

LE PROBLÈME STATIQUE FONDAMENTAL DU SOLIDE SPHÉRIQUE (ÉLASTIQUE) QUAND ON SE DONNE LES DÉPLACEMENTS SUR SA SURFACE.

Par

UMBERTO CRUDELI

à MESSINE.

La solution, établie par M. Lichtenstein, du problème fondamental des petites déformations élastiques quand on se donne les déplacements sur la surface contour du solide (solide isotrope et homogène) équilibré, solution qui se rattache à l'équation intégrale

$$(1) \quad \theta^* - \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 3\mu)} \iint \left(e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \right)_\sigma \theta d\sigma = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \mathcal{A}^*,$$

à laquelle doit satisfaire (sur la dite surface) la dilatation cubique, conduit, ainsi que nous le verrons, à un notable traitement dans le cas du contour sphérique, au moyen de la théorie des fonctions sphériques, en utilisant l'expression [que j'ai établie ailleurs¹] à laquelle on peut réduire le noyau de (1) lorsque précisément le contour, (σ), de l'espace S (qui est occupé par le solide) soit une sphère.

Naturellement nous supposons (circonstance dont il serait facile en quelque manière de constater la possibilité) que les déplacements sur le susdit contour sphérique, lesquels ont été assignés d'avance, rendent légitime notre méthode de

¹ Rivista di Matematica e Fisica (Circolo matematico-fisico di Messina), volume primo, fascicolo 2:0, 1926, pp. 73—74.

Cfr., à propos du coefficient $\frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 3\mu)}$ qui figure dans (1), un rappel que j'ai fait dans ma Note des Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei de Octobre 1925 (p. 247) et aussi le mémoire de M. LICHTENSTEIN *Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit* [Mathematische Zeitschrift, Band 28 (1928), Heft 3, p. 393.]

Dans une note, qui paraîtra dans les Rendiconti dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere (séance du 2 mai 1929), je traite le problème intérieur fondamental du mouvement lent stationnaire d'un liquide visqueux dans le cas du contour sphérique.

traitement; on tiendra présent la théorie pour le développement d'une fonction du point de la sphère de rayon unitaire en série de fonctions (sphériques) de Laplace avec la méthode générale de M. Lichtenstein sur le premier problème au contour dans la théorie de l'équilibre élastique.

* * *

La λ et la μ sont les deux constantes élastiques de Lamé relatives au solide considéré; tandis que \mathcal{A}^* est une fonction du point de (σ) [fonction qu'on doit considérer connue¹ une fois assignés les déplacements sur le contour σ lui même, auquel est étendue l'intégrale qui figure dans (1)].

L'expression

$$(2) \quad \varrho \frac{\partial^2 G}{\partial \varrho \partial n},$$

sans parenthèse, G étant la fonction ordinaire de Green et n se référant à la normale (intérieure) au contour (σ) en M (point relatif à l'élément $d\sigma$), résulte une fonction de M et du point, O , situé à l'intérieur de l'espace S ; en outre le symbole d'opération $\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}$ doit être individualisé au moyen de

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} = (\xi - x) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial}{\partial z},$$

ayant désigné par ξ, η, ζ les coordonnées cartésiennes (orthogonales) du point M et par x, y, z celles du point O .

Or, en dénotant par a le rayon de la sphère et par r la distance entre les deux points M et O , nous avons

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{a^2 - r^2}{ar^3},$$

où l désigne la distance entre O et le centre de la sphère (centre que nous prenons comme origine des coordonnées). Puis en appliquant l'opération

$$(\xi - x) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial}{\partial z}$$

à cette $\frac{\partial G}{\partial n}$, j'obtiens

¹ Cfr. L. LICHTENSTEIN, *Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie*. [Mathematische Zeitschrift, Band 20 (1924), Heft 1-2, pp. 21-28.]

$$\sum (\xi - x) \left\{ 3 \frac{a^2 - l^2}{a} \frac{\xi - x}{r^5} - \frac{2x}{a r^3} \right\}$$

c'est-à-dire

$$3 \frac{a^2 - l^2}{a r^3} + 2 \sum \frac{x(x - \xi)}{a r^3}$$

ou bien

$$3 \frac{a^2 - l^2}{a r^3} + 2 \frac{l^2}{a r^3} - \frac{2}{a r^3} (x \xi + y \eta + z \zeta)$$

ou bien encore

$$3 \frac{a}{r^3} - \frac{l^2}{a r^3} - \frac{2}{a r^3} (x \xi + y \eta + z \zeta),$$

qui, à cause de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} & -2 \frac{l^2}{a r^3} + \frac{l^2}{a r^3} - \frac{2}{a r^3} (x \xi + y \eta + z \zeta) + \frac{1}{a r^3} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2 \frac{a}{r^3} \\ & = \frac{1}{a r^3} \left\{ l^2 - 2(x \xi + y \eta + z \zeta) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right\} - 2 \frac{l^2}{a r^3} + 2 \frac{a}{r^3}; \end{aligned}$$

enfin, en rappelant que $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$, nous avons

$$\frac{1}{a r^3} \left\{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right\} + 2 \frac{a^2 - l^2}{a r^3},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{a r} + 2 \frac{\partial G}{\partial n}.$$

Nous voulons noter incidemment que, de l'égalité

$$l^2 = a^2 + r^2 + 2 a r \cos \beta,$$

où β désigne l'angle entre la normale intérieure (n) et la droite OM orientée de O vers M , on tire

$$2 \cos \beta = \frac{l^2 - a^2}{a r} - \frac{r}{a},$$

et par conséquent

$$2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{a^2 - l^2}{a r^3} + \frac{1}{a r},$$

de sorte que, dans le cas présent, la (2) peut aussi s'écrire

$$- \frac{1}{a r} + 4 \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n}.$$

Or nous rappelons que, en désignant par $\theta(O)$ la dilatation cubique correspondant au point intérieur O , le premier membre de (1), multiplié par $\lambda + 3\mu$, provient du passage à la limite qu'on doit appliquer à l'expression

$$(3\lambda + 5\mu)\theta(O) - \frac{\lambda + \mu}{4\pi} \iint e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \theta d\sigma$$

lorsqu'on fait tendre O à un point, O^* , du contour (σ) , n'oubliant pas que

$$\lim \iint e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \theta d\sigma = 8\pi\theta^* + \iint \left(e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \right)_\sigma^* \theta d\sigma.$$

Dans le cas de la sphère (ainsi que je viens de le montrer)

$$e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} = \frac{1}{a r} + 2 \frac{\partial G}{\partial n},$$

donc à présent

$$\iint e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \theta d\sigma = \frac{1}{a} \iint \theta \frac{d\sigma}{r} + 2 \iint \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma,$$

mais

$$\lim \iint \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = 4\pi\theta^*,$$

donc, enfin, maintenant

$$\lim \iint e \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial n} \theta d\sigma = 8\pi\theta^* + \frac{1}{a} \iint \theta \frac{d\sigma}{r^*}.$$

Il vient ainsi l'équation intégrale

$$\theta^* - \frac{\lambda + \mu}{4\pi a(\lambda + 3\mu)} \iint \theta \frac{d\sigma}{r^3} = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \mathcal{A}^*,$$

qui représente la (1) du cas actuel et qui, pour cela, admet une solution unique (en base à la nature des constantes λ et μ de la théorie de l'élasticité).

* * *

Pour simplicité, en regardant le rayon de la sphère comme unitaire (ce qui manifestement ne restreint pas la généralité) nous écrivons

$$(3) \quad \theta^* - \frac{k}{4\pi} \iint \theta \frac{d\sigma}{r^3} = \Phi^*,$$

$$\text{avec } k = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \text{ et } \Phi^* = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} \mathcal{A}^*.$$

Nous écrivons en outre

$$(4) \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

y ayant omis, pour brièveté, l'astérisque et en entendant (avec manifeste signification des symboles)

$$Y_n = \frac{2n + 1}{4\pi} \iint \Phi P_n(\cos \gamma) d\sigma,$$

où P_n représente le polynôme bien connu de Legendre.

Observons que, en désignant par E et η respectivement le module d'élasticité (module de Young) et le rapport de Poisson, l'on a

$$\lambda = \frac{\eta E}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \eta)}$$

avec la limitation

$$-1 < \eta < \frac{1}{2}.$$

La somme $\lambda + \mu$ résulte pour cela positive; mais, puisque μ aussi résulte positive, on voit que même $\lambda + 3\mu$ est positive. Il s'ensuit que notre constante k est un nombre positif inférieur à l'unité.

Or, n'oubliant pas la prémisse contenue dans le commencement du présent travail, la série qui figure dans le second membre de (4), c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n$, sera accueillie comme uniformément convergente. Attendu qu'on a la convergence uniforme de cette série là, nous aurons aussi la convergence uniforme de la série suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n Y_n \quad \text{avec} \quad h_n = \frac{1}{1 - \frac{k}{2n+1}}.$$

En effet, assigné autant petit qu'on voudra un nombre positif (disons-le ε), il existe indépendamment du point de notre sphère un index N tel que l'on a

$$|Y_{N+1} + Y_{N+2} + \dots + Y_{N+p}| < (1-k)\varepsilon$$

quel que soit l'entier positif p . Or, à l'expression

$$H \equiv |h_{N+1} Y_{N+1} + h_{N+2} Y_{N+2} + \dots + h_{N+p} Y_{N+p}|$$

on peut appliquer un lemme d'Abel¹, puisque les nombres positifs h_n sont décroissants et en outre les

$$Y_{N+1}, Y_{N+1} + Y_{N+2}, \dots, Y_{N+1} + Y_{N+2} + \dots + Y_{N+p}$$

sont toutes, en valeur absolue, inférieures à $(1-k)\varepsilon$. Pour cela

$$H < (1-k)\varepsilon h_{N+1};$$

mais h_{N+1} ne surpasse pas $\frac{1}{1-k}$, donc

$$|h_{N+1} Y_{N+1} + h_{N+2} Y_{N+2} + \dots + h_{N+p} Y_{N+p}| < \varepsilon$$

avec N indépendant du point de notre sphère et avec p entier positif quelconque.

Cela établi,

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} h_n Y_n$$

donne la solution de (3), n'oubliant pas que (le rayon de la sphère étant unitaire) on a

¹ Cfr. (par exemple) GOUSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, tome I, p. 182 (1910).

$$r^* = \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}$$

et

$$\iint \frac{Y_n(M) d\sigma}{\sqrt{2(1 - \cos \gamma)}} = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n.$$

Or nous observons que (en supposant éliminées les forces de masse) la dilatation cubique dans l'espace S résulte une fonction harmonique; pour cela

$$\theta(O) = \frac{1}{4\pi} \iint \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Mais, en rappelant la théorie des fonctions harmoniques en relation aux développements en série de polynômes harmoniques, choses à appliquer ici à la fonction harmonique $\frac{1}{4\pi} \iint \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$, laquelle prend les valeurs $\theta = \theta(O^*)$ sur la sphère (σ), on voit que nous aurons

$$\theta(O) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n Y_n l^n,$$

en désignant par l la valeur numérique de la distance entre le point O et le centre de la sphère susdite (supposée de rayon unitaire).

Après cela la détermination des déplacements à l'intérieur du solide élastique se présente immédiate.

Messine (Université), février 1929.

