SUR LES POLYNÔMES DE NEWTON ET CERTAINES FORMULES D'INTERPOLATION.

Par

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

Outre l'identité classique

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{n} (x,\, \omega)_s (y,\, \omega)_{n-s} = (x+y,\, \omega)_n,$$

les polynômes de Newton

$$(x,\, \omega)_n = \frac{x(x-\omega)(x-2\,\omega)\cdots(x-(n-1)\,\omega)}{n!}$$

vérifient une identité plus générale, dépendant d'un paramètre arbitraire. Cette identité

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{s=0}^{n} \frac{x}{x+\alpha s} (x+\alpha s,\, \omega)_s (y-\alpha s,\, \omega)_{n-s} = (x+y,\, \omega)_n$$

se réduit à (1) pour $\alpha = 0$, et semble avoir été démontrée pour la première fois par J. L. W. V. Jensen[1] sous sa forme générale, mais le cas particulier où $\omega = 0$ avait été rencontré déjà par Cauchy et Abel. J'ai retrouvé incidemment la forme particulière que prend (I) pour $\alpha = 2$, $\omega = 1$, dans un mémoire récent[2]; d'ailleurs il va sans dire que prendre ω égal à 1 n'est pas une restriction.

D'une manière plus générale, on se propose, dans la première partie de cet article, de déterminer toutes les identités de la forme

[1] Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues, Acta math. 26 (1902), p. 311—312.

[2] Mémoire sur les suites de polynômes, Acta math. 51 (1928), p. 225.

22 — 2822. *Acta mathematica.* 52. Imprimé le 24 août 1928.

$$(2)\qquad \sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\alpha s,\, \omega)_s (y+\beta s,\, \omega)_{n-s}}{(ax+by+c+\gamma s,\, \omega)_n} \frac{px+qy+r+\lambda s}{p'x+q'y+r'+\lambda' s} = 1,$$

où x, y sont deux variables indépendantes, et $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, p, q, r, p', q', r', \lambda, \lambda'$, 14 paramètres constants; cette identité devant avoir lieu quel que soit l'entier non négatif n.

On verra que cette question conduit à deux identités seulement, dont l'une est l'identité (I). Nous donnerons d'ailleurs deux démonstrations de (I), dont l'une est celle de Jensen.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous étendrons (I), ainsi que la formule d'interpolation qui lui est associée, au cas de plusieurs variables. On obtiendra ainsi deux généralisations distinctes, également remarquables, suivant qu'on utilisera l'un ou l'autre des deux modes de démonstration utilisés pour (I).

1. Pour déterminer les conditions que doivent remplir les coefficients de l'identité (2) pour qu'elle soit exacte, faisons d'abord $n = 0$; on doit avoir

$$px + qy + r \equiv p'x + q'y + r',$$

donc

$$p' = p, \qquad q' = q, \qquad r' = r.$$

Supposons ensuite que x et y augmentent indéfiniment. Le premier membre de (2) est équivalent à

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x,\, \omega)_s (y,\, \omega)_{n-s}}{(ax+by,\, \omega)_n},$$

et la comparaison à (1) montre que l'on doit avoir

$$a = b = 1.$$

Les identités cherchées sont donc nécessairement de la forme

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\alpha s,\, \omega)_s (y+\beta s,\, \omega)_{n-s}}{(x+y+c+\gamma s,\, \omega)_n} \frac{px+qy+r+\lambda s}{px+qy+r+\lambda' s} = 1.$$

2. Supposons d'abord que γ soit nul. Pour $n = 1$, (3) s'écrit

$$(4)\qquad (x+\alpha)(px+qy+r+\lambda) = (x+c)(px+qy+r+\lambda'),$$

ce qui exige que l'on ait, soit

$$\alpha = c, \qquad \lambda = \lambda', \tag{5}$$

soit

$$q = 0, \qquad r + \lambda = pc, \qquad r + \lambda' = p\alpha. \tag{6}$$

Les conditions (5) donnant la valeur 1 à la fraction

$$\Phi = \frac{px + qy + r + \lambda s}{px + qy + r + \lambda' s},$$

qui prend cette même valeur dans les conditions (6) pour $c = \alpha$, il suffit de se borner à ces dernières conditions, et d'étudier alors les identités de la forme

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x + \alpha s, \omega)_s (y + \beta s, \omega)_{n-s}}{(x + y + c, \omega)_n} \frac{px + r + (pc - r)s}{px + r + (p\alpha - r)s} = 1. \tag{7}$$

3. Si l'on suppose maintenant que γ ne soit pas nul, (3) s'écrit, pour $n = 1$,

$$(x + \alpha)(x + y + c)(px + qy + r + \lambda) = (x + c)(x + y + c + \gamma)(px + qy + r + \lambda'). \tag{8}$$

Les deux seuls cas possibles sont donc

$$p = q = 0, \qquad \lambda = \lambda' = -r, \tag{9}$$

et

$$p = q = 1, \qquad c = \alpha, \qquad r + \lambda = c + \gamma, \qquad r + \lambda' = c. \tag{10}$$

D'ailleurs (9) entraînent $\Phi = 1$, et donnent à (3), pour $n = 1$, une forme évidemment impossible, de sorte que les seules identités (2) à étudier sont ici de la forme

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x + \alpha s, \omega)_s (y + \beta s, \omega)_{n-s}}{(x + y + \alpha + \gamma s, \omega)_n} \frac{x + y + r + (\alpha + \gamma - r)s}{x + y + r + (\alpha - r)s} = 1. \tag{11}$$

4. *Etude de* (7). Reprenons l'égalité (7), et remplaçons y le terme $(y + \beta s, \omega)_{n-s}$ par son développement

$$(y+\beta s,\,\omega)_{n-s} = \sum_{\nu=0}^{n-s} (x+y+c,\,\omega)_\nu (-x-c+\beta s,\,\omega)_{n-s-\nu}.$$

(7) s'écrit alors

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-\nu} \frac{(x+\alpha s,\,\omega)_s (-x-c+\beta s,\,\omega)_{n-\nu-s} (x+y+c,\,\omega)_\nu}{(x+y+c,\,\omega)_n} \frac{px+r+(pc-r)s}{px+r+(p\alpha-r)s} = 1,$$

et l'identification par rapport à la variable $x+y+c$ fournit les identités, équivalentes à (7),

$$\sum_{s=0}^{n-\nu} (x+\alpha s,\,\omega)_s (-x-c+\beta s,\,\omega)_{n-\nu-s} \frac{px+r+(pc-r)s}{px+r+(p\alpha-r)s} = \varepsilon_{n,\nu},$$

où $\varepsilon_{n,\nu}=0$ pour $n \neq \nu$, $\varepsilon_{n,n}=1$. En remplaçant $n-\nu$ par n, on est donc ramené à chercher les identités à une variable de la forme

$$(12) \qquad \sum_{s=0}^{n} (x+\alpha s,\,\omega)_s (-x-c+\beta s,\,\omega)_{n-s} \frac{px+r+(pc-r)s}{px+r+(p\alpha-r)s} = \varepsilon_{0,n}.$$

Lorsque p est nul, la fraction Φ se réduit à l'unité, et (12) fournit, pour $n=1$, la condition $c=\alpha$; cette dernière condition suffisant que que Φ soit égal à 1, on n'écarte aucune forme possible en supposant $p \neq 0$. D'ailleurs, il est clair qu'on peut alors prendre $p=1$.

Avec cette hypothèse, (12) donne, pour $n=2$,

$$(x+c)(x+2\alpha-r)(x+c-2\beta-\omega) = (x+2\alpha)(x+2\alpha-\omega)(x+2c-r).$$

L'identification des deux membres pouvant se faire de six façons, on obtient ainsi les six systèmes de conditions

$$\begin{array}{llll}
(A) & c=r=0 & , \ \beta=-\alpha; & \\
(B) & c=r=\omega & , \ \beta=-\alpha; & \\
(C) & c=\alpha=\beta=0; & & \\
(D) & c=2\alpha & , \ \beta=-\alpha, & r=\omega; \\
(E) & c=2\alpha-\omega & , \ \beta=-\alpha, & r=0; \\
(F) & c=\alpha=\omega & , \ \beta=-\alpha. &
\end{array}$$

Remarquons tout de suite que les conditions (C) donnent à (7) la forme de l'identité classique (1), et que les cinq systèmes qu'il reste à étudier supposent $\beta = -\alpha$.

Pour (A), (7) devient justement l'identité (I) de Jensen.

Pour (B), (7) s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\alpha s,\, \omega)_s (y-\alpha s,\, \omega)_{n-s}}{(x+y+\omega,\, \omega)_n} \frac{x+\omega}{x+\omega+(\alpha-\omega)s} = 1,$$

et se ramène aisément à (I) en changeant x en $x-\omega$.

Examinons maintenant les conditions (D), et reprenons (12) avec $n=3$. On doit avoir identiquement

$$(x+2\alpha)\{(x+2\alpha+\omega)(x+2\alpha+2\omega) - 3(x+3\alpha)(x+3\alpha+\omega) + 3(x+4\alpha)(x+4\alpha-\omega)\} =$$
$$= (x+3\alpha)(x+3\alpha-\omega)(x+6\alpha-2\omega).$$

L'identification du binôme $x+2\alpha$ à l'un des facteurs au second membre exige que l'on ait $\alpha=0$, ou $\omega=\alpha$, ou $\omega=2\alpha$. Pour $\alpha=0$, (D) s'identifie à (C). Pour $\omega=\alpha$, (7) s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\omega+\omega s,\, \omega)_s (y-\omega s,\, \omega)_{n-s}}{(x+y+2\omega,\, \omega)_n} = 1,$$

et prend, en changeant x en $x-2\omega$, la forme particulière de (I) pour $\alpha=\omega$. Enfin, pour $\omega=2\alpha$, (7) s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\alpha s,\, 2\alpha)_s (y-\alpha s,\, 2\alpha)_{n-s}}{(x+y+2\alpha,\, 2\alpha)_n} \frac{x+2\alpha}{x+2\alpha-\alpha s} = 1,$$

et prend immédiatement la forme de (I) en changeant x en $x-2\alpha$.

Le système de conditions (E) ne donne rien de plus que (D), car (12) prend la même forme, au changement près de x en $x+\omega$.

Enfin, on voit tout de suite que, dans les conditions (F), la fraction Φ se réduit à l'unité, et que (7) prend la forme à laquelle se réduit (I) pour $\alpha=\omega$.

En résumé la seule identité de la forme (7) est l'identité de Jensen, dont nous donnerons plus loin deux démonstrations.

5. *Etude de* (11). Pour $n=2$, (11) devient

$$(13)\qquad \frac{y(y-\omega)}{(x+y+\alpha)(x+y+\alpha-\omega)}+2\frac{(x+\alpha)(y+\beta)}{(x+y+\alpha+\gamma-\omega)(x+y+\alpha)}+$$
$$+\frac{(x+2\alpha)(x+2\alpha-\omega)(x+y+2\alpha+2\gamma-r)}{(x+y+\alpha+2\gamma)(x+y+\alpha+2\gamma-\omega)(x+y+2\alpha-r)}=1.$$

Ceci exige que $x+y+\alpha$ se trouve au dénominateur de la dernière fraction, ou disparaisse dans la somme des deux premières fractions. γ n'étant pas nul, la première circonstance exige $\omega=2\gamma$ ou $r=\alpha$. Dans un cas comme dans l'autre, on voit immédiatement que les autres facteurs aux dénominateurs des fractions de (13) sont distincts, ce qui conduit à une impossibilité.

En écrivant alors que le résidu du pôle simple $x=-y-\alpha$ est nul dans la somme des deux premières fractions de (13), considérée comme fonction de x, on obtient les conditions $\beta=\gamma=-\omega$, grâce auxquelles (13) s'écrit

$$(14)\qquad \frac{(y-\omega)(2x+y+2\alpha-2\omega)}{(x+y+\alpha-\omega)(x+y+\alpha-2\omega)}+$$
$$+\frac{(x+2\alpha)(x+2\alpha-\omega)(x+y+2\alpha-2\omega-r)}{(x+y+\alpha-2\omega)(x+y+\alpha-3\omega)(x+y+2\alpha-r)}=1.$$

Pour $\omega=0$, (14) devient

$$y(2x+y+2\alpha)+(x+2\alpha)^2=(x+y+\alpha)^2,$$

ce qui exige $\alpha=0$, de sorte que (11) se réduit à la formule du binôme.

Pour $\omega\neq 0$, le facteur $x+y+\alpha-\omega$ ne peut être identifié qu'à $x+y+2\alpha-r$, ce qui entraîne $r=\alpha+\omega$, et, par suite, donne à (14) la forme

$$(y-\omega)(2x+y+2\alpha-2\omega)+(x+2\alpha)(x+2\alpha-\omega)=(x+y+\alpha-\omega)(x+y+\alpha-2\omega);$$

l'identification exigeant encore que $\alpha=0$, les conditions obtenues sont, en définitive, $\alpha=0$, $r=\omega$, $\beta=\gamma=-\omega$, ce qui donne à (11) la forme

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{s=0}^{n}\frac{(x,\omega)_s(y-\omega s,\omega)_{n-s}}{(x+y-\omega s,\omega)_n}\,\frac{x+y+\omega-2\omega s}{x+y+\omega-\omega s}=1,$$

et cette identité remarquable est effectivement exacte, comme nous allons le vérifier.

6. Tout d'abord, le changement de y en $y-x-\omega$ donne à (II) la forme

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x,\,\omega)_s\,(y-x-\omega-\omega s,\,\omega)_{n-s}}{(y-\omega s,\,\omega)_{n+1}}\,(y-2\,\omega s)=n+1\,. \tag{15}$$

Le premier membre étant une fonction rationnelle de y qui tend vers $n+1$ quand y augmente indéfiniment, il suffit de démontrer qu'il n'admet aucun pôle. Les seuls pôles possibles sont simples, et d'affixe

$$\omega s,\quad \omega(s+1),\quad \omega(s+2),\ldots\,\omega(s+n),$$

s prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$. Il suffit donc de démontrer que les résidus aux points $0, \omega, 2\omega, \ldots 2n\omega$ sont nuls quel que soit x.

Un pôle $y=k\omega$ n'apparaît qu'aux fractions au premier membre de (15) pour lesquelles

$$s\leq k\leq n+s,$$

c'est-à-dire, pour lesquelles

$$k-n\leq s\leq k,\quad \text{avec}\quad 0\leq s\leq n.$$

On doit donc vérifier que

$$\sum_{s} \frac{(x,\,\omega)_s\,(-x+(k-1-s)\omega,\,\omega)_{n-s}}{(k-s)(k-s-1)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(k-s-n)}\,(k-2s)=0, \tag{16}$$

la sommation étant étendue de 0 à k si $0\leq k\leq n$, et de $k-n$ à n si $n\leq k\leq 2n$.

Si nous simplifions l'écriture en prenant $\omega=1$, (16) devient, dans le premier cas,

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{(x,\,1)_s\,(x+n-k,\,1)_{n-s}}{(k-s)!\,(n-k+s)!}\,(k-2s)=0, \tag{17}$$

ou, après division par le facteur $(x+n-k)(x+n-k-1)\cdots(x+1)$,

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{(x,\,1)_s\,(x,\,1)_{k-s}}{(n-s)!\,(n-k+s)!}\,(k-2s)=0,$$

et l'identité à zéro résulte immédiatement de ce que le terme général de cette dernière somme change simplement de signe quand on change s en $k-s$.

Dans le deuxième cas, changeons s en $n-s$ et k en $2n-k$. On doit alors vérifier que

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{(x, 1)_{n-s}(x+k-n, 1)_s}{(k-s)!(n-k+s)!}(k-2s) = 0,$$

où $0 \leq k \leq n$, ce qui se fait comme pour (17).

7. Revenons maintenant à l'identité (I) et reproduisons tout d'abord l'élégante démonstration de Jensen. Le point de départ de cette démonstration est la série de Lagrange relative à la racine ξ, infiniment petite avec la variable t, de l'équation

$$F(\xi) \equiv \xi - t(\xi+1)^\alpha = 0,$$

où α désigne un nombre quelconque, et $(1+\xi)^\alpha$ la branche qui se réduit à 1 pour $\xi = 0$. On sait alors que, x désignant un nombre quelconque, on a

$$\frac{(\xi+1)^x}{F'(\xi)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\left[\frac{d^m}{d\xi^m}(\xi+1)^{x+m\alpha}\right]_{\xi=0},$$

$$(\xi+1)^x = 1 + x\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\left[\frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}}(\xi+1)^{x+m\alpha-1}\right]_{\xi=0};$$

en prenant pour $(\xi+1)^x$ la branche égale à 1 pour $\xi = 0$, on a donc[1]

$$(18) \qquad \frac{(\xi+1)^x}{F'(\xi)} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x+m\alpha}{m} t^m,$$

$$(19) \qquad (\xi+1)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x}{x+m\alpha}\binom{x+m\alpha}{m} t^m.$$

Il suffit alors de développer, à l'aide de (18) et (19), les trois termes de l'identité

$$\frac{(\xi+1)^{x+y}}{F'(\xi)} = (\xi+1)^x \frac{(\xi+1)^y}{F'(\xi)}$$

pour obtenir (I), aux notations près.

---

[1] Nous utilisons aussi la notation classique

$$\binom{x}{n} = (x, 1)_n = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

Voici une deuxième démonstration, moins directe mais peut-être plus instructive. Les polynômes newtonniens $(x, \omega)_n$ sont définis par le développement en série entière[1] de t

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} (x, \omega)_n t^n .$$

Si nous formons alors l'expression

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \left[1-(1+\omega t)^{\frac{\alpha}{\omega}}\right]^n, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

son développement, évidemment divisible par t^n, s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (1+\omega t)^{\frac{x+\alpha s}{\omega}} = \sum_{s=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n}{s} (x+\alpha s, \omega)_\nu t^\nu ,$$

de sorte que

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (x+\alpha s, \omega)_\nu = 0 \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \tag{20}$$

en particulier, on peut écrire

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (x+\alpha s, \omega)_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1, \tag{21}$$

d'où résulte d'ailleurs (20). En changeant x et α en $x+(n-1)\omega$ et $\alpha-\omega$, (21) s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!\,(n-s)!} [x+(n-s-1)\omega+\alpha s][x+(n-s-2)\omega+\alpha s] \cdots (x+\alpha s) \cdots$$
$$\cdots [x-(s-1)\omega+\alpha s] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x+\alpha s, \omega)_s (-x-\alpha s, \omega)_{n-s}}{x+\alpha s} = 0 \qquad n \geq 1 .$$

[1] On considère évidemment les branches $(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}}$ égales à 1 pour $t=0$.

En y adjoignant le cas où n est nul, on peut écrire ceci

(22) $$\sum_{s=0}^{n} \frac{x}{x+\alpha s}(x+\alpha s,\,\omega)_s(-x-\alpha s,\,\omega)_{n-s} = \varepsilon_{0,\,n} \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Enfin, remplaçons n par $n-\nu$, multiplions les deux membres par $(x+y,\,\omega)_\nu$ et sommons par rapport à ν, de 0 à n. Il vient

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-\nu} \frac{x}{x+\alpha s}(x+\alpha s,\,\omega)_s(-x-\alpha s,\,\omega)_{n-s-\nu}(x+y,\,\omega)_\nu = (x+y,\,\omega)_n,$$

et il suffit de permuter les sommations par rapport à s et ν pour former

(I) $$\sum_{s=0}^{n} \frac{x}{x+\alpha s}(x+\alpha s,\,\omega)_s(y-\alpha s,\,\omega)_{n-s} = (x+y,\,\omega)_n.$$

8. *Généralisations de* (I). Généralisons cette dernière démonstration, en écrivant que le développement, suivant les puissances entières de t, de

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}}\left[1-(1+\omega t)^{\frac{\alpha_1}{\omega}}\right]^{n_1}\left[1-(1+\omega t)^{\frac{\alpha_2}{\omega}}\right]^{n_2}\cdots\left[1-(1+\omega t)^{\frac{\alpha_r}{\omega}}\right]^{n_r}$$

est divisible par $t^{n_1+n_2+\cdots+n_r}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ désignant des entiers non négatifs et non tous nuls, et les α_i étant, ainsi que x, des nombres arbitraires. En prenant $\omega = 1$ pour simplifier l'écriture, on a donc

$$\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}(-1)^{s_1+\cdots+s_r}\binom{n_1}{s_1}\cdots\binom{n_r}{s_r}\binom{x+\alpha_1 s_1+\cdots+\alpha_r s_r}{n_1+\cdots+n_r-1} = 0.$$

Changeons x en $x+(n_1+\cdots+n_r-1)$ et α_i en α_i-1 $(i = 1, 2, \ldots, r)$; en posant

$$X(s) = x+\alpha_1 s_1+\cdots+\alpha_r s_r,$$

ceci s'écrit

$$\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\frac{(-1)^{s_1+\cdots+s_r}}{s_1!\,(n_1-s_1)!\cdots s_r!\,(n_r-s_r)!}\binom{X(s)+n_1-s_1+\cdots+n_r-s_r-1}{n_1+\cdots+n_r-1} = 0,$$

ou

$$\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\binom{-X(s)-n_1+s_1-\cdots-n_{r-1}+s_{r-1}}{n_r-s_r}\binom{-X(s)-n_1+s_1-\cdots-n_{r-2}+s_{r-2}}{n_{r-1}-s_{r-1}}\cdots$$
$$\cdots\frac{(-X(s),\,1)_{n_1-s_1}}{X(s)}\times\binom{X(s)}{s_1}\binom{X(s)-s_1}{s_2}\cdots\binom{X(s)-s_1-\cdots-s_{r-1}}{s_r}=0;$$

en posant

$$s'_i=s_1+s_2+\cdots+s_i,\quad n'_i=n_1+n_2+\cdots+n_i,\qquad i=1,2,\ldots,r,$$

on a donc

$$(23)\qquad \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\frac{x}{X(s)}\binom{X(s)}{s_1}\binom{X(s)-s_1}{s_2}\cdots\binom{X(s)-s'_{r-1}}{s_r}\binom{-X(s)}{n_1-s_1}\cdots$$
$$\cdots\binom{-X(s)-n'_{r-1}+s'_{r-1}}{n_r-s_r}=\varepsilon_{0,n_1}\varepsilon_{0,n_2}\cdots\varepsilon_{0,n_r},$$

et ceci reste valable pour $n_1=n_2=\cdots=n_r=0$.

Ceci obtenu, remplaçons les n_i par $n_i-\nu_i$, multiplions ensuite les deux membres par

$$\binom{x+y_1}{\nu_1}\binom{x+y_2+n_1-\nu_1}{\nu_2}\cdots\binom{x+y_{r-1}+n_{r-2}-\nu_{r-2}+\cdots+n_1-\nu_1}{\nu_{r-1}}\times$$
$$\times\binom{x+y_r+n_{r-1}-\nu_{r-1}+\cdots+n_1-\nu_1}{\nu_r},$$

et sommons par rapport aux r indices ν_i, de 0 à n_i respectivement. On voit tout de suite que le second membre de (23) fournit ainsi la quantité

$$(24)\qquad \binom{x+y_1}{n_1}\binom{x+y_2}{n_2}\cdots\binom{x+y_r}{n_r}.$$

Quant au premier membre, il donne

$$(25)\qquad \sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{s_1=0}^{n_1-\nu_1}\cdots\sum_{\nu_r=0}^{n_r}\sum_{s_r=0}^{n_r-\nu_r}\frac{x}{X(s)}\binom{X(s)}{s_1}\binom{-X(s)}{n_1-\nu_1-s_1}\binom{x+y_1}{\nu_1}\cdots$$
$$\cdots\binom{X(s)-s'_{r-1}}{s_r}\binom{-X(s)-n'_{r-1}+\nu'_{r-1}+s'_{r-1}}{n_r-\nu_r-s_r}\binom{x+y_r+n'_{r-1}-\nu'_{r-1}}{\nu_r},$$

où l'on a posé

$$\nu'_i = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

La sommation par rapport à ν_r, faite en premier lieu, donne

$$\sum_{\nu_r=0}^{n_r-s_r} \binom{-X(s)-n'_{r-1}+\nu'_{r-1}+s'_{r-1}}{n_r-s_r-\nu_r} \binom{x+y_r+n'_{r-1}-\nu'_{r-1}}{\nu_r} = \binom{Y_r(-s)+s'_{r-1}}{n_r-s_r},$$

où l'on a posé

$$Y_i(-s) = y_i - \alpha_1 s_1 - \cdots - \alpha_r s_r \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Le terme ainsi obtenu ne contient plus d'indice ν. Ensuite la sommation relative à l'indice ν_{r-1} donne

$$\sum_{\nu_{r-1}=0}^{n_{r-1}-s_{r-1}} \binom{-X(s)-n'_{r-2}+\nu'_{r-2}+s'_{r-2}}{n_{r-1}-s_{r-1}-\nu_{r-1}} \binom{x+y_{r-1}+n'_{r-2}-\nu'_{r-2}}{\nu_{r-1}} = \binom{Y_{r-1}(-s)+s'_{r-2}}{n_{r-1}-s_{r-1}},$$

et ainsi de suite jusqu'à la sommation relative à l'indice ν_1, qui donne

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1-s_1} \binom{-X(s)}{n_1-s_1-\nu_1} \binom{x+y_1}{\nu_1} = \binom{Y_1(-s)}{n_1-s_1}.$$

L'expression ainsi obtenue pour (25), égalée à (24), fournit enfin l'identité

$$\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r} \frac{x}{X(s)} \binom{X(s)}{s_1} \binom{X(s)-s_1}{s_2} \cdots \binom{X(s)-s'_{r-1}}{s_r} \binom{Y_1(-s)}{n_1-s_1} \binom{Y_2(-s)+s_1}{n_2-s_2} \cdots$$
$$\cdots \binom{Y_r(-s)+s'_{r-1}}{n_r-s_r} = \binom{x+y_1}{n_1} \binom{x+y_2}{n_2} \cdots \binom{x+y_r}{n_r}.$$

En introduisant l'écart général ω, ceci s'écrit

$$(26) \quad \prod_{i=1}^{r} (x+y_i, \omega)_{n_i} = \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r} \frac{x}{X(s)} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X(s)-s'_{i-1}\omega, \omega)_{s_i} (Y_i(-s)+s'_{i-1}\omega, \omega)_{n_i-s_i} \right\},$$

en convenant de prendre $s'_0 = 0$. En particulier pour $\omega = 0$, on a la formule

$$\prod_{i=1}^{r}(x+y_i)^{n_i} = x\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\binom{n_1}{s_1}\cdots\binom{n_r}{s_r}X(s)^{s_1+\cdots+s_r-1}\,Y_1(-s)^{n_1-s_1}\cdots Y_r(-s)^{n_r-s_r},$$

qui généralise celle donnée par Abel dans le cas $r=1$.

9. Dans le mémoire cité, Jensen démontre également la formule d'interpolation remarquable

$$\varphi(x+y) = \sum_{s=0}^{n}\frac{x}{x+\alpha s}\binom{x+\alpha s}{s}\overset{s}{\triangle}\varphi(y-\alpha s), \tag{27}$$

valable pour un polynôme de degré n, et généralisant une formule analogue donnée par Abel pour un écart nul. Cette formule se réduit à (I), pour $\omega=1$, en prenant $\varphi(x)=\binom{x}{n}$, mais elle résulte réciproquement de (I), car il suffit de poser

$$\varphi(x+y) = \sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(x+y,\,\omega)_\nu,$$

et d'appliquer la formule (I) aux polynômes newtonniens du second membre pour obtenir (27) sous la forme

$$\varphi(x+y) = \sum_{s=0}^{n}\frac{x}{x+\alpha s}(x+\alpha s,\,\omega)_s\underset{\omega}{\overset{s}{\triangle}}\varphi(y-\alpha s). \tag{28}$$

La même méthode va nous permettre de déduire de (26) une formule d'interpolation applicable à un polynôme de r variables.[1] Etant donné un tel polynôme $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, convenons d'écrire, par analogie avec la notation différentielle,

$$\underset{\omega}{\overset{s_1+s_2+\cdots+s_r}{\triangle}}{}_{x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_r^{s_r}}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_r) = \underset{\omega}{\overset{s_1}{\triangle}}{}_{x_1}\underset{\omega}{\overset{s_2}{\triangle}}{}_{x_2}\cdots\underset{\omega}{\overset{s_r}{\triangle}}{}_{x_r}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_r),$$

[1] Bien entendu, nous avons en vue d'autres formules que celles qu'on déduirait directement de (28), comme, par exemple

$$\varphi(x_1+y_1, \ldots x_r+y_r) = \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\frac{x_1\cdots x_r}{(x_1+\alpha_1 s_1)\cdots(x_r+\alpha_r s_r)}(x_1+\alpha_1 s_1, \omega_1)_{s_1}\cdots$$

$$\cdots(x_r+\alpha_r s_r,\,\omega_r)_{s_r}\underset{\omega_1}{\overset{s_1}{\triangle}}{}_{y_1}\cdots\underset{\omega_r}{\overset{s_r}{\triangle}}{}_{y_r}\varphi(y_1-\alpha_1 s_1, \ldots y_r-\alpha_r s_r).$$

les différences finies au second membre se rapportant à la variable en indice. D'autre part, pour un tel polynôme de degrés $n_1, n_2, \ldots n_r$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_r$, on peut écrire

$$\varphi(x+y_1, x+y_2, \ldots x+y_r) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{n_r} A_{\nu_1 \ldots \nu_r} (x+y_1, \omega)_{\nu_1} \cdots (x+y_r, \omega)_{\nu_r},$$

de sorte que (26), appliquée à chaque terme au second membre, donne

$$\varphi(x+y_1, \ldots x+y_r) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{n_r} \sum_{s_1=0}^{\nu_1} \cdots \sum_{s_r=0}^{\nu_r} \frac{x}{X(s)} (X(s), \omega)_{s_1} \cdots$$
$$\cdots (X(s) - s'_{r-1}\omega, \omega)_{s_r} A_{\nu_1 \ldots \nu_r} (Y_1(-s), \omega)_{\nu_1 - s_1} \cdots (Y_r(-s) + s'_{r-1}\omega, \omega)_{\nu_r - s_r};$$

donc, en permutant les sommations par rapport aux ν_i et aux s_i, il vient

$$(29) \qquad \varphi(x+y_1, \ldots x+y_r) = \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r} \frac{x}{X(s)} (X(s), \omega)_{s_1} \cdots$$
$$\cdots (X(s) - s'_{r-1}\omega, \omega)_{s_r} \underset{\omega}{\overset{s_1+\cdots+s_r}{\triangle}}{}_{y_1^{s_1} \cdots y_r^{s_r}} \varphi(Y_1(-s), \ldots Y_r(-s) + s'_{r-1}\omega).$$

Cette formule peut être considérée comme équivalente à (26), et se réduit à elle pour

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_r) = (y_1, \omega)_{n_1} \cdots (y_r, \omega)_{n_r}.$$

Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$, on obtient la formule d'interpolation

$$(30) \qquad \varphi(x+y_1, \ldots x+y_r) = \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r} (x, \omega)_{s_1} \cdots$$
$$\cdots (x - s'_{r-1}\omega, \omega)_{s_r} \underset{\omega}{\overset{s_1+\cdots+s_r}{\triangle}}{}_{y_1^{s_1} \cdots y_r^{s_r}} \varphi(y_1, \ldots y_r + s'_{r-1}\omega),$$

pour un polynôme de degrés $n_1, n_2, \ldots n_r$ par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots y_r$, auxquelles on donne le même accroissement x. Pour $\omega = 0$, (29) se réduit d'autre part à

$$(31) \quad \varphi(x+y_1, \ldots x+y_r) = x\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots$$

$$\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\frac{(x+\alpha_1 s_1+\cdots+\alpha_r s_r)^{s_1+\cdots+s_r-1}}{s_1!\cdots s_r!}\varphi^{(s_1+\cdots+s_r)}_{y_1^{s_1}\cdots y_r^{s_r}}(Y_1(-s), \ldots Y_r(-s)),$$

qui généralise la formule d'Abel, relative à $r=1$.

10. Nous allons réaliser une autre généralisation de (I) en utilisant la série de Lagrange relative à un système d'équations. On sait que le système d'équations

$$F_k(\xi_1, \ldots \xi_r) \equiv \xi_k - t_k f_k(\xi_1, \ldots \xi_r) = 0 \qquad k=1, 2, \ldots r,$$

où les f_k sont holomorphes aux origines $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_r=0$, possède une solution unique $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ infiniment petite avec $t_1, t_2, \ldots t_r$, et que, si $\Phi(\xi_1, \ldots \xi_r)$ est également holomorphe aux origines, on a

$$(32) \quad \frac{\Phi(\xi_1, \ldots \xi_r)}{\dfrac{D(F_1, \ldots F_r)}{D(\xi_1, \ldots \xi_r)}} = \sum_{n_1=\cdots=n_r=0}^{\infty}\frac{t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}}{n_1!\cdots n_r!}\left[\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_r}\Phi f_1^{n_1}\cdots f_r^{n_r}}{\partial\xi_1^{n_1}\cdots\partial\xi_r^{n_r}}\right]_{\xi_1=\cdots=\xi_r=0}.$$

Prenons

$$f_k(\xi_1, \ldots \xi_r) = \prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{\alpha_i^k},$$

où les α_i^k désignent r^2 nombres arbitraires, et les $(\xi_i+1)^{\alpha_i^k}$ les branches égales à 1 pour $\xi_i=0$; convenons également de désigner par $D(\xi_1, \ldots \xi_r)$ le déterminant fonctionnel au premier membre de (32). Dans ces conditions, si nous prenons

$$\Phi(\xi_1, \ldots \xi_r) = \prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{x_i},$$

où les x_i désignent des nombres quelconques, et où les facteurs $(\xi_i+1)^{x_i}$ sont les branches égales à 1 pour $\xi_i=0$, (32) donne

$$(33) \quad \frac{\prod\limits_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{x_i}}{D(\xi_1, \ldots \xi_r)} = \sum_{n_1=\cdots=n_r=0}^{\infty} t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}\prod_{i=1}^{r}\binom{x_i+n_1\alpha_i^1+n_2\alpha_i^2+\cdots+n_r\alpha_i^r}{n_i}.$$

En prenant

$$\Phi(\xi_1, \ldots \xi_r) = D(\xi_1, \ldots \xi_r) \prod_{i=1}^{r} (\xi_i + 1)^{x_i},$$

(32) donne la formule, beaucoup plus compliquée a priori,

$$(34) \quad \prod_{i=1}^{r} (\xi_i + 1)^{x_i} =$$

$$= \sum_{n_1 = \cdots = n_r = 0}^{\infty} \frac{t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r}}{n_1! \cdots n_r!} \left[\frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_r} D(\xi_1, \ldots \xi_r)(\xi_1 + 1)^{X_1} \cdots (\xi_r + 1)^{X_r}}{\partial \xi_1^{n_1} \cdots \partial \xi_r^{n_r}} \right]_{\xi_1 = \cdots = \xi_r = 0},$$

où l'on a posé

$$(35) \qquad X_i = x_i + n_1 \alpha_i^1 + n_2 \alpha_i^2 + \cdots + n_r \alpha_i^r \qquad i = 1, 2, \ldots r.$$

Il s'agit de calculer le crochet au second membre de (34). En posant

$$u_i = \xi_i + 1,$$

il vient

$$D(\xi_1, \ldots \xi_r) = \begin{vmatrix} 1 - \alpha_1^1 t_1 u_1^{\alpha_1^1 - 1} u_2^{\alpha_2^1} \cdots u_r^{\alpha_r^1} & \cdots & -\alpha_1^r t_r u_1^{\alpha_1^r - 1} u_2^{\alpha_2^r} \cdots u_r^{\alpha_r^r} \\ -\alpha_2^1 t_1 u_1^{\alpha_1^1} u_2^{\alpha_2^1 - 1} \cdots u_r^{\alpha_r^1} & \cdots & -\alpha_2^r t_r u_1^{\alpha_1^r} u_2^{\alpha_2^r - 1} \cdots u_r^{\alpha_r^r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -\alpha_r^1 t_1 u_1^{\alpha_1^1} u_2^{\alpha_2^1} \cdots u_r^{\alpha_r^1 - 1} & \cdots & 1 - \alpha_r^r t_r u_1^{\alpha_1^r} u_2^{\alpha_2^r} \cdots u_r^{\alpha_r^r - 1} \end{vmatrix},$$

ou, en ordonnant par rapport aux variables t_i le développement de ce déterminant,

$$D(\xi_1, \ldots \xi_r) = 1 - \sum_i \alpha_i^i \frac{t_i}{u_i} u_1^{\alpha_1^i} u_2^{\alpha_2^i} \cdots u_r^{\alpha_r^i} + \sum_{i<k} \begin{vmatrix} \alpha_i^i & \alpha_i^k \\ \alpha_k^i & \alpha_k^k \end{vmatrix} \frac{t_i t_k}{u_i u_k} u_1^{\alpha_1^i + \alpha_1^k} \cdots u_r^{\alpha_r^i + \alpha_r^k}$$

$$+ \cdots + (-1)^r \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^r \\ \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r^1 & \cdots & \alpha_r^r \end{vmatrix} \frac{t_1 t_2 \cdots t_r}{u_1 u_2 \cdots u_r} u_1^{\alpha_1^1 + \cdots + \alpha_1^r} \cdots u_r^{\alpha_r^1 + \cdots + \alpha_r^r}.$$

On voit ainsi que

$$(36)\quad \frac{1}{n_1!\cdots n_r!}\left[\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_r} D u_1^{X_1}\cdots u_r^{X_r}}{\partial\xi_1^{n_1}\cdots\partial\xi_r^{n_r}}\right]_{\xi_1=\cdots=\xi_r=0}=\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_r}{n_r}-$$

$$-\sum_h \alpha_h^h t_h\binom{X_1+\alpha_1^h}{n_1}\cdots\binom{X_h+\alpha_h^h-1}{n_h}\cdots\binom{X_r+\alpha_r^h}{n_r}$$

$$+\sum_{h<k}\begin{vmatrix}\alpha_h^h & \alpha_h^k\\ \alpha_k^h & \alpha_k^k\end{vmatrix} t_h t_k\binom{X_1+\alpha_1^h+\alpha_1^k}{n_1}\cdots\binom{X_h+\alpha_h^h+\alpha_h^k-1}{n_h}\cdots$$

$$\cdots\binom{X_k+\alpha_k^h+\alpha_k^k-1}{n_k}\cdots\binom{X_r+\alpha_r^h+\alpha_r^k}{n_r}$$

$$+\cdots+(-1)^r\begin{vmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^r\\ \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_2^r\\ . & . & .\\ \alpha_r^1 & \cdots & \alpha_r^r\end{vmatrix} t_1 t_2\cdots t_r\binom{X_1+\alpha_1^1+\cdots+\alpha_1^r-1}{n_1}\cdots\binom{X_r+\alpha_r^1+\cdots+\alpha_r^r-1}{n_r}.$$

Or, dans la première somme du second membre de (36), $X_i+\alpha_i^h$ est la valeur que prend l'expression (35) de X_i pour les exposants $n_1, n_2, \ldots, n_h+1, \ldots n_r$ du terme variable correspondant $t_1^{n_1}\cdots t_h^{n_h+1}\cdots t_r^{n_r}$; de même, dans la somme suivante, $X_i+\alpha_i^h+\alpha_i^k$ est la valeur de (35) pour les exposants du terme correspondant $t_1^{n_1}\cdots t_h^{n_h+1}\cdots t_k^{n_k+1}\cdots t_r^{n_r}$, et ainsi de suite. Il résulte de là que, dans le développement ordonné du second membre de (34), le coefficient de $t_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_r^{n_r}$ est

$$\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_r}{n_r}-\sum_h\alpha_h^h\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_h-1}{n_h-1}\cdots\binom{X_r}{n_r}+$$

$$+\sum_{h<k}\begin{vmatrix}\alpha_h^h & \alpha_h^k\\ \alpha_k^h & \alpha_k^k\end{vmatrix}\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_h-1}{n_h-1}\cdots\binom{X_k-1}{n_k-1}\cdots\binom{X_r}{n_r}$$

$$+\cdots+(-1)^r\begin{vmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^r\\ \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_2^r\\ . & . & .\\ \alpha_r^1 & \cdots & \alpha_r^r\end{vmatrix}\binom{X_1-1}{n_1-1}\binom{X_2-1}{n_2-1}\cdots\binom{X_r-1}{n_r-1};$$

en mettant en facteur le premier terme, ceci s'écrit

$$\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_r}{n_r}\left\{1-\sum_h\alpha_h^h\frac{n_h}{X_h}+\right.$$

$$\left.+\sum_{h<k}\begin{vmatrix}\alpha_h^h & \alpha_h^k\\ \alpha_k^h & \alpha_k^k\end{vmatrix}\frac{n_h}{X_h}\frac{n_k}{X_k}+\cdots+(-1)^r\begin{vmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^r\\ . & . & .\\ \alpha_r^1 & \cdots & \alpha_r^r\end{vmatrix}\frac{n_1}{X_1}\frac{n_2}{X_2}\cdots\frac{n_r}{X_r}\right\};$$

l'accolade n'étant rien autre que le déterminant[1]

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha_1^1\dfrac{n_1}{X_1} & -\alpha_1^2\dfrac{n_2}{X_2} & \cdots & -\alpha_1^r\dfrac{n_r}{X_r} \\ -\alpha_2^1\dfrac{n_1}{X_1} & 1-\alpha_2^2\dfrac{n_2}{X_2} & \cdots & -\alpha_2^r\dfrac{n_r}{X_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_r^1\dfrac{n_1}{X_1} & -\alpha_r^2\dfrac{n_2}{X_2} & \cdots & 1-\alpha_r^r\dfrac{n_r}{X_r} \end{vmatrix} = \left|\varepsilon_k^i - \alpha_k^i\frac{n_i}{X_i}\right|,$$

on a ainsi démontré l'identité

$$(37) \qquad \prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{x_i} = \sum_{n_1=\cdots=n_r=0}^{\infty} \frac{t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}}{X_1\cdots X_r}\binom{X_1}{n_1}\cdots\binom{X_r}{n_r}\left|\varepsilon_k^i X_i - \alpha_k^i n_i\right|$$

que nous allons combiner avec (33). Appliquons en effet ces deux développements aux trois termes de l'identité

$$(38) \qquad \frac{\prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{x_i+y_i}}{D(\xi_1,\ldots\xi_r)} = \prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{x_i}\,\frac{\prod_{i=1}^{r}(\xi_i+1)^{y_i}}{D(\xi_1,\ldots\xi_r)}.$$

En posant maintenant, pour préciser la signification de (35),

$$X_i(\pm n) = x_i \pm (\alpha_i^1 n_1 + \alpha_i^2 n_2 + \cdots + \alpha_i^r n_r),$$
$$X_i(n-s) = x_i + \alpha_i^1(n_1-s_1) + \alpha_i^2(n_2-s_2) + \cdots + \alpha_i^r(n_r-s_r),$$

et en désignant à l'aide de la lettre Y_i les expressions analogues où x_i est remplacé par y_i, l'identification des coefficients de $t_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_r^{n_r}$ dans les deux membres de (38) fournit la formule

$$\prod_{i=1}^{r}\binom{x_i+Y_i(n)}{n_i} = \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r}\left|\varepsilon_k^i X_i(s) - \alpha_k^i s_i\right|\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{X_i(s)}\binom{X_i(s)}{s_i}\binom{Y_i(n-s)}{n_i-s_i}\right\}.$$

---

[1] Suivant une notation classique, on suppose que $\varepsilon_k^i = 0$ si $i \neq k$, et $\varepsilon_i^i = 1$.

Il ne reste plus qu'à changer y_i en $Y_i(-n)$ $(i=1, 2, \ldots r)$, c'est-à-dire $Y_i(n)$ en y_i, pour obtenir l'identité que nous avions en vue

$$(39) \qquad \prod_{i=1}^{r}\binom{x_i+y_i}{n_i} = \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r} \left| \varepsilon_k^i X_i(s) - \alpha_k^i s_i \right| \left\{ \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{X_i(s)} \binom{X_i(s)}{s_i} \binom{Y_i(-s)}{n_i-s_i} \right\},$$

avec, au second membre, r^2 paramètres arbitraires α_k^i. On peut d'ailleurs revenir à des écarts quelconques ω_i, ce qui donne

$$(40) \qquad \prod_{i=1}^{r}(x_i+y_i, \omega_i)_{n_i} = \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r} \left| \varepsilon_k^i X_i(s) - \alpha_k^i s_i \right| \prod_{i=1}^{r} \frac{(X_i(s), \omega_i)_{s_i} (Y_i(-s), \omega_i)_{n_i-s_i}}{X_i(s)}.$$

En particulier, le cas $\omega_1 = \cdots = \omega_r = 0$ fournit une nouvelle généralisation de l'identité d'Abel.

11. Le même raisonnement qu'au paragraphe 9 permet de déduire de (40) la formule d'interpolation remarquable

$$(41) \qquad \varphi(x_1+y_1, \ldots x_r+y_r) =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_r} \frac{(X_1(s), \omega_1)_{s_1} \cdots (X_r(s), \omega_r)_{s_r}}{X_1(s) \cdots X_r(s)} \left| \varepsilon_k^i X_i(s) - \alpha_k^i s_i \right| \underset{\omega_1^{s_1} \cdots \omega_r^{s_r}}{\overset{s_1+\cdots+s_r}{\triangle}}{}_{y_1^{s_1} \cdots y_r^{s_r}} \varphi(Y_1(-s), \ldots Y_r(-s)),$$

où $\varphi(x_1, \ldots x_r)$ désigne un polynôme arbitraire de degrés $n_1, \ldots n_r$ par rapport à ses r arguments $x_1, \ldots x_r$, et au second membre de laquelle le symbole de la différence finie a une signification évidente. Lorsque tous les α_k^i deviennent nuls, (41) se réduit à la formule l'interpolation de Newton pour un polynôme à r variables.