives des fonctions dérivées sur les théorèmes de M. Baire et ne faire appel aux propositions sur les nombres dérivés qui lui sont dus que lorsqu'il s'agit de remonter d'un nombre dérivé (et non plus d'une dérivée) à sa fonction primitive. Je ne m'occuperai pas de ce problème; je fais seulement observer que, dans ce qui précède, nous n'avons jamais complètement utilisé le fait que $\varphi(x)$ était une dérivée, tout ce qui a été dit s'applique sans aucune modification si $\varphi(x)$ est seulement une dérivée à droite, par exemple.