ÜBER VOLLSTETIGE LINEARE TRANSFORMATIONEN.

Von

T. H. HILDEBRANDT

in ANN ARBOR, MICHIGAN, U. S. A.

In seiner Abhandlung »Über lineare Funktionalgleichungen» (Acta Mathematica 41 (1916) S. 71—98) hat Friedrich Riesz eine elegante und allgemeine Methode zur Behandlung der linearen Integralgleichungen entwickelt. Es gelingt ihm, die Haupteigenschaften dieser Gleichungen aus der Betrachtung der charakteristischen Eigenschaften allgemeineren Funktionaltransformationen und Funktionalräume herzuleiten. Den Beweis des Satzes jedoch, dass die Anzahl der Lösungen für die homogene Fredholmsche Integralgleichung und für die transponierte oder adjungierte Gleichung dieselbe ist, zieht er nicht aus allgemeinen Überlegungen, sondern bedient sich der expliziten Integralgestalt der Transformation. Es ist nun Zweck dieser Arbeit, eine Herleitung dieses Satzes lediglich aus den Eigenschaften der Transformation durchzuführen, ohne deren Integralgestalt zu benützen. Dabei legen wir statt des Raumes der stetigen Funktionen einen allgemeineren Funktionalraum zu Grunde. Andeutungen über die Möglichkeit einer solchen Ausdehnung finden sich schon am Anfang der Abhandlung von Riesz.

Wir nehmen an, dass ein allgemeiner Raum $\mathfrak{F}$, aus Elementen f (oder g, h) bestehend, gegeben ist.[1] Von dem Raum wird gefordert dass zwischen seinen Elementen eine kommutative und assoziative Additionsoperation besteht. Ferner sei eine Multiplikation der Elemente von $\mathfrak{F}$ mit reellen oder komplexen Konstanten erklärt, und diese Operation genüge den üblichen kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetzen. Schliesslich soll es eine mit o bezeichnete Nullfunktion oder ein Nullelement geben, welches der Bedingung

[1] Man vergleiche z. B. S. BANACH, Fund. Math. 3 (1922) S. 134—136; N. WIENER, Bull. Soc. Math. France 50 (1922) S. 123.

$$f = f + 0$$

für alle f des Raumes genügt.

Jedem Element f von $\mathfrak{F}$ sei eine positive Zahl als Norm $\|f\|$ zugeordnet, welche den Bedingungen

$$\|cf\| = |c| \, \|f\|,$$

$$\|f_1 + f_2\| \leqq \|f_1\| + \|f_2\|,$$

$$\|f\| = 0 \text{ nur, wenn } f = 0,$$

unterworfen ist.

Der Raum sei vollständig, d. h. wenn man für eine Folge $\{f_n\}$ aus $\mathfrak{F}$

$$\lim_{m, n \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

hat, dann existiert eine Funktion f in $\mathfrak{F}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

In einem solchen Raume gelten die Resultate, welche Riesz in dem allgemeinen Theil seiner Arbeit hergeleitet hat, mit der Ausnahme, dass an die Stelle der gleichmässigen Konvergenz die Konvergenz im Sinne

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0,$$

wir wollen sagen im Sinn der Norm, gesetzt wird.

Mit Riesz beschäftigen wir uns mit Transformationen B, durch welche jeder Funktion f von $\mathfrak{F}$ eine Funktion $B(f)$ oder Bf aus $\mathfrak{F}$, oder einem Raume $\mathfrak{G}$, welcher denselben Bedingungen wie $\mathfrak{F}$ genügt, zugeordnet ist. Eine solche Transformation heisst linear, wenn erstens

$$B(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 B(f_1) + c_2 B(f_2)$$

für alle f_1, f_2 des Raumes $\mathfrak{F}$ und alle komplexen Zahlen c_1, c_2 gilt, und zweitens ein $M > 0$ existiert, so dass für alle f von $\mathfrak{F}$ die Beziehung

$$\|B(f)\| \leqq M \|f\|$$

besteht, wobei eventuell für einen Raum $\mathfrak{G}$ die Norm eines Elements nicht mit der Norm desselben Elements für $\mathfrak{F}$ übereinzustimmen braucht. Der Kernpunkt der Rieszschen Entwicklung liegt nun in der Definition vollstetiger Transformationen. Während eine lineare Transformation eine beschränkte Folge in eine beschränkte Folge und eine kompakte Folge in eine kompakte Folge überführt, wird eine Transformation welche eine beschränkte Folge in eine kompakte Folge transformiert, als **vollstetig** definiert. Die Resultate von Riesz beziehen sich auf lineare Transformationen von der Form

$$B(f) = f - A(f) = (E - A)f,$$

wobei A vollstetig ist und E die Einheitstransformation $E(f) = f$ bedeutet.[1]

Von den Rieszschen Sätzen sind die folgenden für das weitere hervorzuheben:

1. Entweder hat die homogene Gleichung

$$Bf = (E - A)f = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung, oder die Transformation B hat eine Reziproke.

2. Die Lösungen der homogenen Gleichungen

$$Bf = 0; \quad B^n f = 0$$

bilden lineare Mannigfaltigkeiten endlicher Dimensionszahl oder Ordnung.

Man kann also alle Lösungen als lineare Verbindung einer endlichen Anzahl von ihnen darstellen.

3. Es giebt eine ganze Zahl m derart, dass a) für $n > m$ jede Lösung der Gleichung $B^n f = 0$ schon die Gleichung $B^m f = 0$ befriedigt, dagegen für $n < m$ die Gleichung $B^{n+1} f = 0$ Lösungen besitzt, die nicht Lösungen von $B^n f = 0$ sind, und b) für $n > m$ die Mannigfaltigkeit $B^n \mathfrak{F}$, welche ensteht indem man alle Funktionen von $\mathfrak{F}$ der Transformation B^n unterwirft mit der Mannigfaltigkeit $B^m \mathfrak{F}$ übereinstimmt, während für $n < m$ $B^{n+1}\mathfrak{F}$ echter Theil von $B^n \mathfrak{F}$ ist.

Es seien die Funktionen $g_1, \ldots g_{n_1}, \ldots g_{n_m}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von $B^m f = 0$. Dann kann man diese Funktionen so

---

[1] Im Rieszschen Falle ist der Raum, zu welchem $B(f)$ gehört und welchen wir mit $B\mathfrak{F}$ bezeichnen werden, ein Teil von $\mathfrak{F}$. Im allgemeinen Fall kann man eine Transformation von der Form

$$Bf = Cf - Af$$

wobei C eine Reziproke C^{-1} besitzt und A vollstetig ist, auf die obige Form reduzieren wenn man statt B die Transformation

$$C^{-1} B = E - C^{-1} A$$

betrachtet, wobei das Produkt von zwei Transformationen und die Reziproke wie üblich definiert sind.

ordnen, dass bei $n_j \leq i < n_{j+1}$ die Funktionen g_i Lösungen von $B^j f = 0$, aber nicht von $B^{j-1} f = 0$ sind. Aus dieser Voraussetzung über die Funktionen g_i folgt dann

$$Bg_i = g_i - Ag_i = \sum_{k=1}^{n_j - 1} a_{ik} g_k,$$

woraus man weiter entnehmen kann, dass die Zahlen $n_i - n_{i-1}$ mit i nicht zunehmen.

4. Jede Funktion des Raumes $\mathfrak{F}$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Summe einer Lösung von $B^m f = 0$ und einer Funktion der Mannigfaltigkeit $B^m \mathfrak{F}$ darstellen, d. h.

$$f = \sum_{i=1}^{n_m} c_i g_i + f_0,$$

wobei f_0 zu $B^m \mathfrak{F}$ gehört. Diese Zerlegung definiert eine lineare Transformation B_0: $B_0 f = f_0$ und $(E - B_0) f = \sum_{i=1}^{n_m} c_i g_i$, für welche $AB_0 = B_0 A$ ist.[1]

Aus dem linearen Charakter von B_0 und den Eigenschaften linearer Mannigfaltigkeiten endlicher Ordnung folgt: wenn die Folge $f_k = \sum_1^{n_m} c_{ki} g_i + B_0 f_k$ der Funktion $f = \sum_1^{n_m} c_i g_i + B_0 f$ im Sinne der Norm zustrebt, dann gilt auch

$$\lim \| B_0 f_k - B_0 f \| = 0 \text{ und } \lim c_{ki} = c_i .$$

Eine Andeutung, wie man die Lösungen der transponierten Gleichung von $Bf = 0$ erhalten kann, liegt in der folgenden Bemerkung: Wenn man die Transformation A_0 durch die Gleichung

$$A_0 f = A_0 \left(\sum_1^{n_m} c_i g_i + B_0 f \right) = \sum_1^{n_1} c_i g_i$$

definiert, dann ergibt einerseits $A_0 \mathfrak{F}$ die lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen der Gleichung $Bf = 0$, anderseits hat man für alle f

$$BA_0 = 0 \text{ oder } AA_0 = A_0 \text{ und auch } A_0 A_0 = A_0 .$$

Man könnte also für die transponierte Gleichung erwarten, dass sich eine Trans-

---

[1] Wenn eine Gleichung für alle Elemente von $\mathfrak{F}$ besteht, werden wir öfters die Funktion f nicht ausdrücklich dazu schreiben.

formation $\bar{A}_0$ finden lässt welche der Bedingung

$$\bar{A}_0 B = 0 \text{ oder } \bar{A}_0 A = \bar{A}_0$$

für jedes f des Raumes $\mathfrak{F}$ genügt. In der That besteht

Hilfsatz 1. *Wenn $Bf = 0$ Lösungen besitzt, dann existiert eine lineare vollstetige Transformation $\bar{A}_0$ mit den Eigenschaften*

$$\bar{A}_0 f = \bar{A}_0 A f = \bar{A}_0 \bar{A}_0 f \tag{1}$$

für alle f des Raumes $\mathfrak{F}$.

Beweis. Wir definieren

$$\bar{A}_0 f = \bar{A}_0 \left(\sum_1^{n_m} c_i g_i + B_0 f\right) = \sum_{n_{m-1}+1}^{n_m} c_i g_i ,$$

so dass $A_0 f$ eine lineare Verbindung von Lösungen der Gleichung $B^m f = 0$ ist, welche nicht Lösungen von $B^{m-1} f = 0$ sind. Dann folgt aus den Voraussetzungen über die Funktionen g_i und $B_0 f$, dass $\bar{A}_0 A = \bar{A}_0$ ist, was die Vollstetigkeit von $\bar{A}_0$ zur Folge hat. Dass auch $\bar{A}_0 \bar{A}_0 = \bar{A}_0$, ist leicht einzusehen.

Im allgemeinen wird die Zahl $n_m - n_{m-1}$, d. h. die Ordnung der linearen Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ kleiner als n_1 sein. Wir beweisen weiter:

Hilfsatz 2. *Wenn $\bar{A}_0$ eine lineare vollstetige Transformation mit $\bar{A}_0 = \bar{A}_0 A = \bar{A}_0 \bar{A}_0$ und die lineare Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ von der Ordnung $n_0 < n_1$ ist, dann existiert eine Transformation $\bar{A}_0'$, welche denselben Bedingungen wie $\bar{A}_0$ genügt und für welche die Ordnung der linearen Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0' \mathfrak{F}$ grösser als n_0 ist.*

Beweis. Es sei h_i $(i = 1, 2, \ldots, n_0)$ ein System linear unabhängiger Funktionen von $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$. Dann existieren Funktionen des Raumes $\mathfrak{F}$, für welche $\bar{A}_0 f_i = h_i$, so dass auch

$$\bar{A}_0 \bar{A}_0 f_i = \bar{A}_0 h_i = \bar{A}_0 f_i = h_i .$$

Wir setzen

$$Cf = C\left(\sum_1^{n_m} a_i g_i + B_0 f\right) = \sum_1^{n_0} a_i h_i .$$

Dann ist C eine vollstetige Transformation. Auch genügen die Funktionen g_i für $i = n_0 + 1, \ldots n_1$ der homogenen Gleichung $(E - A - C) f = 0$. Aus Hilfsatz 1 folgt die Existenz einer vollstetigen linearen Transformation C_0, welche den Bedingungen $C_0 (A + C) = C_0 = C_0 C_0$ genügt. Insbesondere hat man also für $i = 1, 2, \ldots, n_0$ die Beziehung $C_0(E - A - C) g_i = 0$, woraus wegen $(E - A) g_i = 0$ die Gleichung $C_0 C g_i = 0$ folgt. Aber es gilt $C g_i = h_i$, so dass $C_0 h_i = 0$, und daraus ergibt sich für jedes f des Raumes $\mathfrak{F}$ $C_0 C f = 0$, wie auch $C_0 \bar{A}_0 f = 0$ ist. Die Mannigfaltigkeiten $C_0 \mathfrak{F}$ und $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ sind also verschieden. Wir setzen

$$\bar{A}_0' = \bar{A}_0 + C_0 - \bar{A}_0 C_0.$$

Dann beweist man leicht an Hand der Eigenschaften von C_0 und $\bar{A}_0$, dass $\bar{A}_0' A = \bar{A}_0' \bar{A}_0' = \bar{A}_0'$ ist. Ferner folgt aus der Orthogonalität $C_0 \bar{A}_0 = 0$ der Transformationen $\bar{A}_0$ und C_0 und der Form von $\bar{A}_0'$, dass die Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0' \mathfrak{F}$ mit der Summe der Mannigfaltigkeiten $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ und $C_0 \mathfrak{F}$ übereinstimmt, so dass sie von höherer als n_0-ter Ordnung ist.

Aus Hilfsatz 1 und 2 folgt nun, dass es eine Transformation $\bar{A}_0$ gibt, welche den Bedingungen (1) genügt und für welche die Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ von der Ordnung n_1 ist. Wir beweisen ferner:

Hilfsats 3. *Wenn die lineare Transformation $\bar{A}_0$ den Bedingungen $\bar{A}_0 B = 0$ oder $\bar{A}_0 = \bar{A}_0 A_0$ genügt, dann gehören zu der linearen Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ höchstens n_1 linear unabhängige Funktionen.*

Beweis. Wir nehmen an, h_i $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$ seien linear unabhängige Funktionen von $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$. Dann existieren Funktionen f_i aus $\mathfrak{F}$ mit $\bar{A}_0 f_i = h_i$, welche deshalb linear unabhängig sind. Dann definieren wir eine Transformation C durch den Ansatz:

$$Cf = C\left(\sum_1^{n_m} c_i g_i + B_0 f\right) = \sum_1^{n_1} c_i f_i.$$

Wir zeigen, dass die Gleichung $B - C = E - A - C = 0$ keine von der Nullfunktion verschiedene Lösung hat. Im entgegengesetztem Fall hätte man $\bar{A}_0(E - A - C) f = \bar{A}_0 C f = 0$, oder

$$\bar{A}_0\left(\sum_1^{n_1} c_i f_i\right) = \sum_1^{n_1} c_i \bar{A}_0 f_i = \sum_1^{n_1} c_i h_i = 0,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen h_i folgt, dass $c_i = 0$ oder $Cf = 0$ ist. Dann ist auch $Bf = 0$, d. h. f ist lineare Verbindung der Funktionen g_i $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$. Wenn also

$$f = \sum_1^{n_1} b_i g_i,$$

dann folgt aus der Beziehung $Cf = 0$ und der linearen Unabhängigkeit der Funktionen f_i, dass auch $b_i = 0$, d. h. dass $f = 0$.

Es gibt also zu der Transformation $E - A - C$ eine Reziproke. Angenommen nun, die Klasse $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ enthielte eine von $h_1, \ldots, h_{n_1}$ unabhängige Funktion h_{n_1+1}. Wenn f_{n_1+1} der Bedingung $\bar{A}_0 f_{n_1+1} = h_{n_1+1}$ genügt, dann existiert eine Funktion f, für welche $(E - A - C)f = f_{n_1+1}$ ist und also

$$\bar{A}_0 (E - A - C) f = \bar{A}_0 f_{n_1+1} = h_{n_1+1}.$$

Nun ist aber $\bar{A}_0 (E - A) f = 0$ und $\bar{A}_0 C f$ eine lineare Verbindung der Funktionen $h_1, \ldots h_{n_1}$. Dies gilt deshalb auch von h_{n_1+1} und widerspricht der Annahme über h_{n_1+1}.

Dass dann $\bar{A}_0$ eine lineare Mannigfaltigkeit der Ordnung n_1 bildet, liegt auf der Hand.

Endlich beweist man noch

Hilfsatz 4. *Wenn $\bar{A}_0$ der Bedingung $\bar{A}_0 B = 0$ genügt und die Mannigfaltigkeit $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ von n_1-ter Ordnung ist, dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass f zu $B\mathfrak{F}$ gehört, d. h. dass die Gleichung $(E - A) g = f$ lösbar ist, in dem Erfülltsein der Gleichung $\bar{A}_0 f = 0$.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist sogleich ersichtlich. Andrerseits sei $\bar{A}_0 f = 0$. Da nun die Transformation $E - A - C$, welche im Beweis des Hilsatzes 3 aufgestellt wurde, eine Reziproke besitzt, so gibt es eine Funktion g mit $(E - A - C) g = f$. Dann hat man auch $\bar{A}_0 (E - A - C) g = \bar{A}_0 f = 0$ und darum $\bar{A}_0 C g = 0$. Wie oben gezeigt wurde, folgt aber aus dieser Gleichung, dass $Cg = 0$, d. h. $(E - A) g = f$ ist. Deshalb gehört f zu $B\mathfrak{F}$.

Wenn man die Transformation $A_0 f$ wie am Anfang durch die Identität

$$A_0 f = A_0 \left(\sum_1^{n_m} c_i g_i + B_0 f \right) = \sum_1^{n_1} c_i g_i$$

erklärt, dann kann man die Hilfsätze 1 bis 4 in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz. *Die Existenz einer Transformation, welche den Bedingungen $A_0 = A A_0 = A_0 A_0$ genügt, zieht die Existenz einer Transformation mit $\bar{A}_0 = \bar{A}_0 A = \bar{A}_0 \bar{A}_0$ nach sich und umgekehrt. Die Maximalordnung der linearen Mannigfaltigkeiten $A_0 \mathfrak{F}$ und $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ ist dieselbe. Im Falle $\bar{A}_0 \mathfrak{F}$ die maximale Ordnung hat, lautet die Bedingung, dass f zu $B\mathfrak{F}$ gehört: $\bar{A}_0 f = 0$.*

Man könnte diesen Satz dahin ausdeuten, dass beim Übergange von $\mathfrak{F}$ zu $B\mathfrak{F}$ so viele Funktionen verloren gehen, wie die Gleichung $Bf = 0$ gewinnt.

Zum Schlusse nützen wir noch kurz die Tatsache aus dass die im Hilfsatz 3 definierte Transformation $E - A - C$ eine Reziproke besitzt. Wir nehmen an, dass $\ddot{A}_0 = \bar{A}_0 \bar{A}_0 = \bar{A}_0 A$, sodass die Funktionen f_i mit h_i übereinstimmen und also $\bar{A}_0 C = C$ ist. Wenn wir mit $E - A^{-1}$ die Reziproke von $E - A - C$ bezeichnen, kann man schreiben

$$(E - A - C)(E - A^{-1}) = E = (E - A^{-1})(E - A - C).$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$(E - A)(E - A^{-1}) = E + C(E - A^{-1}),$$

und, wenn man hierauf $\bar{A}_0$ anwendet, ergibt sich

$$0 = \ddot{A}_0 + \bar{A}_0 C(E - A^{-1}) = \bar{A}_0 + C(E - A^{-1}),$$

so dass

$$(E - A)(E - A^{-1}) = E - A_0.$$

In derselben Weise folgt aus der zweiten Gleichung, indem man auf die oben definierte Transformation A_0 zurückgreift (da ja $CA_0 = C$ und $(E - A)A_0 = 0$ ist)

$$(E - A^{-1})(E - A) = E - A_0.$$

Diese Gleichungen erinnern an die von W. A. Hurwitz[1] definierten Pseudoresolventen der Integralgleichungen. Durch Benutzung dieser Reziprokengleichungen kann man leicht beweisen, dass für zu $B\mathfrak{F}$ gehöriges g sich die Lösung von $Bf = (E - A)f = g$ in der Form

$$f = g - A^{-1}g + \sum_1^{n_1} c_i g_i$$

schreiben lässt. Es ist klar, dass die Transformation $\bar{A}$ und darum auch A^{-1} nicht eindeutig ist. Aus der ersten Reziprokengleichung folgert man, dass zwei Transformationen $\bar{A}_0$ und $\bar{A}_0'$ bei

$$\bar{A}_0' \bar{A}_0 = \bar{A}_0' \text{ und } \bar{A}_0 \bar{A}_0' = \bar{A}_0$$

das Gleiche leisten.

---

[1] W. A. Hurwitz, On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Transactions of the American Math. Soc. 13 (1912) S. 405—418.