SUR LA SEMI-CONTINUITÉ DES INTÉGRALES DOUBLES DU CALCUL DES VARIATIONS.

Par

LEONIDA TONELLI

à Bologna.

Introduction.

Dans un Mémoire[1] publié en 1915, à la suite d'autres travaux sur le même sujet[2], nous avons énoncé, pour les intégrales appartenant à une classe très étendue de problèmes du Calcul des Variations, le théorème suivant: »Lorsque certaines conditions de régularité sont satisfaites, l'intégrale en question est toujours une fonction semi-continue de l'élément sur lequel elle agit; et l'on a, précisément, une fonction semi-continue inférieurement ou supérieurement, suivant que le problème est *régulier-positif* ou *régulier-négatif*». Cette même proposition a été énoncée, en 1922, dans nos »*Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*»[3], sous la forme suivante: »... Si ha però — almeno per le funzioni di linea o superficie più importanti che si presentano nel Calcolo delle Variazioni — che queste funzioni godono generalmente della semicontinuità superiore o inferiore; e, con maggior precisione, sta il fatto che della semicontinuità godono tutte quelle funzioni di linea o superficie che soddisfano a certe condizioni di *regolarità*.»

En nous bornant aux intégrales curvilignes, dans le Mémoire que nous avons cité, dans un autre travail sur »*La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*»[4],

---

[1] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXXIX (1915), pp. 233—264).

[2] *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXXII (1911), pp. 297—337); *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni* (Ibidem, t. XXXV (1913), pp. 49—73).

[3] Bologna, Zanichelli; Vol. I, p. 27.

[4] Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XLIV (1920), pp. 167—249.

et dans le 1[er] volume de nos »*Fondamenti*«, nous avons fait connaître deux démonstrations différentes du théorème dont nous venons de parler. Comme il résultera de ce qui va suivre, ces démonstrations sont aussi parfaitement valables pour les intégrales doubles ou intégrales de surfaces[5].

Après M. Lebesgue, qui a démontré, dans sa Thèse[6], que l'intégrale de surface

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS,$$

où l'on suppose $f \geq 0$, est une fonction semi-continue inférieurement, nous devons citer, à propos de la semi-continuité des intégrales doubles, MM. Goursat, Radò, Haar.

M. Goursat[7], en s'appuyant sur l'hypothèse qu'il existe, pour la fonction $f(x, y, z, p, q)$, deux nombres positifs α, β, tels qu'on ait toujours

$$(\alpha) \qquad u^2 f_{pp} + 2\, uv f_{pq} + v^2 f_{qq} \geq \alpha\, u^2 + \beta\, v^2,$$

pour tous les points (x, y, z) qu'il faut considérer et quelles que soient les valeurs p et q, a établi la semi-continuité inférieure de l'intégrale

$$(\beta) \qquad \iint_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

pour toute fonction $z(x, y)$ continue, avec ses dérivées partielles du 1[er] ordre $p(x, y)$ et $q(x, y)$, dans tout le domaine D.

L'étude des travaux de Z. de Geöcze sur la quadrature des surfaces, a amené M. Radò[8] à démontrer que les intégrales

$$\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy, \qquad \iint_D (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

---

[5] Nous étudierons d'une façon générale les intégrales doubles ou de surfaces dans le 3[ième] volume (en préparation) de nos »*Fondamenti*«.

[6] *Intégral, Longueur, Aire.* (Annali di Matematica, S. III, T. VII (1902), pp. 231—359).

[7] *Sur quelques fonctions de lignes semi-continues.* (Bull. Soc. Math. de France, t. XLIII (1915), pp. 118—130).

[8] *Bemerkung über das Doppelintegral* $\iint (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy$. (Math. Zeitschr., Bd. 26 (1927), pp. 408—416).

sont semi-continues inférieurement dans la classe des fonctions $z(x, y)$ qui satisfont, dans D, à une condition de Lipschitz

$$(\gamma) \qquad |z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\, L[z],$$

$L[z]$ étant une constante finie, qui n'est pas nécessairement la même pour toutes les fonctions $z(x, y)$, Plus généralement, M. Haar[9] a démontré que, si $f(p, q)$ est fonction seulement de p et q, et si elle satisfait toujours aux inégalités

$$(\delta) \qquad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0, \qquad f_{pp} > 0,$$

l'intégrale

$$\iint_D f(p, q)\, dx\, dy$$

est semi-continue inférieurement dans la classe des fonctions $z(x, y)$ satisfaisant à l'inégalité (γ).

Après ces travaux, il reste encore à démontrer la semi-continuité de l'intégrale (β) pour la classe des fonctions $z(x, y)$ qui ont la même généralité que les fonctions $y(x)$ que nous avons étudiées dans nos »*Fondamenti*«. Dans cet ouvrage, nous avons établi la semi-continuité de l'intégrale *quasi-régulière*

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

par rapport aux fonctions $y(x)$ absolument continues dans l'intervalle (a, b) et telles que $f(x, y(x), y'(x))$ soit intégrable dans (a, b). Comme il suit des recherches de M. Lavrentieff[10], ces fonctions $y(x)$ donnent la classe la plus étendue que l'on puisse considérer dans le Calcul des Variations. D'autre part, on est amené nécessairement à cette classe de fonctions si l'on veut étudier par les méthodes directes, et avec toute généralité, les problèmes du Calcul des Variations.

Pour l'intégrale double (β) les fonctions $z(x, y)$ les plus générales que l'on rencontre dans les méthodes directes du Calcul des Variations sont les fonctions absolument continues, suivant la définition que nous en avons donnée dans nos

---

[9] *Über das Plateausche Problem.* (Math. Ann., Bd. 97 (1926), pp. 124—158).

[10] *Sur quelques problèmes du Calcul des Variations.* (Annali di Matematica, S. IV, T. IV (1926—1927), pp. 7—28).

recherches sur la quadrature des surfaces[11]; et il est bien entendu que, parmi ces fonctions, on doit considérer seulement celles pour lesquelles $f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))$ résulte intégrable dans le domaine donné D. C'est précisément pour la classe de ces fonctions que nous allons démontrer la semi-continuité de l'intégrale (β), cette intégrale étant supposée *quasi-régulière*[12].

§ 1. Généralitées.

1. — Domaines ouverts bornés.

Nous dirons qu'un ensemble D de points du plan (x, y) est un *domaine ouvert borné:*

1°) si tous ses points sont des points intérieurs à l'ensemble (c'est-à-dire si tout point de D est le centre d'un cercle qui ne contient que des points de D);

2°) si tous ses points sont des points intérieurs à un carré Q, convenablement choisi dans le plan (x, y).

On a, par exemple, un domaine ouvert borné si l'on considère l'ensemble des points intérieurs à un cercle, ou à une ellipse, ou à un rectangle, ou à une courbe simple de Jordan, etc.

Nous pouvons toujours supposer que le carré Q ait ses côtés parallèles aux axes x, y. Dans cette hypothèse, divisons Q en 4^n carrés égaux (n entier positif), et parmi ces petits carrés considérons ceux dont les points sont tous des points de D. Ils donnent, par tous leurs points, un ensemble (borné et fermé) que nous appellerons *l'ensemble D_n intérieur à D.* Il est bien évident que tout point de D_n est aussi un point de D_{n+1}; en outre, si P est un point de D, il existe un entier positif n' tel que, pour tout $n > n'$, P appartient à D_n. L'ensemble D est donc la somme d'une infinité dénombrable de petits carrés, et la mesure de D_n est, pour tout n suffisamment grand, aussi près que l'on veut de la mesure de D.

2. — Fonctions absolument continues.

Soit $z(x, y)$ une fonction définie dans un domaine ouvert borné D. Si y_0 est l'ordonnée d'un point de D, l'intersection de D avec la droite $y = y_0$ est formée par un nombre fini ou une infinité dénombrable de segments *ouverts* $s_1, s_2, \ldots s_i, \ldots$. Considérons un segment s_i. La borne supérieure de la variation totale de $z(x, y_0)$ sur tout segment intérieur à s_i est ce que nous appelons la *variation totale (liné-*

[11] *Sur la quadrature des surfaces.* (Comptes rendus, t. 182 (1926), pp. 1198—1200).

[12] L'intégrale (β) est certainement *quasi-régulière positive* si l'inégalité (α) est satisfaite. De même pour le cas des inégalités (δ).

aire) de $z(x, y)$ sur le segment ouvert s_i. La somme des variations totales (linéaires) correspondantes à tous les segments $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$ est la *variation totale (linéaire)* de $z(x, y)$ sur l'intersection de D avec la droite $y = y_0$. Nous désignerons cette somme (finie ou non) par la notation $V_{(x)}(y_0)$. On définit de la même façon la *variation totale (linéaire)* $V_{(y)}(x_0)$ de $z(x, y)$ sur l'intersection de D avec la droite $x = x_0$.

Cela posé, nous dirons que $z(x, y)$ est une *fonction à variation bornée* dans le domaine ouvert borné D si $V_{(x)}(y)$ et $V_{(y)}(x)$ sont des fonctions, respectivement de y et de x, finies presque partout et partout intégrables[13].

Revenons au segment ouvert s_i. Si $z(x, y_0)$ est une fonction (de x) absolument continue sur tout segment intérieur à s_i, nous dirons que $z(x, y_0)$ est absolument continue sur le segment ouvert s_i. Lorsque $z(x, y_0)$ est absolument continue sur tous les s_i, nous dirons que cette fonction de x est absolument continue sur l'intersection de D avec la droite $y = y_0$. Nous dirons, enfin, que $z(x, y)$ est *une fonction absolument continue dans le domaine ouvert borné D:*

1°) si elle est continue et à variation bornée dans D;

2°) si, pour presque toutes les valeurs de y_0 et de x_0, $z(x, y_0)$ et $z(x_0, y)$ sont des fonctions (respectivement de x et de y) absolument continues sur les intersections de D avec les droites $y = y_0$ et $x = x_0$, respectivement.

Il est bien évident que toute fonction continue dans D, ayant partout des dérivées partielles du 1^{er} ordre bornées, est une fonction absolument continue dans D. De même pour toute fonction continue satisfaisant à la condition de Lipschitz.

Si $z(x, y)$ est absolument continue dans le domaine ouvert borné D, il résulte très facilement des définitions données que:

a) les dérivées partielles $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ existent finies presque partout dans D;

b) ces dérivées sont intégrables dans D et l'on a

$$\left|\iint_D p\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |p|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{(x)}(y)\,dy,$$

$$\left|\iint_D q\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |q|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{(y)}(x)\,dx;$$

[13] Nous considérerons toujours, dans ce qui va suivre, l'intégrale au sens de M. Lebesgue.

c) pour presque toutes les valeurs de y_0, on a

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, y_0)\, dx = z(x_2, y_0) - z(x_1, y_0),$$

(x_1, y_0) et (x_2, y_0) étant les extrémités d'un segment fermé quelconque appartenant à l'intersection de D avec la droite $y=y_0$; de même, (x_0, y_1) et (x_0, y_2) étant les extrémités d'un segment fermé quelconque appartenant à l'intersection de D avec la droite $x=x_0$, on a, pour presque toutes les valeurs de x_0,

$$\int_{y_1}^{y_2} q(x_0, y)\, dy = z(x_0, y_2) - z(x_0, y_1).$$

3. — **L'intégrale double $I_D[z]$.**

Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction finie et continue, avec ses dérivées partielles $f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}$, pour tout point (x, y) du domaine ouvert borné D et pour toutes les valeurs finies de z, p, q[14]. Considérons la classe $\mathfrak{C}$ des fonctions $z(x, y)$ définies et absolument continues dans D, et telles que l'intégrale double

$$I_D[z] \equiv \iint_D f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))\, dx\, dy$$

soit finie. Nous avons posé ici $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ pour tout point de D où $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ existent finies, et $p=0$, $q=0$ dans les autres points de D.

Nous dirons que l'intégrale $I_D[z]$ est *quasi-régulière positive* si l'on a

$$f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 \geq 0, \quad f_{pp} \geq 0, \quad f_{qq} \geq 0, \tag{1}$$

pour tout point (x, y) de D et pour toutes les valeurs de z, p, q.

D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p, q) = {} & f(x, y, z, p_0, q_0) + (p-p_0) f_p(x, y, z, p_0, q_0) + (q-q_0) f_q(x, y, z, p_0, q_0) \\ & + \frac{1}{2}\Big\{(p-p_0)^2 f_{pp}(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) + 2(p-p_0)(q-q_0) f_{pq}(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \\ & \qquad + (q-q_0)^2 f_{qq}(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})\Big\}, \end{aligned} \tag{2}$$

[14] Il est entendu que l'on considère la continuité par rapport à (x, y, z, p, q).

$\bar{p}, \bar{q}$ étant des valeurs convenablement choisies. En introduisant la fonction de Weierstrass

$$\mathfrak{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) \equiv f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p_0, q_0) - (p - p_0) f_p(x, y, z, p_0, q_0) \\ - (q - q_0) f_q(x, y, z, p_0, q_0),$$

nous avons donc, si l'intégrale double $I_D[z]$ est quasi-régulière positive,

$$\mathfrak{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) \geq 0. \tag{3}$$

Dans cette inégalité, (x, y) est un point quelconque de D, et z, p_0, q_0, p, q sont des valeurs finies arbitraires.

Il est utile de remarquer que, au moyen de la fonction de Weierstrass, nous pouvons substituer, au développement (2), la formule

$$f(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p_0, q_0) + (p - p_0) f_p(x, y, z, p_0, q_0) + (q - q_0) f_q(x, y, z, p_0, q_0) \\ + \mathfrak{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q). \tag{4}$$

4. — **La semi-continuité.**

On dit que l'intégrale double $I_D[z]$, que nous avons définie au n. 3, est *semi-continue inférieurement* si, étant donnée une fonction quelconque $z_0(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$ (n. 3), on peut faire correspondre à tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\varrho > 0$ tel que l'on ait

$$I_D[z] > I_D[z_0] - \varepsilon,$$

pour toutes les fonctions $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$ satisfaisant, toujours dans D, à l'inégalité

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho.$$

Nous allons étudier par deux méthodes différentes la semi-continuité des intégrales quasi-régulières.

§ 2. Première méthode[15].

5. — **Hypothèses supplémentaires.**

Dans tout ce § 2, nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$, considérée au début du n. 3, vérifie aussi les hypothèses suivantes:

[15] Nous avons exposé cette méthode pour la première fois, et pour les intégrales curvilignes, en 1915 (voir l. c. [1]).

I) on a toujours $f(x, y, z, p, q) \geq N$, N étant un nombre fixe;

II) à tout nombre positif Z on peut faire correspondre trois nombres $\alpha > 1$, $\mu > 0$, $\Delta > 0$, tels que, pour chaque point (x, y) de D, les inégalités

$$|z| \leq Z, \qquad |p| + |q| \geq \Delta,$$

entraînent

$$f(x, y, z, p, q) \geq \mu \{|p|^\alpha + |q|^\alpha\}.$$

Nous supposerons, en outre, que l'intégrale $I_D[z]$ soit quasi-régulière positive[16].

6. — **Remarque.**

Soit $z(x, y)$ une fonction quelconque de la classe $\mathfrak{C}$ (n. 3), et appelons C_n l'ensemble complémentaire, par rapport à D, de l'ensemble D_n *intérieur à* D (n. 1). Avec les notations

$$I_{D_n}[z] \equiv \iint_{D_n} f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

$$I_{C_n}[z] \equiv \iint_{C_n} f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

nous pouvons écrire

$$I_D[z] = I_{D_n}[z] + I_{C_n}[z],$$

où, en vertu de l'hypothèse I), la troisième intégrale satisfait à l'inégalité

$$I_{C_n}[z] \geq N m(C_n),$$

$m(C_n)$ étant la mesure de C_n. Pour $n \to \infty$, on a $m(C_n) \to 0$, donc, à tout nombre $\sigma > 0$ on peut faire correspondre un entier positif n_0 tel que l'on ait $Nm(C_n) > -\sigma$ pour tout $n > n_0$. On aura ainsi

$$I_{C_n}[z] > -\sigma,$$

pour tout $n > n_0$ et pour toute fonction $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$.

Soit maintenant $z_0(x, y)$ une fonction donnée de $\mathfrak{C}$. De $m(C_n) \to 0$ nous tirons

$$I_{C_n}[z_0] \to 0;$$

[16] Un exemple dans lequel toutes les hypothèses ci-dessus indiquées sont vérifiées est fourni par l'intégrale classique $\iint_D (p^2 + q^2)\, dx\, dy$.

nous pouvons donc déterminer un nombre entier n_1 (que nous supposerons plus grand que n_0) tel que l'on ait, pour $n > n_1$,

$$|I_{C_n}[z_0]| < \sigma.$$

En définitive, étant donnée une fonction $z_0(x, y)$ de $\mathfrak{C}$, nous pouvons affirmer qu'à tout nombre $\sigma > 0$, on peut faire correspondre un entier positif n_1 tel que l'on ait

$$I_{C_n}[z] - I_{C_n}[z_0] > -2\sigma,$$

pour tout $n > n_1$ et pour toute fonction $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$. Il s'en suit que, pour démontrer la semi-continuité inférieure de l'intégrale I_D, il suffit de démontrer la semi-continuité inférieure de I_{D_n}.

Si, à présent, nous remarquons que D_n est la somme d'un nombre fini de carrés à côtés parallèles aux axes x, y, nous pouvons conclure que la démonstration de la semi-continuité inférieure de l'intégrale I_D sera achevée lorsque nous aurons démontré la même semi-continuité pour l'intégrale $I_\varDelta$ étendue à un carré quelconque $\varDelta$, à côtés parallèles aux axes x, y, complètement intérieur au domaine D.

7. — **Lemme.**

Nous nous appuyerons sur le lemme suivant:

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction bornée et intégrable dans le carré $\varDelta$ intérieur à D. Si H et α sont deux nombres donnés tels que $H > 0$, $\alpha > 1$, à tout $\varepsilon > 0$ il est possible de faire correspondre un $\varrho > 0$ tel que l'on ait

$$\left| \iint_\varDelta \varphi(x, y) \frac{\partial z}{\partial x}\, dx\, dy \right| < \varepsilon, \tag{5}$$

pour toutes les fonctions $z(x, y)$ absolument continues dans D, satisfaisant dans $\varDelta$ aux inégalités

$$|z(x, y)| \leq \varrho, \qquad \iint_\varDelta \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|^\alpha dx\, dy \leq H.$$

Nous allons démontrer cette proposition.

Soit M le maximum de $|\varphi(x, y)|$ dans le carré $\varDelta$. Nous pouvons construire une suite de polynomes

$$\Pi_1(x, y), \quad \Pi_2(x, y), \ldots, \quad \Pi_n(x, y), \ldots.$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

— on a $|\Pi_n(x, y)| \leq M$, dans tout le carré Δ;

— pour $n \to \infty$, on a $\Pi_n(x, y) \to \varphi(x, y)$, presque partout dans Δ[17].

A l'aide du polynome $\Pi_n(x, y)$, nous pouvons écrire

$$\left|\iint_\Delta \varphi \frac{\partial z}{\partial x} dx\, dy\right| \leq \iint_\Delta |\varphi - \Pi_n| \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| dx\, dy + \left|\iint_\Delta \Pi_n \frac{\partial z}{\partial x} dx\, dy\right|,$$

où l'on a, en vertu de l'inégalité de Schwarz-Hölder,

$$\iint_\Delta |\varphi - \Pi_n| \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| dx\, dy \leq \left[\iint_\Delta |\varphi - \Pi_n|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} dx\, dy\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\iint_\Delta \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|^\alpha dx\, dy\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Choisissons n assez grand pour que le premier facteur du second membre de cette inégalité soit plus petit que $\varepsilon : 2 H^{\frac{1}{\alpha}}$. Alors nous avons

$$\left|\iint_\Delta \varphi \frac{\partial z}{\partial x} dx\, dy\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\iint_\Delta \Pi_n \frac{\partial z}{\partial x} dx\, dy\right|.$$

Mais, avec une intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned}\left|\iint_\Delta \Pi_n \frac{\partial z}{\partial x} dx\, dy\right| &\leq \left|\int_c^d \Pi_n(b, y)\{z(b, y) - z(a, y)\} dy\right| \\ &\qquad + \left|\iint_\Delta \frac{\partial \Pi_n}{\partial x}\{z(x, y) - z(a, y)\} dx\, dy\right| \\ &\leq 2 M \varrho (d-c) + 2\, \Phi \varrho \Delta^{18},\end{aligned}$$

Φ étant le maximum de $\left|\frac{\partial \Pi_n}{\partial x}\right|$ dans Δ. En supposant

$$\varrho < \varepsilon : 4\{M(d-c) + \Phi\Delta\},$$

nous concluons donc à l'inégalité (5).

---

[17] Voir L. Tonelli. — *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXIX (1910), pp. 1—36).

[18] (a, c) et (b, d) sont les sommets de Δ de coordonnées minima et maxima.

8. — **Démonstration de la semi-continuité.**

Comme nous l'avons déjà remarqué au n. 6, tout revient à démontrer que, si $z_0(x, y)$ est une fonction donnée de la classe $\mathfrak{C}$ (n. 3), et si Δ est un carré, à côtés parallèles aux axes x et y, intérieur au domaine D, à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\varrho > 0$ tel que l'on ait

$$I_\Delta[z] > I_\Delta[z_0] - \varepsilon, \tag{6}$$

pour toutes les fonctions $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$, satisfaisant toujours dans D à l'inégalité

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho. \tag{7}$$

Remarquons d'abord que toute fonction $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}$, telle que l'on ait

$$I_\Delta[z] \geq I_\Delta[z_0],$$

vérifie certainement l'inégalité (6). Il suffit donc de se borner aux fonctions $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}$ telles que

$$I_\Delta[z] < I_\Delta[z_0]. \tag{8}$$

Soit R un nombre positif et appelons E l'ensemble des points de Δ où les dérivées partielles $p_0 \equiv \dfrac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 \equiv \dfrac{\partial z_0}{\partial y}$ existent toutes deux et vérifient les inégalités $|p_0| \leq R$, $|q_0| \leq R$. Pour $R \to +\infty$, on a

$$m(E) \to \Delta,$$

$$\iint_E f(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy \to I_\Delta[z_0].$$

En vertu de l'hypothèse I) du n. 5, étant donné un nombre $\sigma > 0$, nous pouvons donc choisir R assez grand pour que l'on ait

$$I_\Delta[z] - I_\Delta[z_0] > \iint_E \{f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)\}\, dx\, dy - \sigma, \tag{9}$$

pour toutes les fonctions $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}$ satisfaisant à l'inégalité (8).

Au moyen de la formule (4) et en remarquant que, l'intégrale $I_\Delta[z]$ étant quasi-régulière positive, on a l'inégalité (3), nous tirons de (9)

$$I_\varDelta[z]-I_\varDelta[z_0]>\iint\limits_E\{f(x,y,z,p_0,q_0)-f(x,y,z_0,p_0\,q_0)\}\,dx\,dy$$
$$+\iint\limits_E\{(p-p_0)f_p(x,y,z,p_0,q_0)+(q-q_0)f_q(x,y,z,p_0,q_0)\}\,dx\,dy-\sigma.$$

En vertu de la continuité de f, f_p, f_q, si le nombre ϱ est suffisamment petit et si $z(x,y)$ vérifie l'inégalité (7) dans $\varDelta$, nous avons aussi

$$(10)\quad I_\varDelta[z]-I_\varDelta[z_0]\geq-2\sigma-\sigma\iint\limits_E\{|p-p_0|+|q-q_0|\}\,dx\,dy$$
$$+\iint\limits_E\{(p-p_0)f_p(x,y,z_0,p_0,q_0)+(q-q_0)f_q(x,y,z_0,p_0\,q_0)\}\,dx\,dy.$$

Considérons maintenant un nombre $Z>0$ tel que l'on ait

$$|z_0(x,y)|+1<Z,$$

pour tout point de $\varDelta$, et supposons $\varrho<1$. Alors, des hypothèses I), II) du n. 5, il suit, d'après une inégalité bien connue,

$$\left[\iint\limits_\varDelta|p-p_0|^\alpha\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left[\iint\limits_\varDelta|p|^\alpha\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\alpha}}+\left[\iint\limits_\varDelta|p_0|^\alpha\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\leq\left[\frac{1}{\mu}I_\varDelta[z]+\frac{1}{\mu}|N|\varDelta+A^\alpha\varDelta\right]^{\frac{1}{\alpha}}+\left[\frac{1}{\mu}I_\varDelta[z_0]+\frac{1}{\mu}|N|\varDelta+A^\alpha\varDelta\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire, en vertu de (8),

$$(11)\qquad\iint\limits_\varDelta|p-p_0|^\alpha\,dx\,dy\leq H,$$

où l'on a posé

$$H=2^\alpha\left[\frac{1}{\mu}I_\varDelta[z_0]+\frac{1}{\mu}|N|\varDelta+A^\alpha\varDelta\right].$$

De même, nous avons

$$(11')\qquad\iint\limits_\varDelta|q-q_0|^\alpha\,dx\,dy\leq H;$$

et nous pouvons écrire aussi

$$(12) \qquad \iint_{\Delta} \{|p-p_0|+|q-q_0|\}\, dx\, dy < 2\,(H+\Delta).$$

Des inégalités (11), (11') nous tirons, à l'aide du lemme du n. 7, et pourvu que ϱ soit suffisamment petit, que la dernière intégrale de (10) est, en valeur absolue, plus petite que σ, pour toute fonction $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}$, vérifiant les inégalités (7) et (8). Nous avons donc, à cause de (10) et (12),

$$I_\Delta[z]-I_\Delta[z_0] > -3\,\sigma-2\,\sigma(H+\Delta),$$

ce qui prouve l'inégalité (6).

On peut conclure par le théorème suivant:

Si $f(x, y, z, p, q)$ est une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées partielles $f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}$, pour tout point (x, y) du domaine ouvert borné D et pour toutes les valeurs finies de z, p, q;

si l'on suppose vérifiées les hypothèses I), II) du n. 5;

si, enfin, l'intégrale $I_D[z]$ est quasi-régulière positive, cette intégrale est semi-continue inférieurement pour toute fonction $z(x, y)$ absolument continue dans D et telle que $I_D[z]$ soit finie.

Nous pouvons remarquer que, dans cet énoncé, il n'est nullement nécessaire de supposer l'existence des dérivées partielles f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}, si, au lieu de définir le intégrales quasi-régulières positives moyennant les inégalités (1), nous les définissons par l'inégalité (3).

§ 3. Seconde méthode[19].

9. — Nouvelles hypothèses.

Nous supposerons dans ce qui va suivre, jusqu'au n. 13 (compris), que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ considérée au début du n. 3, vérifie aussi la condition I) du n. 5 ($f \geq N$) et que les dérivées partielles f_{px}, f_{qy} existent finies et continues

[19] Nous avons fait connaître cette méthode pour la première fois, et pour les intégrales curvilignes, en 1920 (voir l. c. [4]). M. Roussel (*Recherches sur le calcul des variations*, Journal de Mathématiques, S. 9. T. V (1926), pp. 395—462), dans la démonstration de ce qu'il appelle le *théorème de Tonelli*, a utilisé cette même méthode.

pour tout point (x, y) de D et pour toutes les valeurs finies de z, p, q. En outre, nous supposerons toujours que l'intégrale $I_D[z]$ soit quasi-régulière positive[20].

Remarquons tout de suite que, puisque ce qui a été dit au n. 6 n'est qu'une simple conséquence de l'hypothèse I), nous pouvons, même dans le cas actuel, nous borner à la démonstration de la semi-continuité de l'intégrale $I_\Delta[z]$, Δ étant toujours un carré quelconque, à côtés parallèles aux axes x, y, intérieur au domaine D.

10. — **Lemme.**

Nous utiliserons le lemme suivant:

Si $P(x, y, z)$ *et* $Q(x, y, z)$ *sont deux fonctions continues, ainsi que la dérivée partielle* $\frac{\partial Q}{\partial x}$, *pour tout point* (x, y) *de* Δ *et toute valeur finie de* z, *l'intégrale*

$$\mathfrak{J}_\Delta[z] \equiv \iint_\Delta \left\{P(x, y, z) + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}\right\} dx\, dy$$

est continue dans la classe $\mathfrak{C}'$ *des fonctions* $z(x, y)$ *continues dans tout* Δ *et absolument continues dans le domaine ouvert correspondant.*

Envisageons une fonction $z_0(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}'$. Il faut démontrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\varrho > 0$ tel que l'on ait

$$|\mathfrak{J}_\Delta[z] - \mathfrak{J}_\Delta[z_0]| < \varepsilon, \tag{13}$$

pour toute fonction $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}'$ satisfaisant dans Δ à l'inégalité

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho. \tag{14}$$

En vertu de la continuité de $P(x, y, z)$ et en supposant ϱ suffisamment petit, nous pouvons écrire, pour toute fonction que nous venons d'indiquer,

$$|\mathfrak{J}_\Delta[z] - \mathfrak{J}_\Delta[z_0]| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_c^d \left| \int_a^b Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} dx - \int_a^b Q(x, y, z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x} dx \right| dy,$$

d'où, en utilisant la formule de Green[21],

---

[20] Par exemple, pour l'intégrale $\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$ toutes les conditions ci-dessus indiquées sont vérifiées.

[21] Comparez nos »*Fondamenti*«, Vol. I, pp. 387—388.

$$|\mathfrak{J}_\Delta[z]-\mathfrak{J}_\Delta[z_0]|<\frac{\varepsilon}{2}+(d-c)\{M\varrho(b-a)+2M\varrho\},$$

M étant un nombre plus grand que les maxima de $|Q(x,y,z)|$ et de $\left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right|$, pour tout point (x,y) de Δ et tout z compris entre le minimum de $z_0(x,y)-\varrho$ et le maximum de $z_0(x,y)+\varrho$. Donc, si ϱ est suffisamment petit, on a l'inégalité (13).

11. — **Démonstration de la semi-continuité pour $z_0(x,y)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz.**

Nous supposerons, dans ce n. 11, que la fonction $z_0(x,y)$ de la classe $\mathfrak{C}$ (n. 3) vérifie la condition de Lipschitz

$$(15)\qquad |z_0(x',y')-z_0(x,y)|<K\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2},$$

dans tout le domaine ouvert borné D.

Nous pouvons alors construire[22] une suite de polynomes $\Pi_1(x,y)$, $\Pi_2(x,y),\ldots$, $\Pi_n(x,y),\ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) pour $n\to\infty$, on a $\Pi_n(x,y)\to z_0(x,y)$, uniformément dans tout le carré Δ;

2°)
$$p_n(x,y)\equiv\frac{\partial\Pi_n}{\partial x}\to p_0(x,y)\equiv\frac{\partial z_0}{\partial x},$$
$$q_n(x,y)\equiv\frac{\partial\Pi_n}{\partial y}\to q_0(x,y)\equiv\frac{\partial z_0}{\partial y},$$

presque partout dans Δ;

3°) il existe un nombre $K'>K$ tel que

$$(16)\qquad |p_n(x,y)|<K',\quad |q_n(x,y)|<K',$$

partout dans Δ et pour toutes les valeurs de n.

Si donc nous nous donnons un nombre $\sigma>0$, nous pouvons choisir n de façon que l'on ait

$$(17)\qquad |z_0(x,y)-\Pi_n(x,y)|<\sigma,$$

partout dans Δ et

$$(18)\qquad |p_0(x,y)-p_n(x,y)|<\sigma,\quad |q_0(x,y)-q_n(x,y)|<\sigma,$$

---

[22] Voir l. c. [17].

dans tous les points d'un ensemble E, appartenant à $\varDelta$, de mesure $m(E) > \varDelta - \sigma$.

Cela posé, nous allons étudier la différence $I_\varDelta[z] - I_\varDelta[z_0]$, où $z(x, y)$ est une fonction quelconque de la classe $\mathfrak{C}$. La formule (4) nous donne

$$(19)\quad f(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p_n(x, y), q_n(x, y)) \\ + [p - p_n(x, y)] f_p(x, y, z, p_n(x, y), q_n(x, y)) + [q - q_n(x, y)] f_q(x, y, z, p_n(x, y), q_n(x, y)) \\ + \mathfrak{E}(x, y, z; p_n(x, y), q_n(x, y); p, q),$$

pour tout point (x, y) de $\varDelta$ et pour toutes les valeurs de z, p, q; et, en vertu de (3), l'intégrale $I_D[z]$ étant par hypothèse quasi-régulière positive, nous avons toujours

$$\mathfrak{E}(x, y, z; p_n(x, y), q_n(x, y); p, q) \geq 0.$$

D'après (19) nous avons aussi, pour la fonction $z_0(x, y)$,

$$(20)\quad \iint_\varDelta \mathfrak{E}(x, y, z_0(x, y); p_n(x, y), q_n(x, y); p_0(x, y), q_0(x, y))\, dx\, dy \\ < 4\sigma M m(E) + 8 K' M \{\varDelta - m(E)\} \\ < 4\sigma M(\varDelta + 2K'),$$

M étant un nombre plus grand que les maxima de $|f_p(x, y, z_0(x, y), p, q)|$ et $|f_q(x, y, z_0(x, y), p, q)|$ pour (x, y) dans $\varDelta$ et $|p| \leq K', |q| \leq K'$.

En utilisant encore la formule (19), nous pouvons donc écrire

$$I_\varDelta[z] - I_\varDelta[z_0] > \iint_\varDelta \{f(x, y, z, p_n, q_n) + (p - p_n) f_p(x, y, z, p_n, q_n) \\ + (q - q_n) f_q(x, y, z, p_n, q_n)\}\, dx\, dy \\ - \iint_\varDelta \{f(x, y, z_0, p_n, q_n) + (p_0 - p_n) f_p(x, y, z_0, p_n, q_n) \\ + (q_0 - q_n) f_q(x, y, z_0, p_n, q_n)\}\, dx\, dy \\ - 4\sigma M(\varDelta + 2K'),$$

et le lemme du n. 10 nous donne alors

$$I_\varDelta[z] - I_\varDelta[z_0] > -\sigma - 4\sigma M(\varDelta + 2K'),$$

pour toute fonction $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$ vérifiant partout dans $\varDelta$ l'inégalité

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho,$$

pourvu que ϱ soit suffisamment petit. La semi-continuité de $I_D[z]$ est ainsi établie pour la fonction $z_0(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$, satisfaisant à l'inégalité (15).

12. — Démonstration de la semi-continuité si f_p, f_q sont bornés, pour z borné.

Avant d'aborder le cas général, il nous sera utile d'étudier les intégrales $I_D[z]$ qui satisfont à une condition supplémentaire particulièrement importante. Nous supposerons donc, dans ce n. 12, que — les conditions du n. 9 étant toujours remplies — à tout nombre positif Z on peut faire correspondre un nombre positif M tel que l'on ait

$$|f_p(x, y, z, p, q)| < M, \quad |f_q(x, y, z, p, q)| < M,$$

pour tout point (x, y) de D, pour $|z| \leq Z$, et pour toutes les valeurs finies de p, q[23].

$z_0(x, y)$ étant une fonction donnée *quelconque* de la classe $\mathfrak{C}$, nous pourrons encore[24] construire un polynome $\Pi_n(x, y)$ satisfaisant aux inégalités (17), (18). Au lieu des inégalités (16), qui ne seront plus satisfaites dans les conditions actuelles, nous pourrons supposer[25] vérifiées les inégalités

$$\iint\limits_{C(E)} |p_0|\, dx\, dy < \sigma, \quad \iint\limits_{C(E)} |q_0|\, dx\, dy < \sigma,$$

$$\iint\limits_{C(E)} |p_n|\, dx\, dy < \sigma, \quad \iint\limits_{C(E)} |q_n|\, dx\, dy < \sigma,$$

$C(E)$ étant l'ensemble complémentaire de E par rapport à $\varDelta$.

Cela posé, et en supposant, dans $\varDelta$, $|z_0(x, y)| < Z$, on peut suivre jusqu'à la fin le raisonnement déjà fait au n. 11, avec le simple remplacement de (20) par l'inégalité

---

[23] On est dans ce cas si l'on a, par exemple,

$$I_D[z] \equiv \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

[24] L. Tonelli. — *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione.* (Rend. R. Accad. Lincei, Vol. III, S. 6 (1926) pp. 714—719).

[25] l. c. [24].

$$\iint_{\Delta} \mathfrak{E}(x, y, z_0(x, y); p_n(x, y), q_n(x, y); p_0(x, y), q_0(x, y))\, dx\, dy$$

$$< 4\sigma M m(E) + 8\sigma M < 4\sigma M(\Delta + 2).$$

On démontre ainsi, dans les conditions actuelles, la semi-continuité inférieure de $I_D[z]$ pour toute fonction $z_0(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$.

13. — **Démonstration de la semi-continuité dans le cas général.**

Le cas considéré dans le n. précédent nous permet d'épuiser facilement le cas général.

Posons

$$\bar{f}(x, y, z, p, q) \equiv f(x, y, z, p, q) - \{f(x, y, z, 0, 0) + p f_p(x, y, z, 0, 0) + q f_q(x, y, z, 0, 0)\},$$

$$\bar{I}_\Delta[z] \equiv \iint_{\Delta} \bar{f}(x, y, z, p, q)\, dx\, dy.$$

Alors, par le lemme du n. 10, la différence $I_\Delta[z] - \bar{I}_\Delta[z]$ est continue pour toute fonction $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$, et la démonstration de la semi-continuité de $I_\Delta[z]$ est ramenée à celle de la semi-continuité de $\bar{I}_\Delta[z]$.

Remarquons que la fonction $\bar{f}$ vérifie toutes les conditions que nous avons énoncées pour la fonction f; en outre, on a toujours, en vertu de l'inégalité (3) et de la formule (4),

$$\bar{f}(x, y, z, 0, 0) = 0, \quad \bar{f}(x, y, z, p, q) \geq 0.$$

Soit maintenant $z_0(x, y)$ une fonction de la classe $\mathfrak{C}$ et, étant donné un nombre $\sigma > 0$, choisissons R suffisamment grand pour que l'on ait

$$\left| \iint_{\Delta} \bar{f}(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy - \iint_{E} \bar{f}(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy \right| < \sigma, \tag{21}$$

E étant l'ensemble des points de Δ où les dérivées partielles $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$ existent finies et vérifient les inégalités

$$|p_0(x, y)| \leq R, \quad |q_0(x, y)| \leq R.$$

Si Z est un nombre positif plus grand que le maximum de $|z_0(x, y)| + 1$

dans $\varDelta$, il est toujours possible de construire une fonction $g(x, y, z, p, q)$ vérifiant les mêmes conditions que $\bar{f}(x, y, z, p, q)$ et telle que l'on ait, pour tout point (x, y) de $\varDelta$ et pour $|z| \leq Z$:

a) $g = \bar{f}$, pour $p^2 + q^2 \leq 2R^2$;

b) $0 \leq g \leq \bar{f}$, pour $p^2 + q^2 > 2R^2$;

c) $|g_p(x, y, z, p, q)| < M$, $|g_q(x, y, z, p, q)| < M$, pour toutes les valeurs finies de p et q, M étant un nombre convenablement choisi.

D'après ce que nous avons démontré au n. 12, l'intégrale

$$I'_{\varDelta}[z] = \iint_{\varDelta} g\, dx\, dy$$

est semi-continue inférieurement. Il nous est donc possible de choisir ϱ positif, plus petit que 1, de telle façon que l'on ait

$$I'_{\varDelta}[z] > I'_{\varDelta}[z_0] - \sigma,$$

pour toute fonction $z(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}$, satisfaisant à l'inégalité

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho \tag{22}$$

dans tout $\varDelta$.

Or, l'on a

$$I'_{\varDelta}[z] \leq \bar{I}_{\varDelta}[z],$$

$$I'_{\varDelta}[z_0] \geq \iint_{E} \bar{f}(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dx\, dy,$$

d'où, d'après (21),

$$I'_{\varDelta}[z] \geq \bar{I}_{\varDelta}[z_0] - \sigma.$$

On a donc

$$\bar{I}_{\varDelta}[z] \geq \bar{I}_{\varDelta}[z_0] - 2\sigma,$$

pour toute fonction $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}$ satisfaisant à (22). La semi-continuité inférieure de $\bar{I}_{\varDelta}[z]$ est ainsi établie, et la démonstration de la semi-continuité de $I_{\varDelta}[z]$ est achevée.

Tout ce que nous avons établi dans les derniers n^{os} va être résumé par le théorème suivant:

Si $f(x, y, z, p, q)$ est une fonction finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles $f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}, f_{px}, f_{qy}$, pour tout point (x, y) du domaine ouvert borné D, et pour toutes les valeurs finies de z, p, q;

si l'on a toujours $f \geq N$, N étant un nombre fixe;

si, enfin, l'intégrale $I_D[z]$ est quasi-régulière positive, cette intégrale est semi-continue inférieurement pour toute fonction $z(x, y)$ absolument continue dans D et telle que $I_D[z]$ soit finie.

On peut répéter ici la remarque faite à la fin du n. 8.

14. — Élimination de l'hypothèse $f \geq N$.

Nous allons nous débarrasser de l'hypothèse $f \geq N$. Dans ce but, nous restreindrons quelque peu la généralité du domaine D en supposant que sa *frontière*[26] soit une courbe continue (de Jordan), fermée, sans points multiples, rectifiable. Nous supposerons, en outre, que la fonction f et les dérivées partielles que nous avons indiquées dans l'énoncé du n. 13, soient finies et continues aussi sur la frontière de D.

Cela posé, nous allons reprendre le lemme du n. 10 pour le démontrer sous la forme suivante:

Si $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$ sont deux fonctions continues, ainsi que la dérivée partielle $\frac{\partial Q}{\partial x}$, pour tout point (x, y) de D et de sa frontière, et pour toute valeur finie de z, l'intégrale

$$\mathfrak{J}_D[z] \equiv \iint_D \left\{ P(x, y, z) + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx\, dy$$

est continue dans la classe $\mathfrak{C}_1$ des fonctions $z(x, y)$ bornées et absolument continues dans D.

Considérons une fonction $z_0(x, y)$ de la classe $\mathfrak{C}_1$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, si ϱ est positif et suffisamment petit, toute fonction $z(x, y)$ de $\mathfrak{C}_1$, telle que

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho \tag{23}$$

dans tout D, vérifie aussi l'inégalité

---

[26] La *frontière* du domaine ouvert borné D est le lieu des points limites des points de D ne faisant pas partie de D.

$$(24) \qquad |\mathfrak{J}_D[z]-\mathfrak{J}_D[z_0]| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \iint\limits_D Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}dx\,dy - \iint\limits_D Q(x,y,z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x}dx\,dy \right|.$$

Or, d'après nos hypothèses sur la frontière de D, cette frontière est rencontrée par la droite $y=\bar{y}$, pour presque toutes les valeurs de $\bar{y}$, en un nombre fini de points; et si nous désignons ce nombre par la notation $N(\bar{y})$, la fonction $N(y)$ est intégrable[27]. À l'aide de la formule de Green, nous avons donc

$$(25) \qquad \left| \iint\limits_D Q\frac{\partial z}{\partial x}dx\,dy - \iint\limits_D Q\frac{\partial z_0}{\partial x}dx\,dy \right| < MD\varrho + M\varrho\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(y)\,dy,$$

M étant un nombre plus grand que les maxima de $|Q|$ et de $\left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right|$, pour tout point (x,y) de D et tout z compris entre le minimum de $z_0(x,y)-\varrho$ et le maximum de $z_0(x,y)+\varrho$.

De (24) et (25) nous tirons, si ϱ est suffisamment petit,

$$|\mathfrak{J}_D[z]-\mathfrak{J}_D[z_0]| < \varepsilon,$$

pour toute fonction $z(x,y)$ de $\mathfrak{C}_1$ satisfaisant à (23).

Notre lemme est ainsi établi.

Si nous posons maintenant

$$\begin{aligned}\bar{f}(x,y,z,p,q) \equiv & f(x,y,z,p,q) \\ & -\{f(x,y,z;0,0)+pf_p(x,y,z,0,0)+qf_q(x,y,z,0,0)\},\end{aligned}$$

le lemme que nous venons de démontrer nous assure que l'integrale

$$\iint\limits_D \{f-\bar{f}\}\,dx\,dy$$

est continue dans la classe $\mathfrak{C}_1$. La semi-continuité de $I_D[z]$ dans la classe $\mathfrak{C}_1$ est ainsi ramenée à la semi-continuité de l'intégrale $\bar{I}_D[z]$ correspondant à la fonction $\bar{f}$. Mais si $I_D[z]$ est quasi-régulière positive, on a toujours, en vertu de l'inégalité (3), $\bar{f} \geq 0$, et la semi-continuité de $\bar{I}_D[z]$ résulte du théorème du n. 13. On a donc la semi-continuité de $I_D[z]$ dans la classe $\mathfrak{C}_1$.

[27] S. Banach. — *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* (Fund. Math., T. VII (1925), pp. 225—236).

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Si la frontière du domaine ouvert borné D est une courbe continue, fermée sans points multiples, rectifiable;

si $f(x, y, z, p, q)$ est une fonction finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles $f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}, f_{px}, f_{qy}$, pour tout point (x, y) de D et de la frontière de D, et pour toutes les valeurs finies de z, p, q;

si, enfin, l'intégrale $I_D[z]$ est quasi-régulière positive, cette intégrale est semicontinue inférieurement pour toute fonction $z(x, y)$ bornée et absolument continue dans D, et telle que $I_D[z]$ soit finie.

La remarque que nous avons faite à la fin du n. 8 est encore valable pour ce dernier théorème.