ÜBER DEN EXISTENZBEWEIS ALGEBRAISCHER FUNKTIONEN ZU EINER GEGEBENEN RIEMANNSCHEN FLÄCHE.

VON

LUDWIG SCHLESINGER

in GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

1. Transzendente Methoden.
2. Die algebraische Methode für eine spezielle Fläche.
3. Die Grundzüge der algebraischen Methode im allgemeinen Fall.
4. Vorhandensein einer Lösung, die eine irreduzible Gleichung liefert.
5. Die zu gegebener Fläche gehörige Funktion. — Das arithmetisch Erreichbare.
6. Die Differentialgleichungen für die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale.
7. Die Arbeiten von F. Enriques und F. Severi.

---

1. Transzendente Methoden.

Nachdem Riemann in der ersten Abhandlung seiner Theorie der Abelschen Funktionen (Werke, 1892, S. 90) gelehrt hat, wie man »die Verzweigungsart einer mehrwertigen[1] Funktion geometrisch darzustellen» habe, sagt er in Bezug auf die algebraischen Funktionen (ebenda S. 103), er wolle sie, statt von ihren Ausdrücken auszugehen, mit Anwendung des Dirichletschen Prinzips durch ihre

[1] Es ist bemerkenswert, das die Ausdrucksweise *mehrwertig* und *einwertig*, die Riemann a. a. O. (S. 89) einführt, auf Gauss zurückgeht, der sich ihrer im art. 7 einer nachgelassenen Abhandlung, Werke X, 1, S. 414, bedient; Gauss sagt nur a. a. O. *viel*wertig statt *mehr*wertig.

1—30534. *Acta mathematica.* 56. Imprimé le 6 septembre 1930.

Unstetigkeiten definieren. — Die methodisch vielleicht etwas befremdliche Definition der algebraischen Funktionen durch transzendente Methoden rechtfertigt sich sachlich dadurch, dass Riemann als das Prius die Abelschen Integrale definiert und aus diesen dann erst die algebraischen Funktionen aufbaut, historich erklärt sich dieses Vorgehn, wie Brill und Noether (Jahresbericht der D. M. V., 1894, S. 256) bemerkt haben, dadurch, das Riemann ursprünglich von einem Problem der konformen Abbildung ausgehend (siehe die nachgelassene Note[1] XXVI, Werke, S. 440), also von transzendenter Seite her zu den endlich vielblättrigen Flächen und den zugehörigen Abelschen Integralen gelangt war; es wird dies durch Riemanns eigene Bemerkung (am Schluss der Einleitung zu der 4. Abhandlung der Theorie der Abelschen Funktionen, Werke, S. 102) bestätigt, wo es heisst: »was die Auffindung der einzelnen Resultate betrifft, so wurde ich auf das im § 1—5, 9 und 12 mitgeteilte ... im Herbst 1851 und zu Anfang 1852 durch Untersuchungen über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen geführt«. In der Tat bezieht sich die erwähnte nachgelassene Note XXVI auf das Problem, einen von n auseinanderliegenden Kreisen begrenzten ebenen Bereich auf eine n-fach überdeckte Halbebene homöometrisch (d. h. gegenseitig eindeutig und konform) abzubilden. — Auch nachdem das Dirichletsche Prinzip aufgegeben worden war, haben C. Neumann und H. A. Schwarz den Beweis der Existenztheoreme durch transzendente Methoden erbracht, und ebenso sind alle später für die Lösung des Randwertproblems der Potentialtheorie ausgebildeten Methoden, die für den Nachweis der Existenztheoreme nutzbar gemacht werden können, wesentlich transzendenter Natur.[2]

2. Die algebraische Methode für eine spezielle Fläche.

In meiner Arbeit »Zur Theorie der Fuchsschen Funktionen« (Crelles Journal 105, 1889, S. 181[3]) hatte ich eine algebraische Funktion zu betrachten, deren Riemannsche Fläche R aus $\sigma+1$ Blättern $0, 1, 2, \ldots, \sigma$ besteht und σ Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ aufweist, von der Art, dass bei einem positi-

[1] Gleichgewicht der Elektrizität auf Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Achsen.

[2] Auch das Verfahren, das P. Koebe, Acta mathematica 40, 1914, S. 287—290 zur Bestimmung einer algebraischen Funktion zu gegebener Riemannscher Fläche angibt, ist im allgemeinen transzendenter Natur.

[3] Vergl. auch mein Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 2, 1898, Nr. 336, S. 281; Nr. 343, S. 308.

ven Umlauf um a_k sich die Blätter o, k, $k-1$ (für $k=1$ die Blätter o, 1, σ) ineinander permutieren, sodass also jeder dieser Verzweigungspunkte doppelt zu zählen ist. Nach der Riemannschen Formel $w-2n=2p-2$ ist also unsere Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p=0$, und die algebraische Funktion y, die nur an einer Stelle von R unendlich erster Ordnung wird, genügt einer algebraischen Gleichung $(\sigma+1)$-ten Grades mit in x linearen Koeffizienten

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\sigma+1} (b_k x + c_k)\, y^k = 0$$

und hängt noch von drei willkürlichen Konstanten ab. Die Diskriminante dieser Gleichung ist einerseits von der Form

$$D(x) = \text{Const.}\, (x-a_1)^2 \ldots (x-a_\sigma)^2$$

und ist andererseits eine ganze homogene Funktion vom Grade 2σ der Koeffizienten von (1). Vergleicht man in diesen beiden Darstellungen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man $2\sigma+1$ Gleichungen für die $2\sigma+4$ Unbekannten $b_k, c_k (k=0, 1, \ldots, \sigma+1)$. Man hat also durch ein algebraisches Eliminationsproblem die Koeffizienten der Gleichung (1) und damit die algebraische Funktion y von x bestimmt, wobei darauf zu achten ist, dass die Lösung des gedachten Gleichungssystems noch von genau drei willkürlichen Konstanten abhängen muss. — Damit war — abgesehen von dem hyperelliptischen und ähnlichen Fällen — wohl zum ersten Male darauf hingewiesen worden, dass die Bestimmung einer durch die Riemannschen Existenztheoreme postulierten Funktion, die zu einer gegebenen Riemannschen Fläche gehört, ein *algebraisches* Problem ist, das mit algebraischen Hilfsmitteln, nämlich mit Hilfe der Eliminationstheorie gelöst werden kann. Im Jahre 1891 deutete Hurwitz (Mathematische Annalen 39, S. 1 ff.) an, dass das von mir angegebene System algebraischer Gleichungen nicht nur die zu der vorgeschriebenen Riemannschen Fläche R gehörige algebraische Funktion y liefert, sondern mit ihr überhaupt alle algebraischen Funktionen, die zu irgendwelchen zusammenhängenden $\sigma+1$-blättrigen Riemannschen Flächen gehören, die in $a_1, \ldots, a_\sigma$ doppeltzuzählende Verzweigungspunkte besitzen. Hurwitz bestimmt die Anzahl solcher Riemannscher Flächen, und zwar über den von mir betrachteten besonderen Fall hinausgehend, für beliebige Blätterzahl und beliebige Anzahl von einfachzuzählenden Verzweigungspunkten und zeigt auch mit Hilfe der Lüroth-Clebschschen kanonischen Gestalt einer Riemannschen Fläche, dass alle Riemannschen Flächen mit konstanter Blätterzahl und denselben einfachzuzählenden Verzweigungspunkten auseinander durch »Monodromie der Verzweigungspunkte«, d. h. dadurch hervorgehen, dass man die Verzweigungspunkte auf geschlossenen Bahnen in ihre Ausgangslagen zurücklaufen lässt.

In dem in Rede stehenden besonderen Falle ist es nicht schwer, die allgemeine Form einer Gleichung (1) herzustellen, deren Diskriminante ein Quadrat ist. Setzt man nämlich

$$\sum_{k=0}^{\sigma+1} b_k y^k = \psi(y), \quad \sum_{k=0}^{\sigma+1} c_k y^k = -\varphi(y),$$

sodass also (1) die Form erhält

$$x\psi(y) - \varphi(y) = 0, \tag{1 a}$$

und soll die Diskriminante, d. h. die Resultante von (1 a) und der Derivierten nach y, $x\psi'(y) - \varphi'(y) = 0$, also $\psi\varphi' - \varphi\psi'$ ein Quadrat sein, so muss auch $\frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)$ das Quadrat einer rationalen Funktion $R(y)$ von y, also $\int R(y)^2\, dy$ rational sein. Setzen wir

$$R(y) = c + \sum_{k=1}^{\sigma+1} \frac{\beta_k}{y - \alpha_k},$$

wo also $\psi(y) = b_{\sigma+1} \prod_{k=1}^{\sigma+1} (y - \alpha_k)$ gesetzt wurde, so muss zunächst, da ja $\psi\varphi' - \varphi\psi'$ vom Grade 2σ, also der Zähler von $R(y)$ höchstens vom Grade σ ist, $c = 0$ sein, und in

$$R(y)^2 = \sum_k \frac{\beta_k^2}{(y - \alpha_k)^2} + \sum_{k \neq h}\sum \frac{\beta_k \beta_h}{\alpha_k - \alpha_h}\left(\frac{1}{y - \alpha_k} - \frac{1}{y - \alpha_h}\right)$$

müssen alle Residuen verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\sum_{k \neq h} \frac{\beta_k}{\alpha_k - \alpha_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \sigma + 1) \tag{1 b}$$

bestehen. Dazu ist erforderlich, dass die schiefsymmetrische Determinante

$\left|\frac{1}{\alpha_k - \alpha_h}\right|$ verschwindet, was für ein gerades σ bei beliebigen α_k der Fall ist, während für ein ungerades σ sich eine Bedingungsgleichung zwischen den α_k ergibt. Diese lautet z. B. für $\sigma = 3$ (dem der Modulfunktion entsprechenden Fall)

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{1}{\alpha_3 - \alpha_4} - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3}\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_4} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_4}\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} = 0,$$

also, wenn wir

$$u_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3),\quad u_2 = (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4),\quad u_3 = (\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)$$

setzen (vergl. z. B. Weber, Kleine Algebra, 1912, S. 133, 134),

$$u_2 u_3 + u_1 u_3 + u_1 u_2 = 0,$$

das heisst aber nichts anderes, als dass für die biquadratische Funktion $\psi(y)$ die von Weierstrass mit g_2 bezeichnete Invariante verschwindet, die α_k also ein aequianharmonisches Punktquadrupel bilden müssen. Hat man die β_k den Gleichungen (1 b) gemäss bestimmt, so ist

$$R(y) = \sum_{k=1}^{\sigma+1} \frac{\beta_k}{y - \alpha_k},\quad R(y)^2 = \sum_{k=1}^{\sigma+1} \frac{\beta_k^2}{(y - \alpha_k)^2},\quad \frac{\varphi}{\psi} = \int R(y)^2\, dy = -\sum_{k=1}^{\sigma+1} \frac{\beta_k^2}{y - \alpha_k} + \text{Const.},$$

und die Gleichung (1) lautet demnach

$$\text{(1 c)}\qquad x + \sum_{k=1}^{\sigma+1} \frac{\beta_k^2}{y - \alpha_k} = \text{Const.}$$

Da $dx/dy = R(y)^2$, $d^2x/dy^2 = 2\,R(y)\,R'(y)$ ist, so übersieht man sofort, dass die Form (1 c) auch hinreichend dafür ist, damit die σ Werte $a_1, \ldots, a_\sigma$ von x, die den Nullstellen von $R(y)$ entsprechen, doppeltzuzählende Verzweigungspunkte der algebraischen Funktion y von x seien, wenigstens wenn die σ Nullstellen von $R(y)$ alle von einander verschieden sind. Für den Fall $\sigma = 3$ lautet die Gleichung (1 c)

$$\begin{aligned} x\psi(y) &+ (y - \alpha_4)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)\frac{\lambda^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2} + (y - \alpha_4)(y - \alpha_1)(y - \alpha_3)\cdot \\ &\cdot\left\{\frac{\lambda^2}{(\alpha_3 - \alpha_1)^2} + \frac{\mu^2}{(\alpha_3 - \alpha_4)^2}\right\} + (y - \alpha_4)(y - \alpha_1)(y - \alpha_2)\left\{\frac{\lambda^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \frac{\mu^2}{(\alpha_4 - \alpha_2)^2}\right\} + \\ &+ (y - \alpha_1)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)\frac{\mu^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2} = 0, \end{aligned}$$

sie enthält die drei erforderlichen willkürlichen Konstanten λ, μ und $b_{\sigma+1}$. — Dagegen bedarf es noch besonderer, nicht mehr rational ausdrückbarer Bedingungen, um zu bewirken, dass die Riemannsche Fläche der durch (1 c) definierten Funktion y die vorgeschriebene Verzweigungsart aufweist, d. h. dass den positiven Umläufen um die Verzweigungspunkte a_k die Zykeln $(0, k, k-1)$ entsprechen (vergl. weiter unten Nr. 5).

3. Die Grundzüge der algebraischen Methode im allgemeinen Fall.

Später (um 1900) wurde ich durch meine Beschäftigung mit dem sogenannten Riemannschen Problem der linearen Differentialgleichungen auf die Fragestellung meiner Arbeit von 1889 zurückgeführt. Das Riemannsche Problem verlangt die Bestimmung einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten vom Fuchsschen Typus, deren wesentlich singuläre Stellen mit den zugehörigen Fundamentalsubstitutionen beliebig vorgeschrieben sind. Da jede algebraische Funktion einer linearen Differentialgleichung des genannten Typus genügt und für eine solche Funktion die Angabe der singulären Stellen mit den entsprechenden Fundamentalsubstitutionen nichts anderes bedeutet, als die Angabe der Riemannschen Fläche, so erscheint die Aufgabe der Bestimmung einer zu gegebener Riemannscher Fläche gehörigen algebraischen Funktion als spezieller Fall der Lösung des Riemannschen Problems. — Nun bediente ich mich bei der Behandlung dieses Problems der Kontinuitätsmethode, die ja bekanntlich darin besteht, zu zeigen, dass für zwei Systeme von Parametern, von denen das eine den Daten des Problems, das andere den unmittelbaren Bestimmungsstücken der Lösung entspricht, beliebigen Werten des einen Systems immer wohlbestimmte des anderen zugehören. Während für das allgemeine Riemannsche Problem die Beziehung zwischen jenen beiden Systemen von Parametern eine transzendente ist, muss sie sich für die in Rede stehende Aufgabe aus der Theorie der algebraischen Funktionen auf eine algebraische reduzieren, und so legte ich mir die Frage vor, wie sich die seinerzeit für die spezielle Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null angewandte Methode auf den allgemeinen Fall übertragen lässt. — Diese Frage habe ich behandelt in den Comptes Rendus vom 27. Oktober 1902 und in den Annales de l'École Normale Supérieure, 3. série, t. 20, 1903, S. 331 ff. (Sur la détermination des fonctions algébriques uniformes sur une surface de Riemann donnée). Die Forderung, dass y eine eindeutige Funktion des Orts in einer Riemannschen Fläche R mit m Blättern und den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ sei[1], die in R jeden Wert ν-mal annimmt, bedingt, dass y einer Gleichung von der Form

$$f_0(x)y^m + f_1(x)y^{m-1} + \cdots + f_m(x) = 0 \tag{2}$$

genügt, wo

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{\nu} A_{ik}\, x^{\nu-i} \qquad (k = 0, 1, \ldots m)$$

ist. Die Diskriminante dieser Gleichung wird einmal als homogene Funktion vom Grade $2(m-1)$ der Koeffizienten $f_k(x)$, das andere Mal in der Form

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma)\,.\,X^2$$

darstellbar sein, wo X, der sogenannte ausserwesentliche Teiler der Diskriminante, eine ganze Funktion von x vom Grade $(m-1)(\nu-1)-p$ ist, wenn p das Geschlecht der Riemannschen Fläche R bedeutet, sodass also $\sigma - 2m = 2p - 2$. — Vergleicht man in diesen beiden Darstellungen der Diskriminante wieder die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man ein System von algebraischen Gleichungen $(M) = 0$, das aus $2\nu(m-1)+1$ Gleichungen besteht, und in dem neben den $(m+1)(\nu+1)-1$ Koeffizienten A_{ik} noch die $(m-1)(\nu-1)-p+1$ Koeffizienten der ganzen Funktion X als Unbekannte aufzufassen sind. Man hat somit im ganzen $2m\nu + 2 - p$ Unbekannte, also $2\nu - p + 1$ mehr als Gleichungen. — Nach den Grundsätzen der Eliminationstheorie ergibt sich nun, dass sich von dem Gleichungssystem $(M) = 0$ ein System $(\overline{M}) = 0$ abspalten lässt, das die $2m\nu + 2 - p$ Unbekannten als algebraische Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ und von $2\nu - p + 1$ willkürlichen Konstanten definiert, also von ebensovielen Konstanten, als nach den Riemannschen Sätzen in einer algebraischen Funktion vom Geschlechte p, die jeden Wert an ν gegebenen Stellen annimmt, willkürlich bleiben müssen. — Dieses System zerfällt wieder in eine endliche Anzahl irreduzibler Systeme (Primideale in moderner Bezeichnungsweise)

$$(M') = 0, \quad (M'') = 0, \ldots, \tag{3}$$

[1] Die Annahme einfacher Verzweigungspunkte involviert keine wesentliche Beschränkung, indem sich bekanntlich jede beliebige Riemannsche Fläche homöometrisch (d. h. gegenseitig eindeutig und konform) auf eine mit nur einfachen Verzweigungspunkten abbilden oder, was dasselbe heisst, jede algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln birational in eine solche mit einfachen Verzweigungspunkten transformieren lässt.

wobei als Rationalitätsbereich der Bereich der rationalen Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ mit irgendwelchen konstanten Koeffizienten zu gelten hat. Ich hatte mich damals natürlich auf die Kroneckersche Eliminationstheorie berufen; die an dieser Theorie durch Macaulay (The algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts 19, 1916) geübte Kritik trifft auch nicht die hier benutzten Resultate, sondern nur gewisse Teile ihrer Begründung, sodass es genügt, neben Kronecker auf die von Hentzelt (Mathematische Annalen 88, 1922, S. 53 ff., bearbeitet von Emmy Noether) gegebene Darstellung der Eliminationstheorie zu verweisen (Vergl. Emmy Noether, Mathematische Annalen 90, 1923, S. 229 ff.). — Bestimmt man die A_{ik} (nur auf diese kommt es an, die Koeffizienten von X können ausser Betracht bleiben) durch irgendeines der Systeme (3) als algebraische Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ und bildet mit diesen A_{ik} die Gleichung (2), so fragt es sich, ob wenigstens eine dieser Gleichungen irreduzibel sein wird. — Ich habe mich damals zum Nachweis, dass diese Frage zu bejahen sei, auf die Tatsache berufen, dass man mit Hilfe von Abelschen oder Fuchsschen Thetafunktionen stets irreduzible Gleichungen vom Geschlecht p aufstellen kann, die in y vom m-ten, in x vom ν-ten Grade sind. — Die hierauf bezügliche kurze Bemerkung (Annales de l'École Normale, a. a. O., S. 341) möge, da sie zu Bedenken Anlass gegeben hat (solche wurden mir gelegentlich von Emmy Noether brieflich mitgeteilt), durch die nachfolgenden Erörterungen ergänzt werden.

4. Vorhandensein einer Lösung, die eine irreduzible Gleichung liefert.

Das Fundamentalpolygon einer Fuchsschen Funktion vom Geschlechte p, dessen Ecken einen einzigen Zyklus mit der Winkelsumme 2π bilden, hängt (siehe Poincaré, Œuvres II, pag. 224—225) von $3p-3$ willkürlichen Parametern $q_1, q_2, \ldots, q_{3p-3}$ ab. — Bildet man mit Hilfe von Thetafunktionen die Fuchssche Funktion x, die innerhalb des Fundamentalpolygons jeden Wert m mal annimmt, so hängt diese noch von $2m-p+1$ weiteren Parametern ab, die wir mit $q_{3p-2}, \ldots, q_\sigma$ bezeichnen, da ja die Gesamtzahl der auftretenden Parameter gleich $3p-3+2m-p+1=2p+2m-2=\sigma$ ist. Die durch diese Fuchssche Funktion vermittelte Abbildung des Fundamentalpolygons auf die x-Ebene ist eine diese Ebene m-fach überdeckende Riemannsche Fläche R' vom Gechlechte p, die also $2p+2m-2=\sigma$ einfache Verzweigungspunkte besitzt und längs der $2p$, den Seiten des Fundamentalpolygons entsprechenden Rückkehrschnitte aufgeschnitten ist. Verschmelzen wir die beiden Ufer eines jeden dieser Rückkehrschnitte, so geht R' in die $2p+1$-fach zusammenhängende Riemannsche Fläche R über, die also von den σ Parametern $q_1, \ldots, q_\sigma$ abhängt. Die σ einfachen Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind monogene analytische Funktionen dieser Parameter. — Gehen wir von einem bestimmten Fundamentalpolygon aus und wählen x so, dass die σ einfachen Verzweigungspunkte alle von einander verschieden ausfallen, so entspreche dem so fixierten System von Werten k_i der Parameter q_i das Wertsystem α_i der Verzweigungspunkte a_i und die Riemannsche Fläche R_α. In der Umgebung des Wertsystems $q_i = k_i$ sind die $a_i - \alpha_i$ nach positiven ganzen Potenzen der $q_i - k_i$ entwickelbar, und da einem, in einer gewissen Umgebung der k_i gelegenen Wertsystem der q_i nicht zwei verschiedene Wertsysteme der a_i entsprechen können, ist die Funktionaldeterminante der a_i nach den q_i an der Stelle k_i von Null verschieden, sodass auch umgekehrt die $q_i - k_i$ nach positiven ganzen Potenzen der $a_i - \alpha_i$ entwickelt werden können. — Betrachten wir nun noch eine Fuchssche Funktion y, die im Fundamentalbereich jeden Wert ν-mal annimmt, also von noch weiteren $2\nu - p + 1$ Parametern $r_1, \ldots, r_{2\nu+1-p}$ abhängt, so besteht zwischen x und y eine Gleichung $F(y, x) = \sum_{i,k} A_{ik} x^{\nu-i} y^{m-k} = 0$, die zu der Riemannschen Fläche R gehört. — Die A_{ik} sind in der Umgebung von $q_i = k_i$ als analytische Funktionen der q_i, und folglich in der Umgebung von $a_i = \alpha_i$ auch als analytische Funktionen der a_i definiert und hängen überdies noch von den $2\nu - p + 1$ Parametern r_i ab; sie genügen jedenfalls einem der Systeme (3), etwa $(M') = 0$, das also in einer gewissen Umgebung der Stelle $a_i = \alpha_i$ ein System von noch von $2\nu - p + 1$ Parametern abhängenden Lösungen A_{ik} besitzt, das eine irreduzible Gleichung $F(y, x) = 0$ ergibt. Diese Lösungen denken wir uns längs eines Weges W in der Mannigfaltigkeit der a_i analytisch fortgesetzt und erhalten auf diese Weise in der Umgebung eines jeden durch diese Fortsetzung erreichbaren regulären Wertesystems $a_i = \beta_i$ Lösungen $A_{ik}^{(\beta)}$ des Systems $(M') = 0$. — Die mit diesen $A_{ik}^{(\beta)}$ gebildete Gleichung $F(y, x)_\beta = 0$ gehört zu einer Riemannschen Fläche R_β, die aus R entsteht, indem wir die Verzweigungspunkte a_i von R den Weg W beschreiben lassen; dadurch werden die Zusammenhangsverhältnisse von R nicht alteriert, also ist R_β auch zusammenhängend und demnach $F(y, x)_\beta = 0$ auch irreduzibel. — Damit ist der zu liefernde Nachweis erbracht, d. h. es ist gezeigt, dass man für jedes durch analytische Fortsetzung erreichbare reguläre Wertsystem der $a_1, \ldots, a_\sigma$ aus dem System $(M') = 0$ die A_{ik} so bestimmen kann, dass die mit denselben gebildete Gleichung $F(y, x) = 0$ irreduzibel wird. — Wie wir alsbald sehen werden, sind die singulären Wertsysteme der $a_1, \ldots, a_\sigma$ durch die Gleichungen $a_i = a_k$, für $i \neq k$, und $a_i = \infty$ gegeben. Diese sind höchstens $2\sigma - 2$-fach ausgedehnt, sodass durch ihre Aussonderung die 2σ-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der $a_1, \ldots, a_\sigma$ nicht zerstückelt wird. Die durch analytische Fortsetzung erreichbaren Wertsysteme sind demnach alle Systeme von endlichen und von einander verschiedenen Werten der $a_1, \ldots, a_\sigma$, sodass sich also für jedes solche spezielle Wertsystem der $a_1, \ldots, a_\sigma$ eine irreduzible Gleichung $F(y, x) = 0$ herstellen lässt, die diese Werte und nur diese zu einfachen Verzweigungspunkten besitzt.

Wenn man mit Rücksicht auf die »Reinheit der Methode» Wert darauf legt, die Anwendung der Fuchsschen Funktionen als eines transzendenten Hilfsmittels auch beim Beweise zu vermeiden, so braucht man nur statt des Fundamentalpolygons eine sogenannte Normalgleichung vom Geschlechte p, die von $3p-3$ Parametern abhängt, zum Ausgangspunkt zu nehmen (siehe z. B. bei Hensel und Landsberg, Algebraische Funktionen, 1902, XXXI. Vorlesung, S. 540 ff.) und im übrigen genau so weiter zu schliessen wie geschehen. Dabei mag betont werden, dass wir bei unserem Beweis aus der Theorie der Fuchsschen Funktionen nur soviel in Anspruch nehmen, als sich aus den Eigenschaften des Fundamentalpolygons und der Thetafunktionen ganz unmittelbar ergibt; das sogenannte Fundamentaltheorem der Uniformisierung einer gegebenen algebraischen Funktion ist nicht erforderlich. Was übrigens das Vermeiden des transzendenten Hilfsmittels anlangt, so vergleiche man auch Severi, Rendiconti di Palermo, XLVI, 1922, S. 111.

5. Die zu gegebener Fläche gehörige Funktion. — Das arithmetisch Erreichbare.

Damit ist zunächst gezeigt, wie man algebraische Funktionen herstellen kann, die auf einer m-blättrigen Riemannschen Fläche mit den σ einfachen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ eindeutig sind und jeden Wert ν-mal annehmen. Um nun weiter zu zeigen, dass man auch den Zusammenhang der Blätter, d. h. also die Vertauschungen bei den Umläufen um die Verzweigungspunkte willkürlich vorschreiben kann, greife ich auf die oben (Nr. 2) erwähnte Hurwitzsche Bemerkung zurück. — Es sei etwa $(M') = 0$ dasjenige unter den irreduziblen Systemen (3), das zu einer Bestimmung der A_{ik} führt, die eine irreduzible Gleichung (2) ergeben; es wird sich sofort zeigen, dass es nur ein solches irreduzibles System (Primideal) geben kann. Es sei R' die zu der so bestimmten Gleichung (2) gehörige Riemannsche Fläche. Nach der Bemerkung von Hurwitz gehen alle Riemannsche Flächen mit m Blättern und den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ aus einander durch Monodromie der Verzweigungspunkte hervor; die ursprünglich vorgegebene Riemannsche Fläche R entsteht also aus R' ebenfalls durch Monodromie der $a_1, \ldots, a_\sigma$. Denkt man sich nun die A_{ik} längs derjenigen geschlossenen Wege der $a_1, \ldots, a_\sigma$ fortgesetzt, bei denen sich die Riemannsche Fläche R' in R verwandelt, so geht die zu R' gehörige Gleichung (2) in eine Gleichung ($\bar{2}$) über, die zu der Riemannschen Fläche R gehören wird, und damit ist die Herstellung einer zu dieser letzteren gehörigen algebraischen Funktion geleistet. — Diese algebraische Bestimmung der zu einer gegebenen Riemannschen Fläche gehörigen algebraischen Funktion gewährt aber auch noch einen Einblick in die algebraische Natur des in Rede stehenden Problems, der mir als das wesentlichste Ergebnis dieses ganzen Gedankenganges erscheint und worüber darum noch einige Worte gestattet seien. —

Ein irreduzibles System $(M') = 0$ verhält sich ähnlich wie eine irreduzible Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, insbesondere gilt ein dem Puiseuxschen Satze analoger Satz.[1] Es gehen nämlich alle Lösungssysteme A_{ik} von $(M') = 0$ aus einem derselben dadurch hervor, dass man die $a_1, \ldots, a_\sigma$ geschlossene Wege beschreiben lässt. Die Gleichung (2), die wir erhalten, indem wir die A_{ik} als durch das System $(M') = 0$ definierte algebraische Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ nehmen, stellt also, wenn wir diesen A_{ik} ihre volle Mehrdeutigkeit belassen, alle und nur die Gleichungen dar, die zu irgend einer in sich zusammenhängenden Riemannschen Fläche mit m Blättern und den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ gehören. Damit ist zunächst in Evidenz gesetzt, dass es unter den

[1] Siehe Annales de l'École Normale a. a. O., S. 339—340: der daselbst angedeutete Beweis stützt sich auf einen von J. Molk in seiner Thèse (Acta mathem. VI, 1884, S. 156) bewiesenen Satz über irreduzible Gleichungssysteme, der auch im Rahmen der neueren Eliminationstheorie bestehen bleibt. — Man könnte durch die dem Puiseuxschen Satze analoge Eigenschaft (siehe weiter im Text) auch die irreduziblen Systeme *definieren*, d. h. also so, dass man von einem von $2\nu - p + 1$ willkürlichen Parametern abhängenden Lösungssystem des Systems $(\overline{M}) = 0$ (siehe oben S. 7) ausgehend aus diesem alle diejenigen Lösungssysteme herleitet, die daraus hervorgehen, wenn man die $a_1, \ldots, a_\sigma$ geschlossene Bahnen beschreiben lässt; die Gesamtheit dieser Lösungen muss dann ein Gleichungssystem mit Koeffizienten des Rationalitätsbereichs befriedigen. Man hätte dann nur noch den Nachweis zu erbringen, dass durch eine endliche Anzahl solcher Gleichungssysteme der gesammte Inhalt des Systems $(\overline{M}) = 0$ erschöpft werden kann. Das ist aber selbstverständlich, weil ja ein algebraisches Gleichungssystem nur eine endliche Anzahl von Lösungen haben kann, die von der nötigen Anzahl willkürlicher Parameter abhängen.

Primfaktoren (3) des Systems $(\overline{M}) = 0$ tatsächlich nur einen einzigen geben kann, für den die dadurch definierten A_{ik} eine irreduzible Gleichung (2) liefern. In Bezug auf diesen Primfaktor $(M') = 0$ kann noch folgendes ausgesagt werden: Die einzigen Singularitäten der durch das Gleichungssystem $(M') = 0$ definierten algebraischen Funktionen A_{ik} der $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind (vergl. Annales de l'École Normale a. a. O., S. 339) die Gebilde $a_i = a_k (i \neq k)$ und $a_k = \infty$, die also aus der 2σ-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der $a_1, \ldots, a_\sigma$ auszuschliessen sind, wodurch aber diese Mannigfaltigkeit nicht aufhört, zusammenhängend zu sein (vergl. oben Nr. 4, S. 10). In der Umgebung einer jeden ausserhalb jener singulären Gebilde gelegenen Stelle $a_k = \alpha_k$ sind die A_{ik} in gewöhnliche Potenzreihen der $a_k - \alpha_k$ entwickelbar. Verbindet man die $a_i = a_k (i \neq k)$ mit dem Unendlichen durch schnittartige Gebilde, so sind in der so zerschnittenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ die gedachten Potenzreihen eindeutig fortsetzbar, während sie bei Fortsetzung auf einem geschlossenen Wege W der $a_1, \ldots, a_\sigma$, der jene Schnitte überschreitet, im allgemeinen Wertänderungen erfahren werden, die dem Übergang von einer bestimmten Riemannschen Fläche R zu derjenigen R' entsprechen, die aus R hervorgeht, wenn die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ eben auf jenem Wege W in ihre Ausgangslagen zurückgeführt werden. Bezeichnet man mit h die von Hurwitz bestimmte Anzahl wesentlich von einander verschiedener m-blättriger Riemannscher Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ und denkt sich h Exemplare der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ mit den singulären Gebilden und den Schnitten übereinandergelegt und längs der Ufer jener Schnitte so mit einander verschmolzen, wie es den Änderungen entspricht, die die Riemannsche Fläche R beim Überschreiten des betreffenden Schnittes erfährt, so erhält man ein in sich zusammenhängendes Gebilde G, auf dem die durch das System $(M') = 0$ definierten algebraischen Funktionen A_{ik} eindeutige Funktionen des Ortes sind, das also als das »Riemannsche Gebilde» dieser algebraischen Funktionen oder des irreduziblen Gleichungssystems $(M') = 0$ angesprochen werden kann. — Eine derartige Bedeutung der Zahl h dürfte wohl Felix Klein vorgeschwebt haben, wenn er in seinem Buche »Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen (1882)» auf S. 64 sagt, das Riemannsche Existenztheorem impliziere eine Aussage über eine interessante Gleichung höheren Grades, und unmittelbar darauf davon spricht, dass die Zahl h eine algebraische Bedeutung habe.

Bezeichnen wir mit $R_1, R_2, \ldots, R_h$ die Gesamtheit aller von einander verschiedener m-blättriger Riemannscher Flächen mit den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$, die also nach Hurwitz durch Monodromie dieser Verzweigungspunkte auseinander hervorgehen, so definiert uns die Gleichung $F(y, x) = \sum_{i,k} A_{ik} x^{\nu-i} y^{m-k} = 0$, sofern wir die A_{ik} als durch das irreduzible System $(M') = 0$ gegebene implizite algebraische Funktionen der a_i ansehen, die Gesamtheit aller der algebraischen Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_h$, die zu den verschiedenen Riemannschen Flächen $R_1, R_2, \ldots, R_h$ gehören. Arithmetisch (im Sinne von Kroneckers Festschrift) ist es auch garnicht möglich, die zu *einer bestimmten* dieser Riemannschen Flächen gehörige algebraische Funktion von den übrigen zu isolieren, da es hierzu der Aussonderung eines bestimmten Zweigsystems der algebraischen Funktionen A_{ik} der a_i bedarf. Handelt es sich nämlich um die Konstruktion der zu einer gegebenen Riemannschen Fläche R_α mit den einfachen Verzweigungspunkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ gehörigen algebraischen Funktion, wo die α_i endliche und von einander verschiedene Zahlen bedeuten, so hat man zunächst dasjenige System von Zweigen der A_{ik}, d. h. also dasjenige System von den Gleichungen $(M') = 0$ genügenden, in der Umgebung der regulären Stelle $a_i = \alpha_i$ geltenden Potenzreihen herzustellen, das derjenigen Fläche R_k entspricht, die in R_α übergeht, wenn man den a_i die Lagen α_i zuerteilt, und dann mit den absoluten Gliedern A^0_{ik} dieser Potenzreihen die Gleichung $F(y, x) = 0$ zu bilden. Eine eindeutige Bestimmung der A_{ik} durch die Gleichungen $(M') = 0$ erfolgt dann und nur dann, wenn es sich um eine Riemannsche Fläche handelt, die durch Angabe der Blätterzahl und der Lage ihrer einfachen Verzweigungspunkte vollkommen festgelegt ist, wie es z. B. für eine hyperelliptische Fläche der Fall ist; die A_{ik} sind dann rationale Funktionen der a_i. Lässt man diese besonderen Fälle bei Seite, so ergibt sich aus unserer Analyse eine Weiterbildung der klassischen Auffassung Riemanns, die im folgenden besteht.

Betrachtet man mit Riemann die zu einer besonderen Fläche, etwa R_1 gehörige algebraische Funktion y_1 von x, so gehen deren verschiedene Zweige dadurch hervor, dass wir x in R_1 variieren lassen. Darüber hinaus zwingt unsere algebraische Behandlung des Existenzproblems dazu, dass wir gleichzeitig mit jenem y_1 auch die übrigen Funktionen $y_2, \ldots, y_h$ betrachten, die aus y_1 hervorgehen, indem man die a_i auf dem oben betrachteten Riemannschen Gebilde G variieren lässt, und die, wie wir sahen, durch die Gleichung $F(y, x) = 0$ simultan dargestellt werden, wenn man die A_{ik} als durch die Gleichungen $(M') = 0$ definiert ansieht. Man hat also y nicht als Funktion der einen Variablen x allein, sondern als Funktion der $\sigma + 1$ Variablen $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ aufzufassen und erhält auf diese Weise ein im analytischen Sinne monogenes, algebraisch irreduzibles Gebilde, das neben y_1 auch alle die algebraischen Funktionen $y_2, \ldots, y_h$ umfasst, die zu den Riemannschen Flächen $R_2, \ldots, R_h$ gehören, die aus R_1 durch Monodromie der Verzweigungspunkte hervorgehen, d. h. also die Gesamtheit aller der algebraischen Funktionen, die zu allen möglichen Riemannschen Flächen mit m Blättern und den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ gehören. —

Als *arithmetisch fassbar* erweist sich also nur diese Gesamtheit, die man wohl als die durch Angabe der Blätterzahl m und der Lage der einfachen Verzweigungspunkte bestimmte *Gattung* algebraischer Funktionen oder Riemannscher Flächen bezeichnen könnte. Allgemein, d. h. wenn wir für einen Augenblick die Voraussetzung fallen lassen, dass alle Verzweigungspunkte einfache sind, würde also eine solche Gattung algebraischer Funktionen oder Riemannscher Flächen gegeben sein durch die Blätterzahl, die Lage der Verzweigungspunkte, sowie die Anzahl der zu jedem Verzweigungspunkte gehörigen Zykeln nebst deren Elementenzahl.[1] Und es scheint bemerkenswert, dass ja auch umgekehrt für eine vorgelegte algebraische Gleichung zwischen x und y durch arithmetische Methoden zwar für jeden einzelnen Verzweigungspunkt die Anzahl der Zykeln sowie deren Elementenzahl angegeben werden kann, dass aber der Zusammenhang zwischen den zu verschiedenen Verzweigungspunkten gehörigen Zykeln sich nur in der Weise herstellen lässt, dass man durch *analytische Fortsetzung* aus der Umgebung des einen Verzweigungspunktes in die des anderen hinübergreift. Man kommt also, sei es dass man von der Riemannschen Fläche ausgeht, sei es dass man eine algebraische Gleichung zwischen x und y zugrunde legt, arithmetisch nicht über die Bestimmungsstücke hinaus, die die gesamte Gattung charakterisieren. — Hält man sich die Tatsache vor Augen, dass eine algebraische Funktion stets einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten Genüge leistet, so sehen wir, dass man arithmetisch für eine algebraische Funktion auch nicht mehr leisten kann, als für eine beliebige lineare Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus; auch für eine solche kann man in der Umgebung eines jeden einzelnen singulären Punktes das Verhalten der Lösungen arithmetisch angeben, bedarf jedoch der analytischen Fortsetzung, wenn man den Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen singulären Punkten (die sogenannten Übergangssubstitutionen) herstellen will, durch den erst die Monodromiegruppe, der im

[1] Die Frage, ob zwei Riemannsche Flächen, die in diesen Daten übereinstimmen, auch stets durch Monodromie der Verzweigungspunkte in einander übergeführt werden können oder nicht, scheint noch nicht erledigt zu sein; vergl. Hurwitz, Mathem. Annalen 39, 1891, S. 33.

Falle einer algebraischen Funktion die Riemannsche Fläche entspricht, gegeben wird.

Dass die hier dargelegte Auffasung sich auch in anderen Kapiteln der Lehre von den algebraischen Funktionen bewährt, soll jetzt nur noch an den linearen Differentialgleichungen nachgewiesen werden, denen die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale als Funktionen der Verzweigungspunkte Genüge leisten.

6. Die Differentialgleichungen für die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale.

Es sei $F(y, x) = \sum_{i,k} A_{ik} x^{\nu-i} y^{m-k} = 0$ die Gleichung, die für ein bestimmtes Zweigsystem A_{ik}^1 der durch die Gleichungen $(M') = 0$ definierten algebraischen Funktionen A_{ik} der $a_1, \ldots, a_\sigma$ die zu der Riemannschen Fläche R_1 gehörige algebraische Funktion $y = y_1$ von x definiert. Man nennt nach Appell und Goursat (Théorie des fonctions algébriques, 1895, S. 338) ein System von $2p$ logarithmenfreien Integralen rationaler Funktionen von x, y ein Fundamentalsystem, wenn zwischen diesen Integralen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ keine Relation von der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{2p} \zeta_\lambda C_\lambda + \mathfrak{R}(y, x) = 0$$

besteht, wo die C_λ von x unabhängig sind und $\mathfrak{R}(y, x)$ eine rationale Funktion von y, x bedeutet. Es gelten dann (vergl. a. a. O.) die beiden Sätze:

I. Wenn $P_k^\lambda (k = 1, 2, \ldots, 2p)$ die Periodizitätsmoduln von ζ_λ sind, so ist die Determinante $|P_k^\lambda|$ von Null verschieden, da man sonst die homogenen Gleichungen $\sum_{\lambda=1}^{2p} P_k^\lambda C_\lambda = 0 \, (k = 1, 2, \ldots, 2p)$ nach den C_λ auflösen könnte, wodurch sich $\sum_\lambda \zeta_\lambda C_\lambda$ gleich einer rationalen Funktion von y, x ergäbe.

II. Es kann jedes zu unserer Gleichung gehörige logarithmenfreie Abelsche Integral in der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{2p} \zeta_\lambda C_\lambda + \mathfrak{R}(y, x).$$

dargestellt werden.

Indem wir die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ unserer algebraischen Gleichung als von einander unabhängige Veränderliche ansehen, wollen wir die linearen Differentialgleichungen betrachten, denen die Periodizitätsmoduln der Integrale ζ_λ als Funktionen der $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ nach Fuchs[1] Genüge leisten. Setzen wir $\zeta_k = \int \psi_k \, dx$, so können wir voraussetzen, dass die Koeffizienten der rationalen Funktionen ψ_k von y, x sich rational aus den A^1_{ik} und den $a_1, \ldots, a_\sigma$ mit numerischen Koeffizienten zusammensetzen. Dann ist offenbar auch

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} = \int \frac{\partial \psi_k}{\partial a_r} dx \qquad (r = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ein logarithmenfreies Abelsches Integral, also nach dem Satze II in der Form

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} = \sum_{\lambda=1}^{2p} \zeta_\lambda C^k_{\lambda r} + \mathfrak{R}^k_r(y, x) \tag{4}$$

darstellbar. Integriert man diese Gleichung über die $2p$ Querschnitte, die die zu unserer Gleichung gehörige Riemannsche Fläche R_1 in eine einfachzusammenhängende $\overline{R}_1$ verwandeln, so ergibt sich

$$\frac{\partial P^k_\nu}{\partial a_r} = \sum_{\lambda=1}^{2p} P^\lambda_\nu C^k_{\lambda r} \qquad (k, \nu = 1, 2, \ldots, 2p),$$

d. h. es bilden die $(2p)^2$ Grössen

$$P^k_\nu \qquad (k, \nu = 1, 2, \ldots, 2p)$$

eine Integralmatrix P des linearen Differentialsystems

$$\frac{\partial P^k}{\partial a_r} = \sum_{\lambda=1}^{2p} P^\lambda C^k_{\lambda r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{4 a}$$

und zwar für alle Werte $r = 1, 2, \ldots, \sigma$. Da diese σ simultanen Differentialsysteme durch die Funktionen P^k_ν der σ unabhängigen Veränderlichen a_r befriedigt werden, so können wir sie in das eine totale Differentialsystem

$$dP^k = \sum_{\lambda=1}^{2p} P^\lambda \sum_{r=1}^{\sigma} C^k_{\lambda r} \, da_r \tag{4 b}$$

[1] L. Fuchs, Werke I, S. 344 (1871) und III, S. 249 (1897), S. 294 (1898).

zusammenfassen, das demnach komplett integrabel ist, d. h. dessen Koeffizientenmatrizen $(C^k_{\lambda r}) = C_r$ die Integrabilitätsbedingungen

$$R_{rs} = \frac{\partial C_r}{\partial a_s} - \frac{\partial C_s}{\partial a_r} + C_r C_s - C_s C_r = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

erfüllen, oder, wie man auch sagt, für das der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet.

Es entsteht aber die Frage nach dem Rationalitätsbereich der Koeffizienten $C^k_{\lambda r}$ und weiter die nach einer Methode, um diese Koeffizienten wirklich herzustellen. Beides lässt sich leisten mit Hilfe der Riemannschen Methode der Integration über den gesamten Rand der zerschnittenen Riemannschen Fläche $\overline{R}_1$. — Wir multiplizieren die Gleichung (4) mit $\psi_\nu = \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial x}$ und integrieren über den Rand von $\overline{R}_1$. Dann ist dieses Integral gleich der Summe der Residuen der zu integrierenden Funktion, also, wenn wir in Cauchyscher Weise diese Summe (das Résidu intégral) durch ein vorgesetztes $\mathcal{E}$ bezeichnen, so erhalten wir:

$$\mathcal{E} \frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \psi_\nu = \sum_{\lambda=1}^{2p} \mathcal{E} \zeta_\lambda \psi_\nu \,.\, C^k_{\lambda r} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p). \tag{5}$$

In diesen Gleichungen ist, wie man leicht zeigt (vergl. Fuchs a. a. O.), die Determinante $|\mathcal{E} \zeta_\lambda \psi_\nu|$ von Null verschieden, man kann also die $C^k_{\lambda r}$ aus ihnen in eindeutiger Weise berechnen und findet

$$C_r = (C^k_{\lambda r}) = \left(\mathcal{E} \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial a_r} \psi_\nu\right) (\mathcal{E} \zeta_\lambda \psi_\nu)^{-1},$$

wobei noch besonders hervorzuheben wäre, dass die Elemente der Matrix $(\mathcal{E} \zeta_\lambda \psi_\nu)$ von dem Index r unabhängig sind. Dies zeigt zunächst, dass die $C^k_{\lambda r}$ als Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ demselben Rationalitätsbereich angehören wie die $\mathcal{E} \zeta_\lambda \psi_\nu$, d. h. also wie die Koeffizienten von $F(y, x)$ und der ψ_ν (vergl. Fuchs a. a. O.).

Die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4 a) bezw. (4 b) sind also im allgemeinen mehrdeutige algebraische Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$; nur in den oben gedachten besonderen Fällen, wo die Riemannsche Fläche durch Angabe der Blätterzahl und der einfachen Verzweigungspunkte vollkommen festgelegt wird, sind die $C^k_{\lambda r}$ rational in den $a_1, \ldots, a_\sigma$, was an der bekannten Form der Diffe-

3 — 30534. *Acta mathematica.* 56. Imprimé le 6 septembre 1930.

rentialsysteme bestätigt werden kann, denen die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale Genüge leisten (vergl. z. B. Mathem. Zeitschrift, 28, 1928, S. 506). Im allgemeinen Falle, wo die $C^k_{\lambda r}$ rational in den a_i und den algebraischen Funktionen A_{ik} derselben sind, werden die Differentialgleichungen (4 a) und (4 b), sofern man den A_{ik} ihre volle Mehrdeutigkeit belässt, d. h. die a_i auf dem Riemannschen Gebilde G sich frei verändern lässt, nicht allein durch die Periodizitätsmoduln der zu der Riemannschen Fläche R_1 gehörigen Abelschen Integrale $\int \psi_k(y_1, x)\, dx$, sondern auch durch die der Integrale $\int \psi_k(y_i, x)\, dx$, für $i = 2, \ldots, h$, befriedigt, die zu den Riemannschen Flächen R_i gehören, die mit R_1 zusammen eine Gattung bilden. Lässt man die $a_1, \ldots, a_\sigma$ alle auf dem Gebilde G geschlossenen Wege beschreiben, also Wege, bei denen die Koeffizienten $C^k_{\lambda r}$ in ihre Ausgangswerte zurückkehren, so erleiden die P^k_ν die linearen Substitutionen einer Gruppe Θ mit konstanten, d. h. von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängigen Koeffizienten; bekanntlich sind diese Koeffizienten ganze Zahlen, und den Substitutionen von Θ entsprechen die linearen Transformationen der zugehörigen Abelschen Thetas. Insbesondere ist die Monodromiegruppe Θ_r des linearen Differentialsystems (4 a), die also geschlossenen Wegen von a_r in G entspricht, wobei die übrigen a_s für $r \neq s$ fest bleiben, in Θ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten, die Koeffizienten der Substitutionen dieser Monodromiegruppe sind also auch ganze Zahlen.

Wir fügen noch einige Bemerkungen an, die sich auf die Riemann-Weierstrassschen Relationen beziehen, die zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale ζ_k bestehen, und die bekanntlich (siehe Appell und Goursat, a. a. O., S. 142, 143) von der Form sind:

$$\sum_{\lambda, \mu} g^{lk}_{\lambda\mu} (P^l_\lambda P^k_\mu - P^k_\lambda P^l_\mu) = 2\pi i \mathcal{E} \zeta_l \frac{\partial \zeta_k}{\partial x}, \tag{6}$$

wo die $g^{lk}_{\lambda\mu}$ ganze Zahlen bedeuten. Wir betrachten zu dem Ende die $(p(2p-1))^2$ Determinanten zweiter Ordnung

$$P^{lk}_{\lambda\mu} = P^l_\lambda P^k_\mu - P^k_\lambda P^l_\mu \qquad (l, k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2p),$$

die als Funktionen von a_r das sogenannte $(2p-2)$-te assoziierte Differentialsystem des Systems (4 a)[1]

[1] Die allgemeine Form des $(2p-2)$-ten assoziierten Systems findet sich bei Fuchs, Werke III, S. 285 (1898) und bei Darboux, Comptes Rendus 148, 1909, S. 748.

$$(7) \qquad \frac{d P^{lk}}{d a_r} = \sum_{\nu=1}^{2p} (P^{\nu k} C^l_{\nu r} - P^{\nu l} C^k_{\nu r}) \qquad (l, k = 1, 2, \ldots, 2p)$$

befriedigen, bezw. eine Integralmatrix dieses Systems bilden. Nach einem Satze von Fuchs ist das System (7) *reduzibel;* wir zeigen dies direkt, indem wir nachweisen, dass dieses System durch ein System von Lösungen befriedigt wird, die dem Rationalitätsbereiche seiner Koeffizienten angehören.

Betrachten wir nämlich die Ausdrücke $\mathcal{E}\zeta_l \psi_k$, so ist

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial a_r} \mathcal{E}(\zeta_l \psi_k) = \mathcal{E}\frac{\partial \zeta_l}{\partial a_v} \psi_k + \mathcal{E}\zeta_l \frac{\partial \psi_k}{\partial a_r}.$$

Nun gilt aber, wenn wir über die Begrenzung der zerschnittenen Riemannschen Fläche $\overline{R}_1$ integrieren,

$$\int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial \psi_k}{\partial a_r} \zeta_l \, dx = \int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r}\right) \zeta_l \, dx = \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \zeta_l\right)_{\overline{R}_1} - \int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} dx$$

also, da der integralfreie Teil im dritten Gliede dieser Gleichung offenbar verschwindet,

$$\int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial \psi_k}{\partial a_r} \zeta_l \, dx = - \int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} dx = - \int\limits_{\overline{R}_1} \frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \psi_l \, dx$$

oder, was dasselbe heisst,

$$\mathcal{E}\frac{\partial \psi_k}{\partial a_r} \zeta_l = - \mathcal{E}\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \psi_l;$$

die Gleichung (8) gibt demnach

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \mathcal{E}(\zeta_l \psi_k) = \mathcal{E}\frac{\partial \zeta_l}{\partial a_r} \psi_k - \mathcal{E}\frac{\partial \zeta_k}{\partial a_r} \psi_l.$$

Setzen wir hierin die aus den Gleichungen (5) zu entnehmenden Werte ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \mathcal{E}\zeta_l \psi_k = \sum_{\lambda=1}^{2p} \{\mathcal{E}\zeta_\lambda \psi_k \,.\, C^l_{\lambda r} - \mathcal{E}\zeta_\lambda \psi_l \,.\, C^k_{\lambda r}\},$$

und dies zeigt, dass das Differentialsystem (7) durch die Ausdrücke

$$P^{lk} = \mathcal{E}\zeta_l\,\psi_k \tag{9}$$

und zwar für alle Werte $r = 1, \ldots, \sigma$ befriedigt wird. Diese Ausdrücke gehören aber in der Tat dem Rationalitätsbereiche der Koeffizienten des Systems (4 a) und folglich auch dem der Koeffizienten von (7) an.

Wie Fuchs bemerkt hat, ist diese Reduzibilität aequivalent mit dem Bestehen der Riemann-Weierstrassschen Relationen (6). In der Tat ist das Lösungssystem (9) durch die Integralmatrix $P^{lk}_{\lambda\mu}$ darstellbar, d. h. es gilt

$$\gamma'^k\,\mathcal{E}\zeta_\lambda\,\psi_k = \sum_{\lambda,\mu}\gamma^{lk}_{\lambda\mu}\,P^{lk}_{\lambda\mu}, \tag{10}$$

wo die Verhältnisse der γ^{lk}, $\gamma^{lk}_{\lambda\mu}$ von den a_r unabhängige Konstanten sind, sodass wir über die γ^{lk} noch frei verfügen können. Da die Monodromiegruppe Θ_r von (4 a), wie oben bemerkt wurde, ganzzahlige Koeffizienten besitzt, so gilt das gleiche von der Monodromiegruppe des assoziierten Differentialsystems (7). Wenn die $P^{lk}_{\lambda\mu}$ eine Substitution dieser Monodromiegruppe erfahren, so bleiben aber die $\mathcal{E}\zeta_l\,\psi_k$ in (10) ungeändert, sodass wir auf diese Weise für die $\gamma^{lk}_{\lambda\mu}$ lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten erhalten, woraus sich diese Grössen als rationale Zahlen bestimmen. Wählt man nun noch γ'^k gleich $2\pi i$ dividiert durch den Generalnenner N dieser rationalen Zahlen, so bekommt man direkt die Form (6) der Riemann-Weierstrassschen Relationen (vergl. Fuchs, Werke III, S. 290).

7. Die Arbeiten von F. Enriques und F. Severi.

Im Jahre 1912 hat Enriques in den Atti di Torino (1912, S. 300 ff.), ohne meine einschlägigen Arbeiten zu kennen, die Frage der Existenz algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche ebenfalls algebraisch, aber von einer anderen Seite her in Angriff genommen.

Die Grundlage für seine Behandlung findet sich im § 12 von Riemanns Abhandlung über Abelsche Funktionen. In diesem § will Riemann nämlich nachweisen, dass eine Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlecht p von $3p-3$ Klassenmoduln abhängt, indem er von der Möglichkeit ausgeht, eine algebraische Funktion zu gegebener Riemannscher Fläche zu bestimmen. — Bedeutet $F(s, z) = 0$ eine irreduzible Gleichung vom Geschlecht p zwischen s und z, so sei ζ eine rationale Funktion von s, z, die jeden Wert μ-mal annimmt.

Dann genügt jede Funktion der Klasse als Funktion von ζ einer Gleichung vom μ-ten Grade und hat daher $w = 2\mu + 2p - 2$ einfache Verzweigungspunkte. Da ζ von $2\mu - p + 1$ willkürlichen Konstanten abhängt, so kann durch geeignete Wahl von ζ über $2\mu - p + 1$ der w Verzweigungspunkte verfügt werden und zwar, wie Riemann hervorhebt, auf eine endliche Anzahl von Arten, da die hierfür zu erfüllenden Bedingungsgleichungen algebraisch sind. Es bleiben also noch $3p - 3$ Verzweigungspunkte frei, und da es stets möglich ist, wenn die w Verzweigungspunkte einer die ζ-Ebene μ-fach überdeckenden $(2p + 1)$-fach zusammenhängenden Fläche willkürlich gegeben sind, eine zugehörige algebraische Funktion zu bestimmen, so sind jene $3p - 3$ Verzweigungspunkte auch noch willkürlich wählbar, d. h. eine Klasse $(2p + 1)$-fach zusammenhängender algebraischer Funktionen hängt — im allgemeinen — von $3p - 3$ Parametern ab. — Nun ist klar, dass es durch Umkehrung dieser Schlussweise Riemanns möglich sein muss, die Existenz einer algebraischen Funktion zu erschliessen, die zu einer μ-blättrigen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p mit w einfachen Verzweigungspunkten gehört, sofern von anderer Seite her bekannt ist, dass die Anzahl der Klassenmoduln $3p - 3$ beträgt. — Da Brill und Noether hierfür einen rein algebraischen Beweis geliefert haben, so ist auf die angedeutete Weise der Weg zu einem algebraischen Existenzbeweise gegeben, vorerst allerdings nur in dem Sinne, dass, bei gegebenen w Verzweigungspunkten und gegebenen Zahlen p und μ, zugehörige algebraische Funktionen und zwar, entsprechend der von Riemann gemachten Bemerkung, in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Dies hat Enriques a. a. O. ausgeführt und Severi hat dann in seinem 1921 erschienenen Buche »Vorlesungen über algebraische Geometrie» (S. 334 ff.) die Schlussweise von Enriques dadurch vervollständigt, dass er zeigte, dass man auch die zu den einzelnen Verzweigungspunkten gehörigen Vertauschungen der μ Zweige beliebig vorschreiben kann, wodurch erst die entsprechende Riemannsche Fläche individualisiert erscheint. Meine Arbeiten waren auch Severi unbekannt geblieben, während mir andererseits die Note von Enriques aus den Atti di Torino entgangen war. — Nachdem ich Severi brieflich auf meine Noten aufmerksam gemacht hatte, vereinfachte dieser in den Rendiconti di Palermo 46, 1922, S. 105 seine Beweismethode, und Enriques hat dann im dritten Bande seiner »Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche» (1924, S. 355 ff.) eine elegante Darstellung des ganzen Beweisganges gegeben. — Ein Vergleich dieses Beweisganges mit dem meinigen führt zu den folgenden Feststellungen. Die Ergänzung, die ich oben in der Nr. 4 meiner Darstellung von

1903 gegeben habe, beruht auf demselben Grundgedanken, wie der ursprüngliche Beweis von Enriques aus dem Jahre 1912, nämlich auf der Umkehrung des § 12 der Riemannschen Abhandlung. Den Übergang von einem gegebenen System von Verzweigungspunkten zu der individuellen Riemannschen Fläche vollzieht Enriques in seinem Buche nach dem Vorgang von Severi (Rendiconti di Palermo 1921) so, wie ich es 1903 angegeben habe, d. h. auf Grund der Bemerkung von Hurwitz. — Das, was meiner Darstellung eigentümlich ist, besteht einmal in der konstruktiven Herstellung der gesuchten algebraischen Funktion durch ein Eliminationsverfahren, das andere Mal in der Hervorhebung dessen, was bei diesem Verfahren arithmetisch erreichbar ist und was darüber hinausgehend die Separation eines einzelnen Lösungssystems des Gleichungssystems erfordert, wobei sich als Weiterbildung der Auffassung Riemanns die Betrachtung der algebraischen Funktionen auch in ihrer Abhängigkeit von den Verzweigungspunkten in zwingender Weise ergibt.

Giessen, den 18. Januar 1930.