ÜBER DIE WERTEVERTEILUNG DER RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION.

Von

HARALD BOHR und BÖRGE JESSEN

in Kopenhagen.

(Zweite Mitteilung. Das Verhalten der Funktion im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$.)

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist bekanntlich eine in der ganzen Ebene der komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ definierte eindeutige Funktion, die bis auf den einen Pol $s=1$ erster Ordnung regulär ist. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist die Funktion durch die beiden gleichwertigen Darstellungen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}} \tag{1}$$

bestimmt, wo in der zweiten (der EULERschen Produktdarstellung) p_n die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots$ durchläuft. Von dieser zweiten Darstellung aus haben wir in der ersten Mitteilung[1] das Verhalten der Zetafunktion in der Halbebene $\sigma > 1$ untersucht; jetzt sollen die entsprechenden Ergebnisse für die grössere Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ hergeleitet werden.

Um die EULERsche Produktdarstellung bequemer ausnützen zu können haben wir in der ersten Mitteilung vorgezogen an Stelle der Funktion $\zeta(s)$ selbst die Funktion $\log \zeta(s)$ zu betrachten. In der Halbebene $\sigma > 1$, wo $\zeta(s)$ von Null verschieden ist, macht dies keine Schwierigkeit; durch

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-p_n^{-s}), \tag{2}$$

wo auf der rechten Seite $\log u$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet, ist in dieser Halbebene ein eindeutiger, regulärer Zweig dieser Funktion eindeutig bestimmt. Soll aber $\log \zeta(s)$ bis zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ untersucht werden, so müssen wir uns die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zuerst aufgeschnitten denken, sowohl längs einer Linie, die den Pol $s=1$ mit der Begrenzungsgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$ verbindet, wie auch — wenn es Nullstellen von $\zeta(s)$ rechts von $\sigma = \frac{1}{2}$ geben sollte — längs Linien, welche von diesen Nullstellen zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ hinführen. Unter $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ soll im folgenden diejenige Funktion verstanden werden, die man aus (2) durch analytische Fortsetzung erhält, wenn man die

[1] H. BOHR und B. JESSEN, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion. Erste Mitteilung. Das Verhalten der Funktion in der Halbebene $\sigma > 1$. Acta math. Bd. 54 (1930). S. 1—35.

Schnitte immer als horizontale Strecken wählt. Das aus der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ durch Aufschneidung in dieser Weise entstehende offene Gebiet bezeichnen wir mit G.

Mit dieser Definition lässt sich das Ergebnis der Arbeit in zwei Sätzen aussprechen, von denen der erste die Verteilung der Werte von $\log \zeta(s)$ *auf einer vertikalen Geraden* $\sigma = \sigma_0$, der zweite die Verteilung der Werte von $\log \zeta(s)$ *in einem vertikalen Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ beschreibt. Wir geben von diesen Sätzen eine etwas genauere Formulierung als in der ersten Mitteilung.

Erster Hauptsatz. *Sei* $\sigma_0 > \frac{1}{2}$. *Dann gibt es in der komplexen* $z = u + iv$-*Ebene eine reelle, beschränkte, stetige, im Falle* $\sigma_0 > 1$ *nirgends negative, im Falle* $\sigma_0 \leqq 1$ *sogar überall positive Funktion* $F(z)$ *von der folgenden Beschaffenheit: Ist* $R(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ *ein beliebiges parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck, und bezeichnet man mit* $L(T)$ *die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von* $-T < t < T$, *in denen* $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ *definiert ist und in* R *liegt, so konvergiert mit unbegrenzt wachsendem* T *der Quotient* $\frac{L(T)}{2T}$ *gegen das über* R *erstreckte Integral der Funktion* $F(z)$:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = \iint_R F(z)\, du\, dv.$$

Für $\sigma_0 > 1$ wurde dieser Satz in der ersten Mitteilung bewiesen; wir betrachten deshalb im folgenden nur den Fall $\sigma_0 \leqq 1$. In diesem Fall ist der Satz eine Verschärfung eines früheren Bohrschen Satzes, wonach die Werte von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ in der komplexen Ebene überall dicht verteilt sind.[1]

Zweiter Hauptsatz. *Sei* $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2$ *und sei* a *im Falle* $\sigma_1 > 1$ *ein Wert, der von* $\log \zeta(s)$ *im Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ *angenommen wird, im Falle* $\sigma_1 \leqq 1$ *eine beliebige komplexe Zahl. Ferner bezeichne* $N_a(T)$ *die Anzahl der (in ihrer Vielfachheit gezählten)* a-*Punkte von* $\log \zeta(s)$ *in demjenigen Teil des Gebietes* G, *der*

---

[1] H. Bohr, Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen. Acta math. Bd. 40 (1915). S. 67—100, S. 73.

dem Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$ *angehört. Dann konvergiert für* $T \to \infty$ *der Quotient* $\frac{N_a(T)}{2T}$ *gegen eine endliche, positive Zahl.*

Für $\sigma_1 > 1$ wurde dieser Satz in der ersten Mitteilung bewiesen; wir betrachten deshalb im folgenden nur den Fall $\sigma_1 \leqq 1$. In diesem Fall ist der Satz eine Verschärfung eines früheren BOHR—BOHR-LANDAUschen Satzes, wonach

$$0 < \varliminf_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}, \qquad \varlimsup_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T} < \infty.$$ [1]

Solange die RIEMANNsche Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion unbewiesen ist, ist das Gebiet G, in dem wir die Funktion $\log \zeta(s)$ betrachten, nicht bekannt. Insofern lässt sich also sagen, dass der *Inhalt* der beiden Hauptsätze von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Vermutung abhängt. Um so wichtiger erscheint es deshalb, hervorzuheben, dass der *Beweis* der beiden Hauptsätze ohne die Heranziehung irgend einer Vermutung über die Nullstellen zustandegebracht ist. Hätten wir an Stelle der Funktion $\log \zeta(s)$ die Funktion $\zeta(s)$ selbst in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ betrachtet, so wären wir zu den folgenden zwei endgültigen, aber trotzdem weniger aussagenden Sätzen gekommen[2]:

Analogon des ersten Hauptsatzes. Sei $\sigma_0 > \frac{1}{2}$. Dann gibt es in der komplexen $z = u + iv$-Ebene eine reelle, beschränkte, stetige, im Falle $\sigma_0 > 1$ nirgends negative, im Falle $\sigma_0 \leqq 1$ überall, ausser im Punkte $z = 0$, positive Funktion $F^*(z)$ von der folgenden Beschaffenheit: Ist $R(u_1 < u < u_2, v_1 < v < v_2)$ ein beliebiges parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck, und bezeichnet man mit $L^*(T)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $\zeta(\sigma_0 + it)$ in R liegt, so konvergiert mit unbegrenzt wachsendem T der Quotient $\frac{L^*(T)}{2T}$ gegen das über R erstreckte Integral der Funktion $F^*(z)$:

---

[1] Vgl. H. BOHR, loc. cit. (Fussnote S. 3) S. 72—73. Wir geben übrigens im folgenden einen zum Teil neuen Beweis dieses Satzes.

[2] In dem Fall der ersten Mitteilung sind diese Sätze unmittelbare Folgerungen aus den beiden Hauptsätzen; in dem hier betrachteten Fall sind einige, jedoch recht naheliegende Überlegungen nötig um die betreffenden Sätze ableiten zu können. In keinem der beiden Fälle lassen sich aber aus den Sätzen über $\zeta(s)$ selbst, die Sätze über $\log \zeta(s)$ folgern.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L^*(T)}{2\,T} = \iint\limits_R F^*(z)\,du\,dv.$$

Analogon des zweiten Hauptsatzes. Sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2$ und sei a im Falle $\sigma_1 > 1$ ein Wert, der von $\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ angenommen wird, im Falle $\sigma_1 \leqq 1$ eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl. Ferner bezeichne $N_a^*(T)$ die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von $\zeta(s)$ in dem Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$. Dann konvergiert für $T \to \infty$ der Quotient $\frac{N_a^*(T)}{2\,T}$ gegen eine endliche, positive Zahl.

Dieser letzte Satz wird natürlich durch den BOHR-LANDAUschen Satz ergänzt, wonach, wenn $a=0$ ist, der Quotient $\frac{N_a^*(T)}{2\,T}$ für $T \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Der Beweis der beiden Hauptsätze wird im wesentlichen durch den Beweisgang der ersten Mitteilung erbracht; doch erfordert in dem jetzt vorliegenden Fall die Durchführung der Betrachtungen die Heranziehung etwas schwierigerer Hilfsmittel. Im Prinzip beruht der Beweis auf einem Vergleich der Zetafunktion mit dem Abschnitt des EULERschen Produktes; in der Halbebene $\sigma > 1$ ist dieser Vergleich, wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe (2) in jeder Halbebene $\sigma > 1 + \varepsilon$, ohne weiteres möglich; in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ beruht er darauf, dass auch in jeder Halbebene $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$ die Reihe (2) in einem gewissen, nur sehr abgeschwächten Sinn gleichmässig gegen $\log \zeta(s)$ konvergiert. Bezeichnen wir für irgend ein N mit $F_N(s)$ die, sogar in der Halbebene $\sigma > 0$, reguläre Funktion

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-s}\right),$$

mit $R_N(s)$ die durch die Relation

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-s}\right) + R_N(s) = F_N(s) + R_N(s)$$

definierte, im Gebiete G reguläre Funktion, so gilt der folgende Satz, der eine in σ gleichmässige Konvergenz im Mittel von $F_N(s)$ gegen $\log \zeta(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$ ausdrückt.

Satz A. *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ *und* d *und* δ *positive Zahlen; ferner sei für jeden Wert von* t_0, $-\infty < t_0 < +\infty$, *mit* $H(d, t_0)$ *der Halbstreifen* $\sigma > \alpha_0$, $t_0 - \frac{d}{2} < t < t_0 + \frac{d}{2}$ *bezeichnet. Wird dann für jeden Wert von* N *mit* $\varphi_N(t_0)$ *diejenige in* $-\infty < t_0 < +\infty$ *stückweise konstante Funktion bezeichnet, die gleich* 0 *ist, sobald* $H(d, t_0)$ *in* G *gelegen ist und in* $H(d, t_0)$ *die Ungleichung*

$$|R_N(s)| < \delta$$

stattfindet, und die sonst gleich 1 *ist, so strebt für* $N \to \infty$ *die Grösse*

$$\Phi_N = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_N(t_0)\, dt_0$$

gegen Null.

Allgemein gesprochen: Für hinreichend grosse Werte von N besteht die Ungleichung $|R_N(s)| < \delta$ in allen Halbstreifen $H(d, t_0)$ ausser in einer Menge, deren relatives Mass Φ_N beliebig klein ist.

In einer unwesentlich spezielleren Form ist dieser Satz von Bohr bewiesen worden[1]; eine einfache Folgerung davon genügt um den Beweis des ersten Hauptsatzes zu führen; für den Beweis des zweiten Hauptsatzes werden ausserdem die folgenden Sätze nötig.

Satz B. *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ *und* d *eine positive Zahl. Wird dann für irgend eine positive Zahl* K *mit* $\psi_K(t_0)$ *diejenige in* $-\infty < t_0 < +\infty$ *stückweise konstante Funktion bezeichnet, die gleich* 0 *ist, sobald der Halbstreifen* $H(d, t_0)$ *in* G *gelegen ist und in* $H(d, t_0)$ *die Ungleichung*

$$|\log \zeta(s)| < K$$

[1] H. Bohr, loc. cit. (Fussnote S. 3) S. 82. Der Satz ist hier nur für den speziellen Fall $d = 1$ bewiesen und mit Beschränkung auf die Halbebene $t > 0$. Wir wiederholen den Beweis unter den allgemeineren Annahmen schon deshalb nicht, weil aus dem angegebenen Spezialfall der allgemeinere Satz unmittelbar folgt.

stattfindet, und die sonst gleich 1 *ist, so strebt für* $K \to \infty$ *die Grösse*

$$\Psi_K = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi_K(t_0)\, dt_0$$

gegen Null, und zwar jedenfalls so stark wie e^{-K}, *d. h. es bleibt für* $K \to \infty$ *die Grösse* $e^K \Psi_K$ *beschränkt.*

Allgemein gesprochen: Es besteht für grosse Werte von K die Ungleichung $|\log \zeta(s)| < K$ in allen Halbstreifen $H(d, t_0)$ ausser in einer Menge, deren relatives Mass Ψ_K höchstens von der Grössenordnung e^{-K} ist.

Satz C. *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ *und* d *und* η *positive Zahlen; ferner sei* a *eine gegebene komplexe Zahl, und es sei für jeden Wert von* t_0 *mit* $n_a^N(d, t_0)$ *die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von* $F_N(s)$ *in dem Halbstreifen* $H(d, t_0)$ *bezeichnet, mit* $n_a(d, t_0)$ *die Anzahl der (ebenfalls in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von* $\log \zeta(s)$ *in demjenigen Teil von* $H(d, t_0)$, *der dem Gebiete* G *angehört. Dann gibt es hierzu eine positive Zahl* $\theta = \theta(\alpha_0, d, \eta, a)$ *so, dass folgendes stattfindet: Bedeutet* $\chi(t_0)$ *irgend eine in* $-\infty < t_0 < +\infty$ *stückweise konstante Funktion, die nur die Werte* 0 *und* 1 *annimmt und für die*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi(t_0)\, dt_0 < \theta$$

ist, so gelten für $T \to \infty$ *die folgenden Ungleichungen:*

1) *Es ist für jeden Wert von* N

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^N(d, t_0)\, \chi(t_0)\, dt_0 < \eta.$$

2) *Es ist*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(d, t_0)\, \chi(t_0)\, dt_0 < \eta.$$

Allgemein gesprochen: In jeder Menge von Halbstreifen $H(d, t_0)$, deren relatives Mass nur hinreichend klein ist, ist die Wahrscheinlichkeit, mit der irgend eine der Funktionen $F_N(s)$ bzw. $\log \zeta(s)$ den Wert a annimmt, beliebig klein, und zwar gleichmässig in N.

Mit Hilfe der Sätze A—C lassen sich die Beweise der beiden Hauptsätze in recht genauer Anlehnung an die Entwicklungen der ersten Mitteilung durchführen. Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile; in dem ersten wird der erste, in dem zweiten der zweite Hauptsatz bewiesen. Schliesslich wird in einem Anhang, durch Weiterführung des Beweises des Satzes A, der Beweis der Sätze B und C nachgeholt.

In der gegebenen Formulierung erscheinen die beiden Hauptsätze als *Existenz*sätze. Der erste behauptet, dass die Funktion $\log \zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit *in der Nähe* eines jeden Punktes kommt; der zweite behauptet, dass in einem vertikalen Streifen dieselbe Funktion jeden Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit *annimmt.* Von der *Berechnung* dieser Wahrscheinlichkeiten ist aber dabei keine Rede. Für den Fall des ersten Hauptsatzes ist nun zu bemerken, dass der Beweis dieses Satzes, wie er unten geführt wird, zugleich eine Berechnung der erwähnten Wahrscheinlichkeit gestattet. Für den Fall des zweiten Hauptsatzes ist dies aber nicht der Fall; der Beweis dieses Satzes ergibt nur die Existenz der Wahrscheinlichkeit. Es wäre aber sehr wohl möglich gewesen, auch den Beweis des zweiten Hauptsatzes so zu führen, dass er eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit gestattet. Hierauf soll in einer Schlussbemerkung, die sich auch auf die erste Mitteilung bezieht, kurz eingegangen werden. Das Ergebnis der Arbeit lässt sich danach so aussprechen: Die Untersuchung gibt zwar keinen neuen Beitrag zur Entscheidung der Riemannschen Vermutung, d. h. zu dem Problem der Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion; sie zeigt aber, dass es möglich ist unabhängig von dieser Vermutung die übrige Werteverteilung der Funktion endgültig zu beschreiben.

Erster Teil. **Das Verhalten der Zetafunktion auf einer vertikalen Geraden** $\sigma = \sigma_0 \left(\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1\right)$.

§ 1. Arithmetisch-geometrische Hilfsmittel.

Wie schon gesagt, beruht die folgende Untersuchung der Zetafunktion auf dem durch die Sätze A—C der Einleitung ermöglichten Vergleich der Funktion $\log \zeta(s)$ mit dem Abschnitt

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-s})$$

der Reihe (2). Wir betrachten eine in diesem ersten Teil fest gegebene vertikale Gerade $\sigma = \sigma_0$, $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$; auf dieser Geraden wird $F_N(s)$ als Funktion von t durch die Summe

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-(\sigma_0+it)})$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n})$$

dargestellt. Indem wir

$$-t \log p_n = 2\pi \mu_n(t)$$

setzen, können wir schreiben

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\mu_n(t)}). \tag{3}$$

Auf diese Summe wenden wir die arithmetisch-geometrische Methode der ersten Mitteilung an, indem wir gleichzeitig mit (3) die Funktion

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}) \tag{4}$$

der N Veränderlichen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ betrachten, die aus (3) entsteht, wenn man die von der einen Veränderlichen t abhängigen Grössen $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_N(t)$ durch unabhängige (reelle) Variabeln ersetzt. Es genügt offenbar, wenn wir $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ in dem N-dimensionalen Einheitswürfel $Q_N: 0 \leqq \theta_1 < 1, 0 \leqq \theta_2 < 1, \ldots, 0 \leqq \theta_N < 1$ betrachten.

Der *arithmetische Teil* der Methode besteht darin, dass man durch Heranziehung des folgenden KRONECKER-WEYLschen Satzes im Stande wird, dem zunächst nur rein formalen Zusammenhang zwischen den Funktionen $F_N(\sigma_0 + it)$ und $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ einen realen Sinn zu geben, der uns ermöglicht die Untersuchung der Werteverteilung von $F_N(\sigma_0 + it)$ durch die der Funktion $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ zu ersetzen.

Kronecker-Weylscher Satz: *Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ reelle, von einander linear unabhängige Zahlen, d. h. es bestehe keine Relation $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_N\lambda_N = 0$ mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden c_n, und es sei t ein reeller Parameter. Ferner bezeichne A die Teilmenge des N-dimensionalen Einheitswürfels $Q_N: 0 \leqq x_1 < 1, 0 \leqq x_2 < 1, \ldots, 0 \leqq x_N < 1$, die aus der Geraden*

$$x_1 = t\lambda_1,\ x_2 = t\lambda_2,\ \ldots,\ x_N = t\lambda_N, \qquad -\infty < t < +\infty$$

entsteht, wenn man die Koordinaten ihrer Punkte mod. 1 reduziert. Dann liegt diese Menge A in dem folgenden Sinn in Q_N überall gleich dicht: Es bedeute Ω eine beliebige im Jordanschen Sinne messbare Teilmenge von Q_N mit dem (N-dimensionalen) Mass $m\Omega$; ferner bedeute $G(T)$ für jeden Wert von T die Menge derjenigen Werte von t im Intervalle $-T < t < T$, für welche der entsprechende Punkt von A der Menge Ω angehört, und es bezeichne $m_i G(T)$ bzw. $m_y G(T)$ das innere bzw. äussere Jordansche Mass dieser (linearen) Punktmenge $G(T)$. Dann bestehen für $T \to \infty$ die Gleichungen

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m_i G(T)}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{m_y G(T)}{2T} = m\Omega.$$

Die Anwendung dieses Satzes in dem vorliegenden Fall beruht darauf, dass für jeden Wert von N die Zahlen $-\frac{\log p_1}{2\pi}, -\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, -\frac{\log p_N}{2\pi}$, wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl in Primfaktoren, linear unabhängig sind. Übrigens wird der Satz nur auf solche Mengen Ω verwendet, für welche bei jedem T die entsprechende Teilmenge $G(T)$ im Jordanschen Sinne messbar ist, ja sogar aus endlich vielen Intervallen besteht.

Der *geometrische Teil* der Methode besteht in einer Untersuchung der Werteverteilung der Funktion $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, wenn die Variabeln $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ unabhängig von einander die Intervalle $0 \leqq \theta_n < 1$ durchlaufen. Hierbei durchlaufen die Grössen $z_n = -\log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\cdot 2\pi\theta_n})$ geschlossene, konvexe Kurven, jede übrigens mit zwei auf einander senkrechten Symmetrieachsen; den Parameterdarstellungen entsprechen bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf diese Kurven. Die Aufgabe der Untersuchung der Werteverteilung der Funktion $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ ist hiermit in eine rein geometrische überführt, die wir in einer gemeinsamen Arbeit[1] als Addition von konvexen Kurven mit vorgegebenen Wahr-

[1] H. Bohr og B. Jessen, Om Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver. D. K. D. Vidensk. Selsk. Skrifter. 8. Række XII, 3 (1929), S. 1—82.

scheinlichkeiten bezeichnet haben. Aus dieser Arbeit zitieren wir den folgenden Satz, von dem übrigens nur der Punkt 2 im folgenden verwendet wird.

Satz I. 1) *Es bildet in der komplexen $z=u+iv$-Ebene für jeden Wert von N der Wertevorrat der Funktion $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ ein abgeschlossenes Gebiet, das für $N=1$ in eine einzige konvexe Kurve ausartet, während es für $N>1$ entweder von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve Y_N begrenzt wird, oder aber von zwei geschlossenen konvexen Kurven Y_N und I_N, von denen I_N ganz im Inneren von Y_N verläuft. Y_N verläuft ganz im Inneren von Y_{N+1}, I_{N+1} (falls sie existiert) ganz im Inneren von I_N; in allen Fällen enthält Y_N den Nullpunkt im Inneren. Das Gebiet besitzt die beiden Symmetrieachsen $v=0$ und $u=-\sum_{n=1}^{N}\log\sqrt{1-p_n^{-2\sigma_0}}$.*

2) *Bedeutet R irgend ein parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck, d. h. eine Punktmenge, die durch Ungleichungen der Form $u_1<u<u_2$, $v_1<v<v_2$ definiert ist, und bezeichnen wir mit Ω_N die Punktmenge im N-dimensionalen Einheitswürfel $Q_N(0 \leqq \theta_n < 1,\ n=1, 2, \ldots, N)$ in der der Punkt $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ dem Rechtecke R angehört; dann gilt*

a) *Die Punktmenge Ω_N ist im Jordanschen Sinne messbar; wir nennen ihr (N-dimensionales) Mass $W_N(R)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ dem Rechtecke R angehört.*

b) *Für hinreichend grosse N lässt sich $W_N(R)$ als Integral einer beschränkten, stetigen Punktfunktion $F_N(z)$ darstellen:*

$$W_N(R)=\iint_R F_N(z)\,du\,dv.$$

In Verbindung mit dem Kronecker-Weylschen Satz genügt dieser Satz um für jeden Wert von N die Werteverteilung der Funktion $F_N(\sigma_0+it)$ zu beschreiben. Für die Anwendung auf die Funktion $\log\zeta(\sigma_0+it)$ wird aber ein weiterer Satz nötig, der das Verhalten der Werteverteilung von $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ bei unbegrenzt wachsendem N beschreibt.

Satz II. 1) *Für hinreichend grosse Werte von N tritt in Satz* I, 1 *stets die erste der beiden erwähnten Möglichkeiten ein, die wonach der Wertevorrat von $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve Y_N begrenzt ist. Bezeichnen wir mit γ_N den kleinsten Abstand zwischen dem Nullpunkt und einem Punkt von Y_N, so gilt $\lim_{N\to\infty}\gamma_N=\infty$.*

2) a) *Für jedes Rechteck $R(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ konvergiert für $N \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit $W_N(R)$ gegen einen endlichen, positiven Grenzwert $W(R)$.*

b) *Die Funktion $W(R)$ lässt sich als Integral einer beschränkten, stetigen Punktfunktion $F(z)$ darstellen:*

$$W(R) = \int\int_R F(z)\,du\,dv.$$

$F(z)$ ist überall positiv, und ihr über die ganze Ebene erstreckte Integral ist gleich 1; sie ist die Grenzfunktion für $N \to \infty$ der gleichmässig konvergenten Folge von Punktfunktionen $F_N(z)$.

Im folgenden wird von diesem Satz nur der Punkt 2 benutzt.

Es sei bemerkt, dass während Satz I unabhängig von der Voraussetzung $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$ besteht, indem er allgemein für jeden Wert von $\sigma_0 > 0$ richtig ist, so ist für Satz II diese Voraussetzung sehr wesentlich. Bei dem Beweis dieses Satzes, wie er in der zitierten Arbeit geführt wurde, wurde nämlich von den folgenden beiden Tatsachen wesentlich Gebrauch gemacht: es musste für den betrachteten Wert von σ_0 von den beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-2\sigma_0}$ die erste divergent, die zweite aber konvergent sein.

§ 2. Erster Hauptsatz. Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf vertikalen Geraden.

Das Ziel des vorliegenden Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz III. *Es sei $R(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ ein Rechteck in der $z = u + iv$-Ebene, und es bezeichne $L(T)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$, in denen $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ definiert ist und in R liegt; dann gilt:*

1) *Es konvergiert mit unbegrenzt wachsendem T der Quotient $\frac{L(T)}{2T}$ gegen einen bestimmten Grenzwert; wir nennen ihn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ dem Rechtecke angehört.*

2) *Es ist dieser Grenzwert gleich der oben erklärten Zahl $W(R)$ und somit als Integral der beschränkten, stetigen, überall positiven Funktion $F(z)$ darstellbar.*

Wir nennen $F(z)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der $\log\zeta(\sigma_0+it)$ in der Nähe des Punktes z kommt.

Dieser Satz besagt etwas mehr als der erste Hauptsatz der Einleitung, indem er den Grenzwert von $\frac{L(T)}{2T}$ mit der Werteverteilung der Funktionen $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ in Zusammenhang stellt. Dass das über die ganze Ebene erstreckte Integral von $F(z)$ gleich 1 ist, ist in dem ersten Hauptsatz, wie er in der Einleitung formuliert wurde, nicht unmittelbar enthalten.

Beweis. Wir beweisen zuerst den entsprechenden Satz über die Funktionen

$$F_N(\sigma_0+it) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1-p_n^{-\sigma_0} e^{-it\log p_n}\right),$$

dass, wenn $L_N(T)$ die Länge derjenigen Teilintervalle von $-T<t<T$ bezeichnet, in denen $F_N(\sigma_0+it)$ dem Rechteck R angehört, die Limesgleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L_N(T)}{2T} = W_N(R) \tag{5}$$

besteht. Es bedeute wie oben Ω_N die Teilmenge von Q_N $(0\leqq\theta_n<1,\ n=1, 2, \ldots, N)$, in der

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1-p_n^{-\sigma_0} e^{i\cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

in R liegt; nach Satz I, 2a ist Ω_N im Jordanschen Sinne messbar, und ihr Mass ist $W_N(R)$; dass für irgend einen Wert von t der Punkt $F_N(\sigma_0+it)$ dem Rechteck angehören soll, ist nun damit gleichbedeutend, dass der aus dem Punkt

$$\left(-t\frac{\log p_1}{2\pi}, -t\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, -t\frac{\log p_N}{2\pi}\right)$$

durch Reduktion der Koordinaten mod. 1 entstehende Punkt von Q_N in Ω_N liegen soll. Da die Zahlen $-\frac{\log p_1}{2\pi}, -\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, -\frac{\log p_N}{2\pi}$ linear unabhängig sind, wird somit (5) eine direkte Folge des Kronecker-Weylschen Satzes.

Der Beweis des Satzes III geschieht nun durch den Grenzübergang $N\to\infty$. Wir bedienen uns hierbei einer einfachen Folgerung des Satzes A der Einleitung, die wir der Bequemlichkeit halber als besonderen Satz formulieren.

Satz A*. *Es seien* ε *und* δ *beliebige positive Zahlen. Dann gibt es hierzu eine Zahl* N^* *mit folgender Eigenschaft: Bezeichnen wir für irgend ein* $N \geqq N^*$ *mit* $l_N(T)$ *die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von* $-T < t < T$, *in denen* $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ *existiert und die Ungleichung*

$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - F_N(\sigma_0 + it)| \geqq \delta$$

stattfindet, so gilt für $T \to \infty$

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{l_N(T)}{2T} < \varepsilon. \tag{6}$$

Beweis. Wir wählen $\frac{1}{2} < \alpha_0 < \sigma_0$ und d beliebig; dann genügt es N^* so gross zu wählen, dass für $N \geqq N^*$ im Sinne von Satz A die Ungleichung $\Phi_N < \varepsilon$ besteht.

Mit Hilfe dieses Satzes läuft jetzt der Beweis des Satzes III folgendermassen zu Ende: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir betrachten zwei achsenparallele Rechtecke R_i und R_y, die mit R den Mittelpunkt gemeinsam haben, und von denen R_i innerhalb R liegt, während R in R_y gelegen ist; nach Satz II, 2 b können wir R_i und R_y so nahe an R wählen, dass

$$W(R) - \varepsilon < W(R_i) < W(R) < W(R_y) < W(R) + \varepsilon.$$

Wir bezeichnen mit δ den kleinsten Abstand zwischen einem Randpunkt von R und einem Randpunkt von R_i oder R_y, bestimmen danach zu den Zahlen ε und δ nach dem Satze A* eine entsprechende Zahl N^* und wählen schliesslich (Satz II, 2 a) ein $N \geqq N^*$ so gross, dass gleichzeitig

$$|W(R_i) - W_N(R_i)| < \varepsilon; \quad |W(R_y) - W_N(R_y)| < \varepsilon$$

werden. Dann ist erstens

$$W(R) - 2\varepsilon < W_N(R_i); \quad W_N(R_y) < W(R) + 2\varepsilon. \tag{7}$$

Und zweitens ist es, für jeden Wert von t für den $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ existiert und

$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - F_N(\sigma_0 + it)| < \delta$$

ist, damit $\log \zeta(\sigma_0 + it)$ in R liegt, notwendig dass $F_N(\sigma_0 + it)$ in R_y liegt, und hinreichend dass $F_N(\sigma_0 + it)$ in R_i liegt. Bezeichnen wir also mit $L_{N,i}(T)$ und $L_{N,y}(T)$ die Länge derjenigen Teilintervalle von $-T < t < T$ in denen $F_N(\sigma_0 + it)$

dem Rechteck R_i bzw. dem Rechteck R_y angehört, so gilt mit der Bezeichnung des Satzes A* für jeden Wert von T

$$L_{N,i}(T) - l_N(T) \leqq L(T) \leqq L_{N,y}(T) + l_N(T).$$

Durch Division mit $2T$ und Ausführung des Grenzüberganges $T \to \infty$ ergibt sich hieraus nach (5) und (6)

$$W_N(R_i) - \varepsilon < \varliminf_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq \varlimsup_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} < W_N(R_y) + \varepsilon$$

und somit nach (7)

$$W(R) - 3\varepsilon < \varliminf_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} \leqq \varlimsup_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} < W(R) + 3\varepsilon.$$

Da aber ε beliebig war, folgt hieraus

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = \varlimsup_{T \to \infty} \frac{L(T)}{2T} = W(R),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Zweiter Teil. **Das Verhalten der Zetafunktion in einem vertikalen Streifen** $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \left(\frac{1}{2} < \sigma_1 \leqq 1,\ \sigma_1 < \sigma_2\right)$.

§ 3. Analytische Vorbereitungen.

Für den Beweis des zweiten Hauptsatzes benötigen wir ausser den Sätzen A—C der Einleitung einige allgemeine Hilfssätze über analytische Funktionen. In der ersten Mitteilung wurden diese Sätze mit Hilfe des Montelschen Auswahlsatzes und des Rouchéschen Satzes bewiesen; es wurde aber bemerkt, dass man die Beweise auch mit Hilfe bekannter Ungleichungen wie der von Jensen sehr leicht führen könnte, und dass diese Beweismethode den Vorteil hätte Abschätzungen für die in den Hilfssätzen auftretenden Grössen N_0 und m_0 zu liefern. Für das folgende benötigen wir diese Abschätzungen, müssen deshalb die Hilfssätze von Neuem beweisen. Die Beweise werden durch Heranziehung der folgenden klassischen Sätze geführt:

Jensensche Formel. Es sei $f(z)$ eine in einem Kreise $|z| < R$ reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z, die für $z = 0$ nicht verschwindet.

Wird dann für irgend ein r, $0 < r < R$, mit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die im Kreise $|z| \leqq r$ gelegenen Nullstellen von $f(z)$ bezeichnet, so gilt

$$\log \frac{|f(0)|\, r^n}{|z_1 z_2 \ldots z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta;$$

(hierbei ist jede Nullstelle so oft mitzuzählen, wie ihre Vielfachkeit angibt).

Carathéodorysche Ungleichung. Es sei $f(z)$ eine in einem Kreise $|z| < \varrho_1$ reguläre Funktion, deren reeller Teil $\Re f(z)$ in $|z| < \varrho_1$ nach oben beschränkt ist, etwa mit der oberen Grenze M. Dann gilt in jedem kleineren Kreis $|z| \leqq \varrho < \varrho_1$ die Ungleichung

$$\Re f(z) \geqq \frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho_1 - \varrho} \Re f(0) - \frac{2\varrho}{\varrho_1 - \varrho} M.$$

Wir fangen mit dem folgenden Hilfssatz an.

Hilfssatz 1. *Es sei $z = u + iv$ eine komplexe Veränderliche, $0 < \varrho < 1$ und k eine positive Zahl. Dann gibt es hierzu zwei reelle Zahlen $b = b(\varrho, k) > 0$ und $c = c(\varrho, k)$, so dass folgendes stattfindet: Bedeutet $f(z)$ irgend eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, für die $|f(0)| \geqq k$ ist, so besteht für die Anzahl N der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) Nullstellen von $f(z)$ in $|z| \leqq \varrho$ die Abschätzung*

$$N \leqq b \log \iint_{|z|<1} |f(z)|\, du\, dv + c. \tag{8}$$

Beweis. Aus der Jensenschen Formel folgt, dass für $\varrho < r < 1$ die Ungleichung besteht

$$N \log \frac{r}{\varrho} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta - \log k.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit r und Integration von ϱ bis 1, wenn mit $B > 0$ und C reelle Grössen bezeichnet werden, die nur von ϱ und k abhängen, eine Ungleichung

$$N \leqq B \iint_{\varrho < |z| < 1} \log |f(z)|\, du\, dv + C,$$

d. h. aber, wegen der bekannten Ungleichung[1]

$$\frac{1}{\pi(1-\varrho^2)}\iint\limits_{\varrho<|z|<1} \log |f(z)|\,du\,dv \leqq \log \frac{1}{\pi(1-\varrho^2)}\iint\limits_{\varrho<|z|<1} |f(z)|\,du\,dv,$$

eine Ungleichung

$$N \leqq b \log \iint\limits_{\varrho<|z|<1} |f(z)|\,du\,dv + c$$

mit nur von ϱ und k abhängigem $b > 0$ und c. Umsomehr gilt dann für diese Werte $b > 0$ und c die Ungleichung (8).

Corollar. *Ist die Funktion $f(z)$ in $|z| < 1$ numerisch $\leqq K$, so gilt für N die Abschätzung*

$$N \leqq b \log \pi K + c.$$

Nunmehr können wir den folgenden Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 2. *Es haben ϱ und k dieselbe Bedeutung wie oben; ferner sei r eine feste positive Zahl. Dann gibt es hierzu zwei positive Konstanten $p = p(\varrho, k, r)$ und $q = q(\varrho, k, r)$ mit folgender Eigenschaft: Ist K eine beliebige positive Zahl, so gilt für jede in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, für die $|f(0)| \geqq k$ ist, und die in $|z| < 1$ numerisch $\leqq K$ ist, in jedem Punkt z von $|z| \leqq \varrho$, welcher von allen Nullstellen von $f(z)$ in $|z| < 1$ eine Entfernung $\geqq r$ besitzt, die Ungleichung*

$$|f(z)| \geqq \frac{q}{K^p}.$$

Beweis. Es bezeichne ϱ_1 die feste Zahl $\varrho_1 = \frac{\varrho + 1}{2}$ zwischen ϱ und 1; ferner seien mit $z_1, z_2, \ldots, z_{N_1}$ die in $|z| < \varrho_1$ gelegenen Nullstellen von $f(z)$ bezeichnet, jede in ihrer Vielfachkeit gezählt; nach dem Corollar zu Hilfssatz 1 ist

$$N_1 \leqq b_1 \log \pi K + c_1, \tag{9}$$

wo b_1 und c_1 die Zahlen $b(\varrho_1, k)$ und $c(\varrho_1, k)$ bedeuten. Die Funktion

[1] Siehe für einen einfachen Beweis z. B. F. RIESZ, Sur les valeurs moyennes des fonctions. Journ. London Math. Soc. Vol. 5 (1930). S. 120—121 oder G. HOHEISEL, Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, 1930, S. 72—82, S. 78. (Vgl. B. JESSEN, Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels. Acta litt. ac scient. Szeged. Bd. 5 (1931). S. 108—116).

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{N_1})}$$

ist in $|z| < \varrho_1$ von Null verschieden. Ferner ist $|f_1(0)| \geqq \frac{k}{\varrho_1^{N_1}}$ und es gilt nach einer üblichen Schlussweise in $|z| < 1$ (also umsomehr in $|z| < \varrho_1$) die Ungleichung $|f_1(z)| \leqq \frac{K}{(1-\varrho_1)^{N_1}}$. Hieraus ergibt sich, durch Anwendung der CARATHÉODORY-schen Ungleichung auf einer in $|z| < \varrho_1$ regulären Zweig der Funktion $\log f_1(z)$, für $|z| \leqq \varrho$ die Ungleichung

$$\log |f_1(z)| \geqq \frac{\varrho_1+\varrho}{\varrho_1-\varrho} \log \frac{k}{\varrho_1^{N_1}} - \frac{2\varrho}{\varrho_1-\varrho} \log \frac{K}{(1-\varrho_1)^{N_1}}$$

oder

$$|f_1(z)| \geqq \left(\frac{k}{\varrho_1^{N_1}}\right)^{\frac{\varrho_1+\varrho}{\varrho_1-\varrho}} \cdot \left(\frac{(1-\varrho_1)^{N_1}}{K}\right)^{\frac{2\varrho}{\varrho_1-\varrho}}.$$

Jetzt ist aber für jeden Punkt von $|z| \leqq \varrho$, der von allen Nullstellen von $f(z)$ in $|z| < 1$ eine Entfernung $\geqq r$ besitzt

$$|f(z)| \geqq |f_1(z)|\, r^{N_1}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben zusammen für $f(z)$ eine Abschätzung der Form

$$|f(z)| \geqq \frac{Q}{K^P} r_1^{N_1}$$

mit nur von ϱ, k und r abhängigen positiven Grössen P, Q und r_1. Ist hierin $r_1 \geqq 1$, so benutze man für N_1 die Abschätzung $N_1 \geqq 0$; dann ergibt sich

$$r_1^{N_1} \geqq 1;$$

ist aber $r_1 < 1$ so benutze man für N_1 die Abschätzung (9); dann ergibt sich

$$r_1^{N_1} \geqq r_1^{b_1 \log \pi K} r_1^{c_1} = (\pi K)^{b_1 \log r_1} r_1^{c_1};$$

in beiden Fällen ergibt sich für $|f(z)|$ eine Abschätzung der gewünschten Form, mit nur von ϱ, k und r abhängigen positiven Grössen p und q.

Bisher war in diesem Paragraphen von Funktionen $f(z)$ die Rede, die im Kreise $|z| < 1$ regulär sind; durch eine Transformation gewinnen wir hieraus die folgenden unseren Anwendungen angepassten Sätze.

Hilfssatz 3. *Es sei R ein offenes Rechteck in der komplexen s-Ebene, A eine abgeschlossene Teilmenge von R und s_0 ein Punkt von R; ferner sei k eine gegebene positive Zahl. Dann gibt es hierzu zwei reelle Zahlen $b_0 = b_0(R, A, s_0, k) > 0$ und $c_0 = c_0(R, A, s_0, k)$, so dass folgendes stattfindet: Bedeutet $f(s)$ irgend eine in R reguläre Funktion, für die $|f(s_0)| \geqq k$ ist, so besteht für die Anzahl N der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) Nullstellen von $f(s)$ in A die Abschätzung*

$$N \leqq b_0 \log \iint\limits_R |f(s)|\, d\sigma\, dt + c_0. \tag{10}$$

Beweis. Es bezeichne $z = z(s)$ diejenige, bis auf einem Faktor vom Betrage 1 eindeutig bestimmte Funktion, für die $z(s_0) = 0$ ist, und die R eineindeutig und konform auf den Kreis $|z| < 1$ abbildet; $s = s(z)$ sei die inverse Funktion. Nach bekannten Sätzen ist $|z'(s)| = \left|\frac{dz}{ds}\right|$ in R beschränkt; L bezeichne ihre obere Grenze. Dann gilt

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(s(z))|\, du\, dv \leqq L^2 \iint\limits_R |f(s)|\, d\sigma\, dt.$$

Bezeichnen wir also mit $\varrho < 1$ die obere Grenze von $z(s)$ in A, so folgt durch Anwendung des Hilfssatzes 1 auf die Funktion $f(s(z))$ die Richtigkeit von (10) für $b_0 = b(\varrho, k)$, $c_0 = b(\varrho, k) \log L^2 + c(\varrho, k)$.

Corollar. *Ist die Funktion $f(s)$ in R numerisch $\leqq K$, so gilt für N die Abschätzung*

$$N \leqq N_0 = N_0(R, A, s_0, k, K) = b_0 \log mR \cdot K + c_0,$$

wobei mR den Inhalt von R bezeichnet.

Hilfssatz 4. *Es haben R, A, s_0 und k dieselbe Bedeutung wie im Hilfssatz 3; ferner sei r eine feste positive Zahl. Dann gibt es hierzu zwei positive Konstanten $p_0 = p_0(R, A, s_0, k, r)$ und $q_0 = q_0(R, A, s_0, k, r)$ mit folgender Eigenschaft: Ist K eine beliebige positive Zahl, so gilt für jede in R reguläre Funktion $f(s)$, für die $|f(s_0)| \geqq k$ ist, und die in R numerisch $\leqq K$ ist, in jedem Punkt s von A, der von allen Nullstellen von $f(s)$ in R eine Entfernung $\geqq r$ besitzt, die Ungleichung*

$$|f(s)| \geqq m_0 = m_0(R, A, s_0, k, K, r) = \frac{q_0}{K^{p_0}}.$$

Beweis. Mit den oben benutzten Bezeichnungen gibt es zur gegebenen Zahl r eine positive Zahl r_0, so dass wenn s_1 ein beliebiger Punkt von R ist und s_2 ein Punkt von A, für den $|s_2-s_1| \geqq r$ ist, der entsprechende Abstand $|z(s_2)-z(s_1)| \geqq r_0$ ist. Geben wir ϱ dieselbe Bedeutung wie oben, lässt sich hiernach im Sinne von Hilfssatz 2 $p_0=p(\varrho, k, r_0)$, $q_0=q(\varrho, k, r_0)$ wählen.

Zu den Hilfssätzen 3 und 4, welche die allgemeine Grundlage für die folgenden Entwicklungen bilden, fügen wir noch den Hilfssatz 1 der ersten Mitteilung, in einer unwesentlich verschärften Form, als

Hilfssatz 5. *Sei a eine beliebige komplexe Zahl. Dann gibt es hierzu eine Zahl $\beta_0 > 1$ so gross, dass auf der Geraden $\sigma=\beta_0$ sowohl die Funktion $|\log \zeta(s)-a|$ wie auch jede der Funktionen $|F_N(s)-a|$ eine positive untere Grenze besitzt.*

Beweis. Ist a von Null verschieden, so wähle man β_0 so gross, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1-p_n^{-\beta_0})| < |a|$$

ist; ist dagegen a gleich Null, so wähle man β_0 so gross, dass

$$\log(1+2^{-\beta_0}) - \sum_{n=2}^{\infty} |\log(1-p_n^{-\beta_0})| > 0$$

ist.

§ 4. Erste Anwendung der Hilfssätze auf die Zetafunktion.

Als eine erste Anwendung unserer Hilfssätze beweisen wir den folgenden

Satz IV. *Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 \leqq 1$, $\sigma_1 < \sigma_2$ und a eine beliebige komplexe Zahl; ferner bezeichne $N_a(T)$ die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechteck $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$, $-T<t<T$ angehört. Dann gilt*

$$0 < \varliminf_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T}, \quad \varlimsup_{T\to\infty} \frac{N_a(T)}{2T} < \infty .$$

Beweis. Es sei für jeden Wert von t_0 mit $n_a(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil von G bezeichnet, der dem Rechteck

$$R(t_0):\ \left(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ t_0 - \frac{1}{2} < t < t_0 + \frac{1}{2}\right)$$

angehört; dann ist $n_a(t_0)$ eine im Intervalle $-\infty < t_0 < +\infty$ stückweise konstante Funktion, für die $\left(\text{für } T > \frac{1}{2}\right)$

$$N_a\left(T - \frac{1}{2}\right) \leqq \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0 \leqq N_a\left(T + \frac{1}{2}\right),$$

d. h.

$$\frac{T-\frac{1}{2}}{T} \cdot \frac{N_a\left(T-\frac{1}{2}\right)}{2\left(T-\frac{1}{2}\right)} \leqq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0 \leqq \frac{T+\frac{1}{2}}{T} \cdot \frac{N\left(T+\frac{1}{2}\right)}{2\left(T+\frac{1}{2}\right)}$$

gilt. Aus diesen Ungleichungen folgt, dass für $T \to \infty$ die beiden Grössen

$$\frac{N_a(T)}{2T} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0$$

dieselben oberen und unteren Limites haben müssen. Es genügt somit um den Satz IV zu beweisen die Richtigkeit der beiden Ungleichungen

$$0 < \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0, \quad \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0 < \infty$$

nachzuweisen.

Die zweite dieser Ungleichungen ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes C, 2 der Einleitung. Es sei $\frac{1}{2} < \alpha_0 < \sigma_1$, $d > 1$ und $\eta > 0$ beliebig gewählt. Dann ist für jeden Wert von t_0 im Sinne dieses Satzes $n_a(t_0) \leqq n_a(d, t_0)$; es gibt also eine Zahl $\theta = \theta(\alpha_0, d, \eta, a)$, so dass für jede in $-\infty < t_0 < +\infty$ stückweise konstante Funktion $\chi(t_0)$, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, und für die

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \chi(t_0)\,d t_0 < \theta$$

ist, die Ungleichung

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,\chi(t_0)\,d t_0 < \eta$$

besteht. Ist P eine ganze Zahl grösser als $\frac{1}{\theta}$ folgt hieraus

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,d t_0 < P\eta;$$

es können nämlich P Funktionen $\chi(t_0)$ der betrachteten Art so angegeben werden, dass in jedem Punkt t_0 wenigstens eine dieser Funktionen gleich 1 ist.[1]

Um die erste Ungleichung zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall $\sigma_1 < 1$. In diesem Fall ergibt sich die Ungleichung als eine Folgerung des Satzes B der Einleitung und des Hilfssatzes 4. Es sei wieder $\frac{1}{2} < \alpha_0 < \sigma_1$ und $d > 1$ beliebig gewählt (siehe Fig. 1); ferner sei nach dem Hilfssatz 5 ein $\beta_0 > 1$ so gross gewählt, dass auf der Geraden $\sigma = \beta_0$ die Funktion $|\log\zeta(s) - a|$ eine positive untere Grenze k besitzt, und es sei eine Zahl $\sigma_0 \leqq 1$ im Intervalle $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ fest gewählt; ferner bedeute r eine positive Zahl kleiner als die beiden Differenzen $\sigma_0 - \sigma_1$ und $\sigma_2 - \sigma_0$; es ist $\sigma_0 - \sigma_1 < \frac{1}{2}$ und demnach auch $r < \frac{1}{2}$. Nach diesen Festsetzungen bezeichne für jeden Wert von t_0, $-\infty < t_0 < +\infty$, $R(d, t_0)$ das offene Rechteck

$$R(d, t_0)\colon \left(\alpha_0 < \sigma < \beta_0 + 1,\ t_0 - \frac{d}{2} < t < t_0 + \frac{d}{2}\right),$$

$A(t_0)$ die abgeschlossene Teilmenge

$$A(t_0)\colon \left(\sigma = \sigma_0,\ t_0 - \frac{1}{2} + r \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{2} - r\right)$$

von $R(d, t_0)$.

Für jede beliebige a-Stelle $s' = \sigma' + it'$ von $\log\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ betrachten wir jetzt das entsprechende Intervall

$$I\colon (\sigma = \sigma_0,\ t' - r < t < t' + r);$$

[1] Es sei bemerkt, dass wir die obige Beweisanordnung für den BOHR-LANDAUschen Satz nur deshalb gewählt haben, weil uns der Satz C gerade zu Verfügung stand; in der Tat ist aber dieser letzte Satz als eine Vertiefung des erstgenannten zu betrachten.

es bedeute $I(t_0)$ diejenige Teilmenge von $A(t_0)$, die den Intervallen I angehört; dann gilt offenbar, wenn mit $l(t_0)$ das (lineare) Mass von $I(t_0)$ bezeichnet wird, für jeden Wert von t_0

$$l(t_0) \leqq 2\, r n_a(t_0);$$

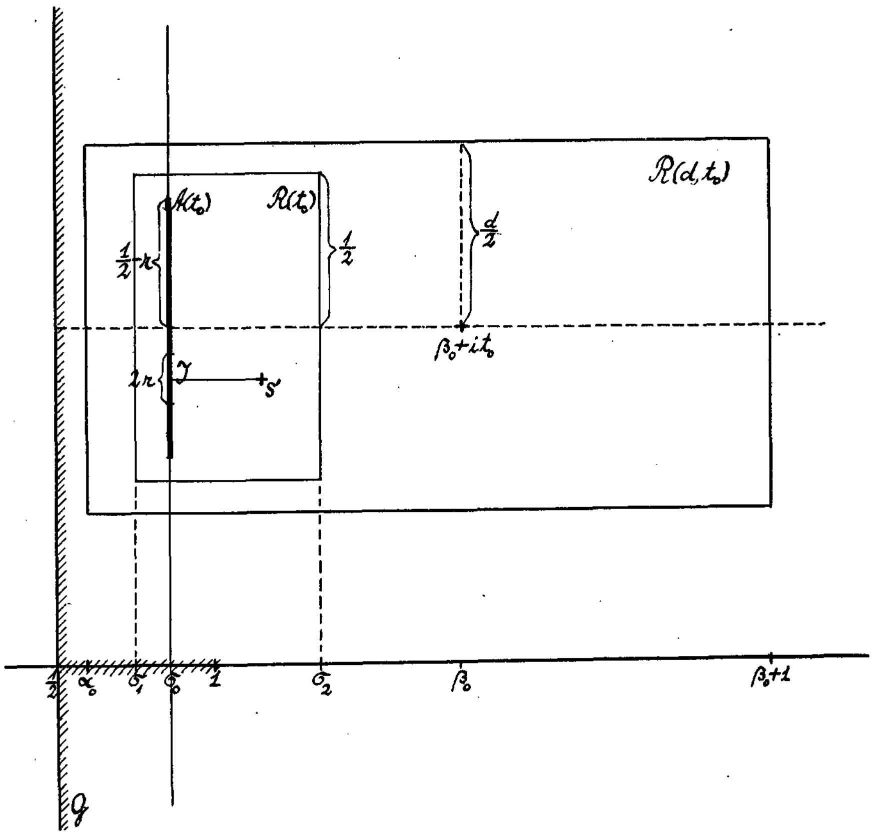

Fig. 1.

es genügt somit die Richtigkeit der Ungleichung

$$0 < \varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l(t_0)\, dt_0$$

zu beweisen.

Sei jetzt $K > 0$ beliebig gegeben und es sei mit $\psi_K(t_0)$ die in Satz B eingeführte Funktion bezeichnet. Dann gehört für jeden Wert von t_0, für den $\psi_K(t_0) = 0$ ist, nach der Definition von $\psi_K(t_0)$ das Rechteck $R(d, t_0)$ dem Gebiete G an, und es gilt in $R(d, t_0)$ die Ungleichung

$$|\log \zeta(s)| < K;$$

ferner besitzt für einen solchen Wert von t_0 jeder Punkt s von $A(t_0)$, der nicht in $I(t_0)$ gelegen ist, von allen a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in $R(d, t_0)$ eine Entfernung $\geqq r$. Durch Anwendung des Hilfssatzes 4 auf die Funktionen $\log \zeta(s + it_0) - a$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ ergibt sich somit die Existenz zweier, von K und t_0 unabhängigen, positiven Konstanten p_0 und q_0, nämlich im Sinne dieses Hilfssatzes $p_0 = p_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k, r)$ und $q_0 = q_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k, r)$, so dass in jedem solchen Punkt s

$$|\log \zeta(s) - a| \geqq m_0 = \frac{q_0}{(K + |a|)^{p_0}}$$

ist. Nunmehr bezeichnen wir mit R das im Kreise $|z - a| < m_0$ eingeschriebene achsenparallele Quadrat mit dem Inhalt

$$\text{(11)} \qquad mR = 2\, m_0^2 = \frac{2\, q_0^2}{(K + |a|)^{2 p_0}},$$

und für jeden Wert von t_0 mit $I^*(t_0)$ diejenige Teilmenge von $A(t_0)$, worin $\log \zeta(s)$ definiert ist und in R liegt. Nach dem obigen ist dann, sobald $\psi_K(t_0) = 0$ ist, die Menge $I^*(t_0)$ in $I(t_0)$ enthalten. Hiernach gilt, wenn mit $l^*(t_0)$ das Mass von $I^*(t_0)$ bezeichnet wird, für jeden Wert von t_0 die Ungleichung

$$l^*(t_0) - (1 - 2r)\, \psi_K(t_0) \leqq l(t_0);$$

denn sobald $\psi_K(t_0) = 1$ ist, ist ja diese Ungleichung trivial, weil dann die linke Seite $\leqq 0$ ist. Hieraus folgt durch Integration

$$\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\, dt_0 - (1 - 2r) \int_{-T}^{T} \psi_K(t_0)\, dt_0 \leqq \int_{-T}^{T} l(t_0)\, dt_0,$$

und, durch Division mit $2T$ und Ausführung des Grenzüberganges $T \to \infty$, die Ungleichung

$$\text{(12)} \quad \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l^*(t_0)\, dt_0 - (1 - 2r) \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi_K(t_0)\, dt_0 \leqq \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l(t_0)\, dt_0.$$

Jetzt ist aber mit der Bezeichnung des Satzes III $\left(\text{für } T > \frac{1}{2} - r\right)$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\,dt_0 \geqq (1-2r)\cdot\frac{T-\frac{1}{2}+r}{T}\cdot\frac{L\left(T-\frac{1}{2}+r\right)}{2\left(T-\frac{1}{2}+r\right)},$$

also, für $T\to\infty$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\,dt_0 \geqq (1-2r)\,W(R).^{1}$$

Es ergibt sich somit aus (12) durch Einführung der Bezeichnung des Satzes B die Ungleichung

$$(1-2r)\,(W(R)-\Psi_K) \leqq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l(t_0)\,dt_0. \tag{13}$$

Nunmehr schätzen wir $W(R)$ ab, und zwar mit Hilfe der Darstellung (vgl. Satz II, 2 b)

$$W(R)=\iint_R F(z)\,du\,dv.$$

Indem wir mit m die positive untere Grenze von $F(z)$ im Kreise $|z-a|<\dfrac{q_0}{(1+|a|)^{p_0}}$ bezeichnen, ergibt sich aus (11) sobald $K>1$

$$W(R)\geqq m\cdot\frac{2\,q_0^2}{(K+|a|)^{2p_0}}.$$

Aus (13) folgt somit die Ungleichung

$$\frac{1-2r}{K^{2p_0}}\left(m\cdot 2\,q_0^2\left(\frac{K}{K+|a|}\right)^{2p_0}-K^{2p_0}\Psi_K\right)\leqq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l(t_0)\,dt_0.$$

Nun strebt aber nach dem Satze B für $K\to\infty$ die Grösse $K^{2p_0}\Psi_K$ gegen Null;

---

[1] Übrigens ist, wie unmittelbar zu beweisen

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\,dt_0=(1-2r)\,W(R).$$

4—31356. *Acta mathematica.* 58. Imprimé le 10 décembre 1931.

die linke Seite unserer Ungleichung ist somit für einen hinreichend grossen Wert von K positiv, und der Satz ist bewiesen.

Es fehlt noch die erste Ungleichung in dem Fall $\sigma_1 = 1$ zu beweisen. In diesem Fall ergibt sie sich als unmittelbare Folgerung der Sätze II, 1 und 4, III und VII der ersten Mitteilung.

§ 5. Zweiter Hauptsatz. Wahrscheinlichkeitsverteilungen in vertikalen Streifen.

In den folgenden Paragraphen soll nun die folgende sehr wesentliche Verschärfung des Satzes IV bewiesen werden.

Satz V. *Es sei* $\frac{1}{2} < \sigma_1 \leqq 1$, $\sigma_1 < \sigma_2$ *und* a *eine beliebige komplexe Zahl; ferner bezeichne* $N_a(T)$ *die Anzahl der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Punkte von* $\log \zeta(s)$ *in demjenigen Teil des Gebietes* G, *der dem Rechteck* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-T < t < T$ *angehört; den Quotienten* $\frac{N_a(T)}{2T}$ *bezeichnen wir als die Wahrscheinlichkeit, mit der* $\log \zeta(s)$ *im betrachteten Rechteck den Wert* a *annimmt; dann gilt:*

1) *Es konvergiert für* $T \to \infty$ *der Quotient* $\frac{N_a(T)}{2T}$ *gegen einen bestimmten Grenzwert*

$$G(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{N_a(T)}{2T}; \tag{14}$$

wir nennen diesen Grenzwert die Wahrscheinlichkeit, mit der $\log \zeta(s)$ *im Streifen* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ *den Wert* a *annimmt.*

2) $G(a)$ *ist positiv für jeden Wert von* a.

3) $G(a)$ *variiert stetig mit* σ_1 *und* σ_2.

Bis auf den letzten Punkt stimmt dieser Satz mit dem zweiten Hauptsatz der Einleitung überein. Es genügt Punkt 1 zu beweisen; dann folgt Punkt 2 aus dem Satze IV und Punkt 3 im Falle $\sigma_2 \leqq 1$ aus dem zunächst zu beweisenden Hilfssatz 6, im Falle $\sigma_2 > 1$ aus dem Hilfssatz 6 und aus dem (entsprechenden) Hilfssatz 6 der ersten Mitteilung. Der Beweis des Satzes wird mit Hilfe des Kronecker-Weylschen Satzes und des ersten Hauptsatzes (Satz III) erbracht.

§ 6. Anwendung des ersten Hauptsatzes zum Beweis eines Hilfssatzes.

Hilfssatz 6. *Es sei* $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$ *und* a *eine beliebige komplexe Zahl; ferner bezeichne* $N_a^\varepsilon(T)$ *für jeden Wert von* $\varepsilon < \sigma_0 - \frac{1}{2}$ *die Anzahl der* a*-Stellen von* $\log \zeta(s)$ *in demjenigen Teil des Gebietes* G*, der dem Rechteck* $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$, $-T < t < T$ *angehört, und es sei*

$$l(\varepsilon) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{N_a^\varepsilon(T)}{2T}$$

gesetzt. Dann konvergiert für $\varepsilon \to 0$ *die Grösse* $l(\varepsilon)$ *gegen Null.*

Beweis. Es sei ein positives $\varepsilon_0 < \sigma_0 - \frac{1}{2}$ fest gewählt; es genügt offenbar, wenn wir $l(\varepsilon)$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ untersuchen. Der Beweis geschieht durch eine direkte Abschätzung, die jedoch erst durch die Heranziehung des Hauptsatzes aus dem ersten Teil ermöglicht wird.

Es bezeichne $n_a^\varepsilon(t_0)$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechteck $\sigma_0 - \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$, $t_0 - \frac{1}{2} < t < t_0 + \frac{1}{2}$ angehört. Nach einer früheren Überlegung ist

$$l(\varepsilon) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^\varepsilon(t_0)\, dt_0. \tag{15}$$

Sei jetzt $\frac{1}{2} < \alpha_0 < \sigma_0 - \varepsilon_0$, $d > 1 + 2\varepsilon_0$ und $\eta > 0$ beliebig gewählt Dann ist für jeden Wert von t_0 im Sinne von Satz C, 2 $n_a^\varepsilon(t_0) \leqq n_a(d, t_0)$; es gibt demnach eine Zahl $\theta = \theta(\alpha_0, d, \eta, a)$ so, dass für jede in $-\infty < t_0 < +\infty$ stückweise konstante Funktion $\chi(t_0)$, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, und für die

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi(t_0)\, dt_0 < \theta$$

ist, die Ungleichung

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^\varepsilon(t_0)\, \chi(t_0)\, dt_0 < \eta$$

besteht. Zu den Zahlen α_0, d und θ bestimmen wir nach dem Satze B ein festes $K > 0$ so gross, dass mit der Bezeichnung dieses Satzes

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi_K(t_0)\, dt_0 < \theta$$

ist; dann gilt also für jeden Wert von $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^\varepsilon(t_0)\, \psi_K(t_0)\, dt_0 < \eta. \tag{16}$$

Es sei jetzt (siehe Fig. 2) nach dem Hilfssatz 5 ein $\beta_0 > 1$ so gross gewählt, dass auf der Geraden $\sigma = \beta_0$ die Funktion $|\log \zeta(s) - a|$ eine positive untere Grenze k besitzt; wir bezeichnen mit $R(d, t_0)$ für jeden Wert von t_0, $-\infty < t_0 < +\infty$, das offene Rechteck

$$R(d, t_0)\colon \left(\alpha_0 < \sigma < \beta_0 + 1,\ t_0 - \frac{d}{2} < t < t_0 + \frac{d}{2}\right),$$

mit $A(t_0)$ das in $R(d, t_0)$ enthaltene abgeschlossene Rechteck

$$A(t_0)\colon \left(\sigma_0 - \varepsilon_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + \varepsilon_0,\ t_0 - \frac{1}{2} - \varepsilon_0 \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{2} + \varepsilon_0\right).$$

Für jeden Wert von t_0, für den $\psi_K(t_0) = 0$ ist, gehört nach der Definition von $\psi_K(t_0)$ das Rechteck $R(d, t_0)$ dem Gebiete G an, und es gilt in $R(d, t_0)$ die Ungleichung

$$|\log \zeta(s)| < K; \tag{17}$$

durch Anwendung des Corollars zu Hilfssatz 3 auf die Funktionen $\log \zeta(s + it_0) - a$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ ergibt sich somit die Existenz einer von ε unabhängigen Zahl N_0, nämlich im Sinne dieses Corollars

$$N_0 = N_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k, K + |a|),$$

die für jeden solchen Wert von t_0 und für jeden Wert von $\varepsilon < \varepsilon_0$ die Zahl $n_a^\varepsilon(t_0)$

übertrifft. Ferner folgt aus (17) die Existenz einer von t_0 unabhängigen Zahl K_1 so, dass sobald $\psi_K(t_0)=0$ ist, in $A(t_0)$ die Ungleichung

$$\left|\frac{d \log \zeta(s)}{ds}\right| < K_1 \tag{18}$$

stattfindet.

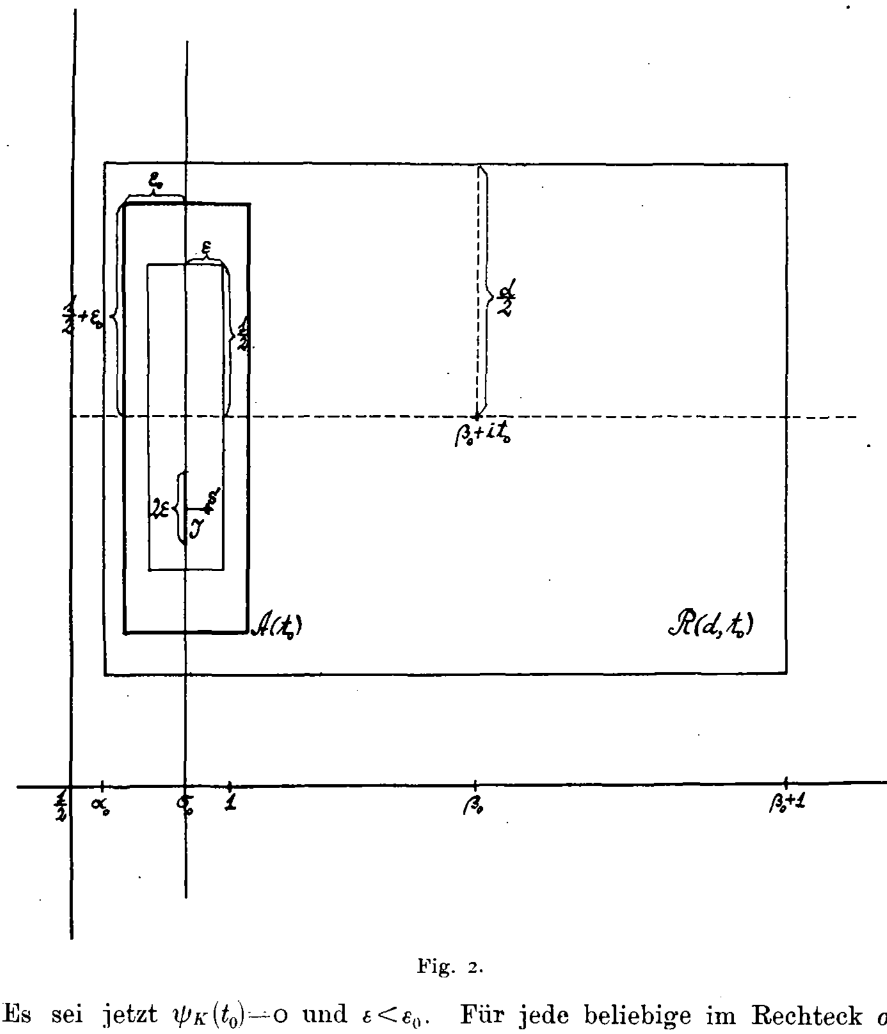

Fig. 2.

Es sei jetzt $\psi_K(t_0)=0$ und $\varepsilon<\varepsilon_0$. Für jede beliebige im Rechteck $\sigma_0-\varepsilon<\sigma<\sigma_0+\varepsilon$, $t_0-\frac{1}{2}<t<t_0+\frac{1}{2}$ gelegene a-Stelle $s'=\sigma'+it'$ von $\log\zeta(s)$ gilt nach (18) in dem entsprechenden Intervall

$$I: \ (\sigma=\sigma_0,\ t'-\varepsilon<t<t'+\varepsilon)$$

die Ungleichung

$$|\log \zeta(s) - a| < K_1 \cdot \varepsilon \sqrt{2}. \tag{19}$$

Bezeichnen wir mit R das dem Kreise $|z-a| < K_1 \varepsilon \sqrt{2}$ umgeschriebene achsenparallele Quadrat mit der Seitenlänge $2 K_1 \varepsilon \sqrt{2}$, und mit $l^*(t_0)$ für jeden Wert von t_0 die Länge derjenigen Teilintervalle des Intervalles $\sigma = \sigma_0$, $t_0 - \frac{1}{2} - \varepsilon_0 < t < t_0 + \frac{1}{2} + \varepsilon_0$ in denen $\log \zeta(s)$ definiert ist und in R liegt, so gilt also sobald $\psi_K(t_0) = 0$ ist

$$n_a^\varepsilon(t_0) \leqq \frac{N_0}{2\varepsilon} \cdot l^*(t_0);$$

denn im Falle $n_a^\varepsilon(t_0) = 0$ ist dies klar, und sonst ist $l^*(t_0) \geqq 2\varepsilon$ und die Ungleichung folgt daraus, dass $n_a^\varepsilon(t_0) \leqq N_0$ ist. Hiernach gilt für jeden Wert von t_0

$$n_a^\varepsilon(t_0) \leqq n_a^\varepsilon(t_0)\, \psi_K(t_0) + \frac{N_0}{2\varepsilon} l^*(t_0),$$

denn sobald $\psi_K(t_0) = 1$ ist, ist ja diese Ungleichung trivial. Durch Integration ergibt sich

$$\int_{-T}^{T} n_a^\varepsilon(t_0)\, dt_0 \leqq \int_{-T}^{T} n_a^\varepsilon(t_0)\, \psi_K(t_0)\, dt_0 + \frac{N_0}{2\varepsilon} \int_{-T}^{T} l^*(t_0)\, dt_0,$$

und hieraus, durch Division mit $2T$ und Ausführung des Grenzüberganges $T \to \infty$ mit Berücksichtigung von (15) und (16)

$$l(\varepsilon) < \eta + \frac{N_0}{2\varepsilon} \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l^*(t_0)\, dt_0. \tag{20}$$

Jetzt ist aber mit der Bezeichnung des Satzes III

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} l^*(t_0)\, dt_0 \leqq (1 + 2\varepsilon_0) \frac{T + \frac{1}{2} + \varepsilon_0}{T} \cdot \frac{L\left(T + \frac{1}{2} + \varepsilon_0\right)}{2\left(T + \frac{1}{2} + \varepsilon_0\right)},$$

also für $T \to \infty$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\,dt_0 \leqq (1+2\varepsilon_0)\,W(R).\text{[1]} \tag{21}$$

Aus (20) und (21) ergibt sich

$$l(\varepsilon) < \eta + \frac{N_0}{2\varepsilon}(1+2\varepsilon_0)\,W(R).$$

Nunmehr schätzen wir $W(R)$ ab, und zwar mit Hilfe der Darstellung (vgl. Satz II, 2 b)

$$W(R) = \iint_R F(z)\,du\,dv.$$

Indem wir mit M die obere Grenze von $F(z)$ bezeichnen, erhalten wir

$$W(R) \leqq M(2K_1\,\varepsilon\sqrt{2})^2 = 8\,M K_1^2\cdot\varepsilon^2$$

(wo das entscheidende ist, dass ε^2 und nicht ε^1 auftritt) also

$$l(\varepsilon) < \eta + \frac{N_0}{2\varepsilon}(1+2\varepsilon_0)\cdot 8MK_1^2\cdot\varepsilon^2 = \eta + 4N_0(1+2\varepsilon_0)\,MK_1^2\cdot\varepsilon;$$

diese Ungleichung, in welcher der Faktor $4N_0(1+2\varepsilon_0)MK_1^2$ nicht von ε abhängt, zeigt, dass für $\varepsilon\to 0$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ l(\varepsilon) < \eta$$

ist; da aber η beliebig gewählt war, folgt hieraus, dass für $\varepsilon\to 0$ die Grösse $l(\varepsilon)$ gegen Null konvergiert.

§ 7. Beweis des zweiten Hauptsatzes.

Nachdem der Hilfssatz 6 bewiesen ist, genügt es um den Beweis des Satzes V zu führen die Existenz des Grenzwertes (14) zu beweisen; indem wir mit $n_\delta(t_0)$

[1] Übrigens ist, wie unmittelbar zu beweisen

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} l^*(t_0)\,dt_0 = (1+2\varepsilon_0)\,W(R).$$

für jeden Wert von t_0 die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil des Rechtecks

$$R(t_0): \left(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ t_0 - \frac{1}{2} < t < t_0 + \frac{1}{2}\right)$$

bezeichnen, der dem Gebiete G angehört, ist nach einer früheren Überlegung diese Aufgabe damit äquivalent zu zeigen, dass für $T \to \infty$ der Grenzwert

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, dt_0$$

existiert.

Wir wählen eine für das folgende feste positive Zahl ε_0 kleiner als die beiden Zahlen $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$ und $\sigma_1 - \frac{1}{2}$; da $\sigma_1 - \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}$ ist, ist $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$; dann betrachten wir für jedes positives $\varepsilon < \varepsilon_0$ und für jeden Wert von t_0 die beiden Rechtecke

$$R_i(t_0): \left(\sigma_1 + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma_2 - \varepsilon;\ t_0 - \frac{1}{2} + \varepsilon \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$$

und

$$R_y(t_0): \left(\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \sigma_2 + \varepsilon;\ t_0 - \frac{1}{2} - \varepsilon < t < t_0 + \frac{1}{2} + \varepsilon\right).$$

Nach der Wahl von ε gehören diese Rechtecke der Halbebene $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon_0 \left(> \frac{1}{2}\right)$ an; die Differenz $R_y(t_0) - R_i(t_0)$ ist ein Gebiet, das den Rand des Rechteckes $R(t_0)$ enthält. Bezeichnen wir mit $n_a^i(t_0)$ bzw. $n_a^y(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil von $R_i(t_0)$ bzw. $R_y(t_0)$, der dem Gebiete G angehört, so ist

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a(t_0) \leqq n_a^y(t_0),$$

und es ist $n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)$ gleich der Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil von $R_y(t_0) - R_i(t_0)$, der dem Gebiete G angehört. Wir beweisen zuerst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 7. *Es konvergiert für $\varepsilon \to 0$ die Grösse*

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)\right) dt_0$$

gegen Null.

Beweis. Wir teilen für jeden Wert von t_0 die Menge $R_y(t_0)-R_i(t_0)$ in drei kleinere Mengen, nämlich in die Rechtecke

$$R_1(t_0):\left(\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\sigma_1+\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

und

$$R_2(t_0):\left(\sigma_2-\varepsilon<\sigma<\sigma_2+\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

und in die von den beiden Rechtecken

$$\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0-\frac{1}{2}+\varepsilon$$

und

$$\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon;\ t_0+\frac{1}{2}-\varepsilon<t<t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon$$

gebildete Menge $S(t_0)$. Wir bezeichnen mit $n_a^1(t_0)$, $n_a^2(t_0)$ und $n_a'(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in denjenigen Teilen dieser Mengen, die dem Gebiete G angehören. Es ist

$$n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0)=n_a^1(t_0)+n_a^2(t_0)+n_a'(t_0).$$

Ferner bezeichnen wir mit $N_a^1(T)$, $N_a^2(T)$ und $N_a'(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log\zeta(s)$ in denjenigen Teilen der Rechtecke $(\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\sigma_1+\varepsilon,\ -T<t<T)$, $(\sigma_2-\varepsilon<\sigma<\sigma_2+\varepsilon,\ -T<t<T)$ und $(\sigma_1+\varepsilon\leqq\sigma\leqq\sigma_2-\varepsilon,\ -T<t<T)$, die dem Gebiete G angehören. Dann gilt

$$\frac{1}{1+2\varepsilon}\int_{-T}^{T}n_a^1(t_0)\,dt_0\leqq N_a^1\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\leqq N_a^1(T+1)$$

$$\frac{1}{1+2\varepsilon}\int_{-T}^{T}n_a^2(t_0)\,dt_0\leqq N_a^2\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\leqq N_a^2(T+1)$$

$$\frac{1}{4\varepsilon}\int_{-T}^{T}n_a'(t_0)\,dt_0\leqq N_a'\left(T+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\leqq N_a(T+1).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0))\,dt_0 \leqq (1+2\varepsilon)\left\{\frac{N_a^1(T+1)}{2T}+\frac{N_a^2(T+1)}{2T}\right\}+4\varepsilon\frac{N_a(T+1)}{2T}$$

und für $T\to\infty$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(n_a^y(t_0)-n_a^i(t_0))\,dt_0 \leqq (1+2\varepsilon)\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{N_a^1(T)}{2T}+\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{N_a^2(T)}{2T}\right\}+4\varepsilon\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{N_a(T)}{2T}.$$

Hiermit ist aber der Hilfssatz bewiesen; denn für $\varepsilon\to 0$ konvergiert die Grösse rechts gegen Null (Im Falle $\sigma_2\leqq 1$: Hilfssatz 6; im Falle $\sigma_2>1$: Hilfssatz 6 und Hilfssatz 6 der ersten Mitteilung).

Wir gehen nunmehr zu dem zweiten der erwähnten Hilfssätze über, der den eigentlichen Kern des Beweises des zweiten Hauptsatzes ausmacht.

Hilfssatz 8. *Für jeden festen Wert von $\varepsilon<\varepsilon_0$ und für jeden Wert von $\eta>0$ ist es möglich eine stückweise konstante Funktion $n_a^*(t_0)$ anzugeben, für die der Grenzwert*

$$G^*(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n_a^*(t_0)\,dt_0$$

existiert, und für die ausserdem die folgende Bedingung erfüllt ist: Bezeichnet man mit $\chi(t_0)$ diejenige in $-\infty<t_0<+\infty$ stückweise konstante Funktion, die gleich 0 ist sobald

$$n_a^i(t_0)\leqq n_a^*(t_0)\leqq n_a^y(t_0)$$

ist, und sonst gleich 1 ist, so gelten für $T\to\infty$ die Ungleichungen

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n_a^*(t_0)\,\chi(t_0)\,dt_0<\eta \tag{22}$$

und

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n_a(t_0)\,\chi(t_0)\,dt_0<\eta. \tag{23}$$

Beweis. Es sei $\frac{1}{2} < \alpha_0 < \sigma_1 - \varepsilon_0$ und $d > 1 + 2\varepsilon_0$ fest gewählt (siehe Fig. 3); ferner sei nach dem Hilfssatz 5 ein $\beta_0 > 1$ so gross gewählt, dass auf der Geraden $\sigma = \beta_0$ sowohl die Funktion $|\log \zeta(s) - a|$ wie auch jede der Funktionen $|F_N(s) - a|$

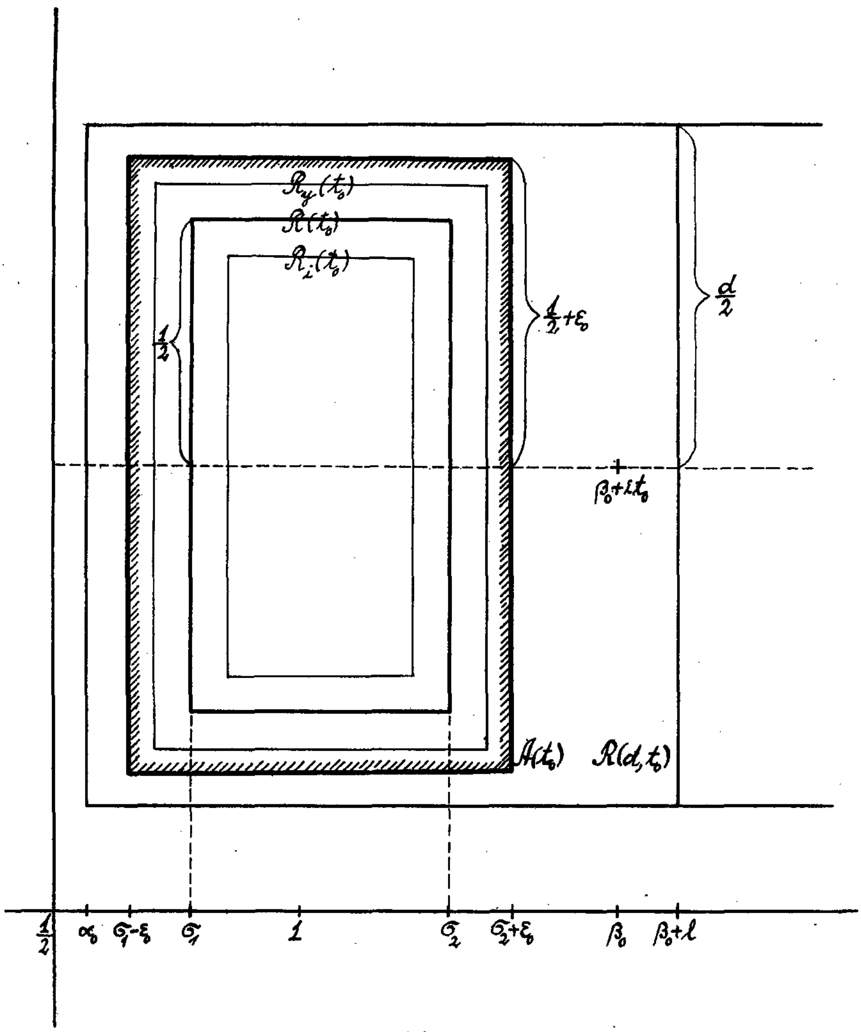

Fig. 3.

eine positive untere Grenze besitzt, und es sei $l > 0$ so gross gewählt, dass $\beta_0 + l > \sigma_2 + \varepsilon_0$ wird; endlich sei für jeden Wert von t_0 mit $R(d, t_0)$ das Rechteck

$$R(d, t_0) : \left(\alpha_0 < \sigma < \beta_0 + l,\ \ t_0 - \frac{d}{2} < t < t_0 + \frac{d}{2}\right),$$

mit $A(t_0)$ die abgeschlossene Teilmenge

$$A(t_0):\left(\sigma_1-\varepsilon_0\leqq\sigma\leqq\sigma_2+\varepsilon_0,\ t_0-\frac{1}{2}-\varepsilon_0\leqq t\leqq t_0+\frac{1}{2}+\varepsilon_0\right)$$

von $R(d, t_0)$ bezeichnet. Für jeden Wert von t_0 enthält $A(t_0)$ das Rechteck $R_y(t_0)$. Nach dem Satze C der Einleitung gibt es nun zu den Zahlen α_0, d, η und a eine positive Zahl $\theta=\theta(\alpha_0, d, \eta, a)$, so dass mit der Bezeichnung dieses Satzes, für jede in $-\infty<t_0<+\infty$ stückweise konstante Funktion $\chi(t_0)$, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, und für die

$$(24)\qquad \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\chi(t_0)\,dt_0<\theta,$$

erstens für jeden Wert von N die Ungleichung

$$(25)\qquad \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n_a^N(d, t_0)\,\chi(t_0)\,dt_0<\eta$$

und zweitens die Ungleichung

$$(26)\qquad \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n_a(d, t_0)\,\chi(t_0)\,dt_0<\eta$$

stattfindet. Hiernach wird für die zu definierende Funktion $n_a^*(t_0)$ die beiden Ungleichungen (22) und (23) gewiss erfüllt sein, wenn wir nur dafür Sorge tragen $n_a^*(t_0)$ so zu definieren, dass erstens für irgend einen festen Wert von N für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $n_a^*(t_0)\leqq n_a^N(d, t_0)$ stattfindet, und zweitens für die (im Sinne des zu beweisenden Hilfssatzes) zugehörige Funktion $\chi(t_0)$ die Ungleichung (24) erfüllt ist; denn nach der Wahl von α_0 und d besteht für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $n_a(t_0)\leqq n_a(d, t_0)$; die Ungleichungen (22) und (23) werden somit in dem angegebenen Fall unmittelbare Folgerungen der Ungleichungen (25) und (26).

Nunmehr können wir an die Definition der Funktion $n_a^*(t_0)$ herangehen; für jeden Wert von t_0 soll eine geeignete Funktion $f_{t_0}^*(s)$ bestimmt werden; $n_a^*(t_0)$ soll dann die Anzahl der a-Stellen von $f_{t_0}^*(s)$ in dem Rechteck $R(t_0)$ sein.

Wir bestimmen zunächst nach dem Satze B der Einleitung eine positive Zahl K so gross, dass mit der Bezeichnung dieses Satzes

$$(27)\qquad \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\psi_K(t_0)\,dt_0<\frac{\theta}{2}$$

ist. Für jeden Wert von t_0 für den $\psi_K(t_0)=0$ ist, gehört nach der Definition von $\psi_K(t_0)$ das Rechteck $R(d, t_0)$ dem Gebiete G an, und es gilt in $R(d, t_0)$ die Ungleichung

$$|\log \zeta(s)| < K;$$

es bezeichne k die positive untere Grenze von $|\log \zeta(s) - a|$ auf der Geraden $\sigma = \beta_0$; dann ergibt sich durch Anwendung des Corollars zu Hilfssatz 3 auf die Funktionen $\log \zeta(s+it_0) - a$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ die Existenz einer Zahl N_0, nämlich im Sinne dieses Corollars

$$N_0 = N_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k, K + |a|),$$

welche für jeden Wert von t_0 für den $\psi_K(t_0)=0$ ist, die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in $A(t_0)$, umsomehr also die Zahl $n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)$, übertrifft. Wir wählen eine positive Zahl $r < \frac{\varepsilon}{2N_0+1}$ und bezeichnen mit $M(t_0)$ für jeden Wert von t_0 diejenige Teilmenge von $A(t_0)$, die aus allen Punkten besteht, deren Abstand von jeder beliebigen a-Stelle von $\log \zeta(s)$ in $R(d, t_0)$ grösser als oder gleich r ist; dann ist es offenbar für jeden Wert von t_0, für den $\psi_K(t_0)=0$ ist, möglich eine Zahl $\tau = \tau(t_0)$ im Intervalle $0 < \tau < \varepsilon$ so zu bestimmen, dass die Ränder der beiden Rechtecke

$$R_i'(t_0): \left(\sigma_1 + \tau < \sigma < \sigma_2 - \tau;\ t_0 - \frac{1}{2} + \tau < t < t_0 + \frac{1}{2} - \tau\right)$$

und

$$R_y'(t_0): \left(\sigma_1 - \tau < \sigma < \sigma_2 + \tau;\ t_0 - \frac{1}{2} - \tau < t < t_0 + \frac{1}{2} + \tau\right)$$

der Menge $M(t_0)$ angehören; nun ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes 4 auf die Funktionen $\log \zeta(s+it_0) - a$ in dem Rechteck $R(d, 0)$ die Existenz einer Zahl m_0, nämlich im Sinne dieses Hilfssatzes

$$m_0 = m_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k, K + |a|, r),$$

so dass für jeden solchen Wert von t_0 in der Menge $M(t_0)$ die Ungleichung

$$|\log \zeta(s) - a| \geqq m_0 \tag{28}$$

stattfindet. Insbesondere gilt also diese Ungleichung (28) für jeden Wert von t_0 für den $\psi_K(t_0)=0$ ist, auf den Rändern der beiden Rechtecke $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$.

Wir wählen jetzt eine positive Zahl $\delta < m_0$ und bestimmen nach dem Satze A der Einleitung eine Zahl N so gross, dass mit der Bezeichung dieses Satzes

(29) $$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_N(t_0)\,dt_0 < \frac{\theta}{2}$$

ist; dieses N soll späterhin, bei der Bestimmung von $n_a^*(t_0)$ das N sein, für das für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $n_a^*(t_0) \leqq n_a^N(d, t_0)$ stattfindet. Für jeden Wert von t_0, für den $\varphi_N(t_0) = 0$ ist, gehört nach der Definition von $\varphi_N(t_0)$ das Rechteck $R(d, t_0)$ dem Gebiete G an und es gilt in $R(d, t_0)$ die Ungleichung

(30) $$|R_N(s)| < \delta.$$

Nunmehr bezeichnen wir mit $\chi^*(t_0)$ diejenige in $-\infty < t_0 < +\infty$ stückweise konstante Funktion, die gleich 0 ist sobald die Funktionen $\psi_K(t_0)$ und $\varphi_N(t_0)$ beide gleich 0 sind, und sonst gleich 1 ist; es ist offenbar $\chi^*(t_0) \leqq \psi_K(t_0) + \varphi_N(t_0)$ und somit nach (27) und (29) für $\chi^*(t_0)$ die Ungleichung

(31) $$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\chi^*(t_0)\,dt_0 < \theta$$

erfüllt. Ferner gelten für jeden Wert von t_0, für den $\chi^*(t_0) = 0$ ist, auf den Rändern der Rechtecke $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$ die beiden Ungleichungen (28) und (30). Wählen wir also die Funktionen $f_{t_0}^*(s)$, durch die die Funktion $n_a^*(t_0)$ definiert werden soll, so dass für jeden solchen Wert von t_0 ausserdem auf den Rändern der Rechtecke $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$ die Ungleichung

(32) $$|f_{t_0}^*(s) - F_N(s)| < m_0 - \delta$$

stattfindet, so ergibt sich nach dem Rouchéschen Satz, dass für jeden Wert von t_0, für den $\chi^*(t_0) = 0$ ist, die beiden Funktionen $\log\zeta(s)$ und

$$f_{t_0}^*(s) = \log\zeta(s) - R_N(s) + (f_{t_0}^*(s) - F_N(s))$$

in den Rechtecken $R_i'(t_0)$ und $R_y'(t_0)$ dieselbe Anzahl von a-Stellen haben müssen. Da $n_a^*(t_0)$ die Anzahl der a-Stellen von $f_{t_0}^*(s)$ in dem Rechteck $R(t_0)$ bezeichnen soll, gilt also für jeden Wert von t_0, für den $\chi^*(t_0) = 0$ ist, vorausgesetzt nur dass die Bedingung (32) erfüllt ist, die Ungleichung

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a^*(t_0) \leqq n_a^y(t_0).$$

Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass für die zu $n_a^*(t_0)$ (im Sinne des Hilfssatzes) gehörige Funktion $\chi(t_0)$ die Ungleichung $\chi(t_0) \leqq \chi^*(t_0)$ erfüllt ist, und dass demnach wegen (31) für die Funktion $\chi(t_0)$ die Ungleichung (24) erfüllt ist.

Dies war die zweite der beiden Bedingungen, die wir oben als hinreichend für das Bestehen der Ungleichungen (22) und (23) erkannt haben; um auch die erste Bedingung zu befriedigen, die wonach für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $n_a^*(t_0) \leqq n_a^N(d, t_0)$ stattfinden sollte, müssen wir die Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ ausser (32) noch eine weitere Bedingung auferlegen. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-s})$$

und wenden auf sie dieselbe Betrachtung an, die wir oben auf $\log \zeta(s)$ angewandt haben. Wegen der Beschränktheit von $F_N(s)$ in der Halbebene $\sigma > \alpha_0$ gestaltet sich jedoch hier die Untersuchung etwas einfacher.

Wir bezeichnen mit K' die obere Grenze von $F_N(s)$ in der Halbene $\sigma > \alpha_0$; ferner bezeichnen wir mit k' die positive untere Grenze von $|F_N(s) - a|$ auf der Geraden $\sigma = \beta_0$. Dann ergibt sich, durch Anwendung des Corollars zu Hilfssatz 3 auf die Funktionen $F_N(s + i t_0) - a$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ die Existenz einer Zahl N_0', nämlich im Sinne dieses Corollars

$$N_0' = N_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k', K' + |a|),$$

welche für jeden Wert von t_0 die Anzahl der a-Stellen von $F_N(s)$ in $A(t_0)$, umsomehr also die Anzahl der a Stellen von $F_N(s)$ in $R_y(t_0) - R_i(t_0)$ übertrifft. Wir wählen eine positive Zahl $r' < \frac{\varepsilon}{2 N_0' + 1}$ und bezeichnen mit $M'(t_0)$ für jeden Wert von t_0 diejenige Teilmenge von $A(t_0)$, die aus allen Punkten besteht, deren Abstand von jeder beliebigen a-Stelle von $F_N(s)$ in $R(d, t_0)$ grösser als oder gleich r' ist; dann ist es offenbar möglich für jeden Wert von t_0 eine Zahl $\tau' = \tau'(t_0)$ im Intervalle $0 < \tau' < \varepsilon$ so zu bestimmen, dass der Rand des Rechtecks

$$R_y''(t_0): \left(\sigma_1 - \tau' < \sigma < \sigma_2 + \tau';\ t_0 - \frac{1}{2} - \tau' < t < t_0 + \frac{1}{2} + \tau'\right)$$

der Menge $M'(t_0)$ angehört. Nun ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes 4 auf die Funktionen $F_N(s + i t_0) - a$ in dem Rechteck $R(d, 0)$ die Existenz einer Zahl m_0', nämlich im Sinne dieses Hilfssatzes

$$m_0' = m_0(R(d, 0), A(0), \beta_0, k', K' + |a|, r'),$$

so dass für jeden Wert von t_0 in der Menge $M'(t_0)$ die Ungleichung

$$(33) \qquad |F_N(s) - a| \geqq m_0'$$

stattfindet; insbesondere gilt also diese Ungleichung (33) für jeden Wert von t_0 auf dem Rande des Rechtecks $R_y''(t_0)$. Hieraus folgt, dass wenn nur die Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ so gewählt werden, dass für jeden Wert von t_0 auf dem Rand des Rechtecks $R_y''(t_0)$ die Ungleichung

$$(34) \qquad |f_{t_0}^*(s) - F_N(s)| < m_0'$$

stattfindet, so besteht gewiss für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $n_a^*(t_0) \leqq n_a^N(d, t_0)$. In diesem Fall haben nämlich nach dem ROUCHÉschen Satz die beiden Funktionen $F_N(s)$ und

$$f_{t_0}^*(s) = F_N(s) + (f_{t_0}^*(s) - F_N(s))$$

in dem Rechteck $R_y''(t_0)$ dieselbe Anzahl von a-Stellen.

Es bezeichne jetzt m eine positive Zahl kleiner als die beiden Zahlen $m_0 - \delta$ und m_0'; dann sind die beiden Bedingungen (32) und (34) für die Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ gewiss erfüllt, wenn für jeden Wert von t_0 die Funktion $f_{t_0}^*(s)$ so gewählt wird, dass in der ganzen Halbene $\sigma > \alpha_0$ die Ungleichung

$$(35) \qquad |f_{t_0}^*(s) - F_N(s)| < m$$

besteht.

Dass wir die Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ so wählen können, dass diese Ungleichung erfüllt wird, und gleichzeitig die zugehörige Funktion $n_a^*(t_0)$ stückweise konstant ist und der Grenzwert $G^*(a)$ existiert, ergibt sich durch die folgenden Überlegungen, die den entsprechenden Überlegungen in der ersten Mitteilung ganz parallel verlaufen.

Es sei die natürliche Zahl P so gross gewählt, dass für beliebige reelle Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, die nur um weniger als $\frac{1}{P}$ von ganzen Zahlen abweichen, die Funktion

$$(36) \qquad f^*(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{i \cdot 2\pi \varphi_n} p_n^{-s}\right)$$

in der Halbebene $\sigma > \alpha_0$ der Ungleichung

$$|f^*(s) - F_N(s)| < m$$

genügt. Dann betrachten wir diejenige Zerlegung des Einheitswürfels $Q_N (0 \leqq \theta_n < 1)$ im Raum der Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ in P^N Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{P}$, die man erhält, wenn jedes der Intervalle $0 \leqq \theta_n < 1$ in P gleichgrosse Teile $\frac{q_n}{P} \leqq \theta_n < \frac{q_n + 1}{P}$ $(q_n = 0, 1, \ldots, P-1)$ geteilt wird. Indem wir die P^N Kombinationen $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ in irgend einer Weise in eine einfache Folge geordnet denken, können wir diese Würfel mit Q_N^q bezeichnen, wo dann der Index q die Zahlen $1, 2, \ldots, P^N$ durchläuft; den Anfangspunkt $\left(\frac{q_1}{P}, \frac{q_2}{P}, \ldots, \frac{q_N}{P}\right)$ des q^{ten} Würfels bezeichnen wir kurz mit $(\theta_1^q, \theta_2^q, \ldots, \theta_N^q)$. Für jeden Wert von t_0 betrachten wir jetzt den Punkt von Q_N, welcher aus dem Punkt $\left(t_0 \frac{\log p_1}{2\pi}, t_0 \frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, t_0 \frac{\log p_N}{2\pi}\right)$ durch Reduktion der Koordinaten mod. 1 entsteht. Gehört dieser Punkt dem Würfel Q_N^q an, sind dann die Differenzen $t_0 \frac{\log p_1}{2\pi} - \theta_1^q, t_0 \frac{\log p_2}{2\pi} - \theta_2^q, \ldots, t_0 \frac{\log p_N}{2\pi} - \theta_N^q$ alle mod. 1 kleiner als $\frac{1}{P}$ und können somit als Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ in (36) benutzt werden. Die Funktion

$$\begin{aligned} f_{t_0}^*(s) &= -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{i(t_0 \log p_n - 2\pi\theta_n^q)} p_n^{-s}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{-i \cdot 2\pi\theta_n^q} p_n^{-s+it_0}\right) \end{aligned}$$

genügt also in der Halbebene $\sigma > \alpha_0$ der Ungleichung (35). Mit der getroffenen Wahl der Funktionen $f_{t_0}^*(s)$ ist also eine Funktion $n_a^*(t_0)$ definiert, die den Bedingungen des Hilfssatzes genügt, sofern wir von $n_a^*(t_0)$ zeigen können, dass sie stückweise konstant ist, und dass der Grenzwert

$$G^*(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d\, t_0$$

existiert.

Für jeden Wert von t_0 ist die Anzahl $n_a^*(t_0)$ der a-Stellen von $f_{t_0}^*(s)$ im Rechteck $R(t_0)$ gleich der Anzahl der a-Stellen der Funktion

$$f_{t_0}^*(s+i\,t_0) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - e^{-i\cdot 2\pi\theta_n^q} p_n^{-s}\right) = f^q(s)$$

im Rechteck $R(0)$. Von solchen Funktionen $f^q(s)$ gibt es nur eine endliche Anzahl, nämlich P^N; die Anzahl $n_a^*(t_0)$ ist also stückweise konstant und nimmt in allen Teilintervallen von $-\infty < t_0 < +\infty$, in denen der Punkt $\left(t_0\frac{\log p_1}{2\pi}, t_0\frac{\log p_2}{2\pi}, \ldots, t_0\frac{\log p_N}{2\pi}\right)$ mod. 1 in Q_N^q liegt, einen nur von q abhängigen Wert n_a^q an. Bezeichnen wir also mit $l^q(T)$ die Länge derjenigen dieser Intervalle, die dem Intervall $-T < t < T$ angehören, so wird

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\,d\,t_0 = \sum_{q=1}^{P^N} n_a^q \frac{l^q(T)}{2T}. \tag{37}$$

Nun konvergiert aber für $T \to \infty$ nach dem Kronecker-Weylschen Satze jede der Grössen

$$\frac{l^q(T)}{2T}$$

gegen das Mass $\frac{1}{P^N}$ des entsprechenden Würfels Q_N^q. Es konvergiert somit die Grösse (37) gegen den Mittelwert

$$G^*(a) = \sum_{q=1}^{P^N} \frac{n_a^q}{P^N};$$

hiermit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

Mit Hilfe der Hilfssätze 7 und 8 ist nun der Beweis des Satzes V in wenigen Worten vollendet. Es sei $\eta > 0$ beliebig gegeben; wir wählen nach dem Hilfssatz 7 ein $\varepsilon = \varepsilon(\eta) < \varepsilon_0$, so dass für diesen Wert von ε

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)\right) d\,t_0 < \eta. \tag{38}$$

Zu den somit festgelegten Zahlen ε und η wählen wir dann nach dem Hilfssatz 8 eine Funktion $n_a^*(t_0)$ für die erstens der Grenzwert

$$G^*(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0 \tag{39}$$

existiert, und zweitens die beiden Ungleichungen (22) und (23) erfüllt sind. Für jeden Wert von t_0 besteht die Ungleichung

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a(t_0) \leqq n_a^y(t_0);$$

für jeden Wert von t_0, für den $\chi(t_0) = 0$ ist, besteht ausserdem die Ungleichung

$$n_a^i(t_0) \leqq n_a^*(t_0) \leqq n_a^y(t_0).$$

Hieraus folgt, dass für jeden Wert von t_0 die folgenden Ungleichungen bestehen müssen

$$n_a^*(t_0) - (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)) - n_a^*(t_0)\,\chi(t_0) \leqq n_a(t_0);$$

$$n_a(t_0) \leqq n_a^*(t_0) + (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0)) + n_a(t_0)\,\chi(t_0),$$

denn sobald $\chi(t_0) = 1$ ist, sind ja diese Ungleichungen trivial. Durch Integration ergibt sich

$$\int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0 - \int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\, d t_0 - \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\,\chi(t_0)\, d t_0 \leqq \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0;$$

$$\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 \leqq \int_{-T}^{T} n_a^*(t_0)\, d t_0 + \int_{-T}^{T} (n_a^y(t_0) - n_a^i(t_0))\, d t_0 + \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,\chi(t_0)\, d t_0$$

und hieraus, durch Division mit $2T$ und Ausführung des Grenzüberganges $T\to\infty$, durch Heranziehung von (22), (23), (38) und (39)

$$G^*(a) - 2\eta < \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0; \quad \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 < G^*(a) + 2\eta.$$

Es ist also

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 - \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a(t_0)\, d t_0 < 4\eta.$$

Diese Ungleichung, in welcher η beliebig ist, zeigt aber die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} n_a(t_0)\,dt_0,$$

und hiermit ist der Satz V bewiesen.

Anhang. Die Beziehung der Zetafunktion zum Eulerschen Produkt.

Die enge Beziehung der Zetafunktion zum Eulerschen Produkt ist in der vorliegenden Arbeit durch die Heranziehung der Sätze A—C der Einleitung ausgenutzt worden. Bisher haben wir die Sätze B und C ohne Beweis angenommen; nunmehr soll diese Lücke ausgefüllt werden. Wir knüpfen dabei an den Beweis des Satzes A an, wie er in der oben zitierten Bohrschen Arbeit geführt wurde; dieser Arbeit entnehmen wir die folgenden drei Hilfssätze, von denen der erste im wesentlichen der klassische Schneesche Mittelwertsatz ist[1]:

Hilfssatz 9. *Es sei die Dirichletsche Reihe* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ *für* $\sigma>0$ *konvergent,* $\frac{1}{2}<\sigma_1<1$ *und* $\sigma_2>1$. *Dann ist gleichmässig für* $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Aus diesem Satz folgt sofort das

Corollar. *Es ist*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|f(s)|^2\,d\sigma\,dt=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}\,d\sigma\leqq(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}.$$

Durch Anwendung der letzten Ungleichung auf die Zetafunktion ergibt sich der

[1] Vgl. H. Bohr, loc. cit. (Fussnote S. 3) S. 75—76, S. 81. Die Hilfssätze sind dort in einer zum Teil allgemeineren, zum Teil unwesentlich spezielleren Form bewiesen.

Hilfssatz 10. *Es sei* $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$, $\sigma_2 > 1$. *Dann gilt für* $T \to \infty$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ -T \leqq t \leqq -1,\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta(s)|^2 \, d\sigma\, dt < \infty .$$

Ausser diesen Hilfssätzen benötigen wir noch den allgemeinen

Hilfssatz 11. *Es sei R ein offenes Rechteck in der komplexen s-Ebene und A eine abgeschlossene Teilmenge von R. Dann gibt es hierzu eine Zahl $d_0 = d_0(R, A)$, so dass für jede in R reguläre Funktion $f(s)$ in A die Ungleichung*

$$|f(s)|^2 \leqq d_0 \iint\limits_R |f(s)|^2 \, d\sigma\, dt$$

stattfindet.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zum Beweis des Satzes B über. Allgemein gesprochen handelt es sich darum, wenn $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ ist, in der Halbebene $\sigma > \alpha_0$ eine bestimmte Abschätzung der Funktion $|\log \zeta(s)|$ zu gewinnen. Wir erreichen dies, indem wir zunächst für die Funktionen $|F_N(s)|$ eine derartige Abschätzung herleiten; aus dieser ergibt sich dann durch Heranziehung des Satzes A die gewünschte Abschätzung von $|\log \zeta(s)|$.

Für irgend einen Wert von N gilt in der Halbebene $\sigma > 0$ für die Funktion $F_N(s)$ die Darstellung

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \log(1 - p_n^{-s}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} p_n^{-ls};$$

um von dieser Darstellung aus zu einer Abschätzung von $|F_N(s)|$ zu gelangen, betrachten wir die vier Funktionen

$$(40) \qquad e^{F_N(s)}, \quad e^{iF_N(s)}, \quad e^{-F_N(s)} \quad \text{und} \quad e^{-iF_N(s)}.$$

Jede dieser Funktionen wird in der Halbebene $\sigma > 0$ durch eine gewisse Dirichletsche Reihe dargestellt, die man erhält, wenn man die Dirichletsche Reihe des Exponenten formal in die Exponentialreihe einsetzt. Dadurch muss sich für die erste der angegebenen Funktionen die Reihe

$$e^{F_N(s)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

ergeben, wobei $a_n = 0$ oder 1 ist, je nachdem n als Primfaktor eine der Zahlen $p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ enthält oder nicht. Für die übrigen Funktionen ergeben sich Reihen

$$e^{iF_N(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{n^s}, \qquad e^{-F_N(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n''}{n^s} \quad \text{und} \quad e^{-iF_N(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'''}{n^s},$$

wobei für jeden Wert von n

$$|a_n'| \leqq a_n, \quad |a_n''| \leqq a_n \quad \text{und} \quad |a_n'''| \leqq a_n;$$

dies ergibt sich sofort, wenn man bemerkt, dass sowohl in der DIRICHLETschen Reihe für $F_N(s)$ wie auch in der Exponentialreihe alle Koeffizienten nichtnegativ sind.

Es sei jetzt $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ und d eine positive Zahl. Wir wählen $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \alpha_0$ und $\sigma_2 > \beta_0$, wobei β_0 irgend eine feste Zahl > 1 bedeutet. Dann ergibt sich, durch Anwendung des Corollars zu Hilfssatz 9, wenn mit $f(s)$ irgend eine der Funktionen (40) bezeichnet wird, für $T \to \infty$ die Ungleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ -T \leqq t \leqq T}} |f(s)|^2 \, d\sigma \, dt \leqq (\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_1}}. \tag{41}$$

Wir bezeichnen nun für jeden Wert von t_0, $-\infty < t_0 < +\infty$, mit $R(d, t_0)$ das Rechteck

$$R(d, t_0) : (\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ t_0 - d < t < t_0 + d),$$

mit $A(d, t_0)$ die abgeschlossene Teilmenge

$$A\,(d, t_0) : \left(\alpha_0 \leqq \sigma \leqq \beta_0, \ t_0 - \frac{d}{2} \leqq t \leqq t_0 + \frac{d}{2}\right)$$

von $R(d, t_0)$. Dann gilt nach (41) die Ungleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \iint\limits_{R(d,t_0)} |f(s)|^2 \, d\sigma \, dt \right\} dt_0 \leqq 2\,d\,(\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_1}}.$$

Es bezeichne jetzt $L(t_0)$ für jeden Wert von t_0 die obere Grenze von $|f(s)|^2$ in der Menge $A(d, t_0)$; durch Anwendung des Hilfssatzes 11 auf die Funktionen $f(s+it_0)$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ ergibt sich für jeden Wert von t_0 die Ungleichung

$$L(t_0) \leqq d_0 \iint\limits_{R(d,t_0)} |f(s)|^2 \, d\sigma \, dt,$$

wobei $d_0 = d_0(R(d, 0), A(d, 0))$ ist. Es gilt also für $T \to \infty$ die Ungleichung

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} L(t_0)\, dt_0 \leqq d_0 \cdot 2d(\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_1}} = D,$$

wo D von N unabhängig ist. Nun gilt aber für jede komplexe Zahl z, wegen $|u+iv| \leqq \text{Max}\{\pm 2u, \pm 2v\}$, die Ungleichung

$$e^{|z|} \leqq |e^z|^2 + |e^{iz}|^2 + |e^{-z}|^2 + |e^{-iz}|^2.$$

Wenden wir diese auf $z = F_N(s)$ an, und bezeichnen wir mit $K_N(t_0)$ für jeden Wert von t_0 die obere Grenze von $|F_N(s)|$ in der Menge $A(d, t_0)$, so ergibt sich also für $T \to \infty$ die Ungleichung

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{K_N(t_0)}\, dt_0 \leqq 4D. \tag{42}$$

Es sei jetzt eine positive Konstante K_0 so gross gewählt, dass für jeden Wert von N in der Halbebene $\sigma > \beta_0$ die Ungleichung $|F_N(s)| < K_0$ stattfindet. Ferner sei für jeden positiven Wert von K mit $\psi_K^N(t_0)$ diejenige für $-\infty < t_0 < +\infty$ definierte, stückweise konstante Funktion bezeichnet, die gleich 0 ist, sobald in dem Halbstreifen $H(d, t_0): \left(\sigma > \alpha_0,\ t_0 - \frac{d}{2} < t < t_0 + \frac{d}{2}\right)$ die Ungleichung

$$|F_N(s)| < K$$

stattfindet, und sonst gleich 1 ist. Dann ist offenbar, sobald $K > K_0$ ist, für jeden Wert von t_0, für den $\psi_K^N(t_0) = 1$ ist, notwendig

$$K_N(t_0) \geqq K;$$

es gilt somit für $K > K_0$ und für jeden Wert von t_0 die Ungleichung $e^{K_N(t_0)} \geqq e^K \psi_K^N(t_0)$, und wir erhalten aus (42)

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi_K^N(t_0)\,dt_0 \leqq \frac{4D}{e^K}.$$

Nunmehr bezeichne δ irgend eine positive Zahl; dann gilt für $K > \delta$ für jeden Wert von N mit den Bezeichnungen der Sätze A und B die Ungleichung

$$\psi_K(t_0) \leqq \psi_{K-\delta}^N(t_0) + \varphi_N(t_0);$$

denn es ist nur dann die rechte Seite dieser Ungleichung gleich 0, wenn erstens der Halbstreifen $H(d, t_0)$ dem Gebiete G angehört, und zweitens in diesem Halbstreifen die beiden Ungleichungen

$$|F_N(s)| < K - \delta \quad \text{und} \quad |R_N(s)| < \delta$$

stattfinden; dann ist aber auch die linke Seite der Ungleichung gleich 0. Sobald $K > K_0 + \delta$ ist, ergibt sich demnach für jeden Wert von N die Ungleichung

$$\Psi_K \leqq \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi_{K-\delta}^N(t_0)\,dt_0 + \Phi_N \leqq \frac{4D}{e^{K-\delta}} + \Phi_N. \tag{43}$$

Nun strebt aber für $N \to \infty$ nach dem Satze A die Grösse Φ_N gegen Null; es ergibt sich somit aus (43) für jeden Wert von $K > K_0 + \delta$ die Ungleichung

$$e^K \Psi_K \leqq 4De^\delta;$$

hierin ist die rechte Seite von K unabhängig; der Satz B ist somit bewiesen.

Dem Beweis des Satzes C schicken wir die folgenden drei Hilfssätze voraus, die übrigens in den vorhergehenden schon zum Teil enthalten sind.

Hilfssatz 12. *Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$ und $\sigma_2 > 1$; dann gibt es hierzu eine Konstante $K = K(\sigma_1, \sigma_2)$, so dass für $T \to \infty$ die folgenden Ungleichungen gelten:*

1) *Es ist für jeden Wert von N*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ -T \leqq t \leqq T}} |e^{F_N(s)}|^2 \,d\sigma\,dt < K.$$

2) *Es ist*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2\,T} \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ -T \leqq t \leqq -1,\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta(s)|^2\, d\sigma\, dt < K.$$

Beweis. Die erste der angegebenen Ungleichungen ist nach der Ungleichung (41), worin $f(s)$ eine beliebige der Funktionen (40) also insbesondere die Funktion $e^{F_N(s)}$ bezeichnen konnte, gewiss erfüllt, sobald

$$K > (\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_1}}$$

gewählt wird. Die Möglichkeit K so zu wählen, dass auch die zweite Ungleichung erfüllt ist, folgt dann unmittelbar aus dem Hilfssatz 10.

Ausser diesem Hilfssatz benötigen wir den allgemeinen

Hilfssatz 13. *Es sei R ein offenes Rechteck in der komplexen s-Ebene, A eine abgeschlossene Teilmenge von R und s_0 ein Punkt von R; ferner sei z eine gegebene komplexe und k eine gegebene positive Zahl. Dann gibt es hierzu zwei reelle Zahlen $b = b(R, A, s_0, z, k) > 0$ und $c = c(R, A, s_0, z, k)$, so dass folgendes stattfindet: Bedeutet $f(s)$ irgend eine in R reguläre Funktion, für die $|f(s_0) - z| > k$ ist, so besteht für die Anzahl N der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) z-Stellen von $f(s)$ in A die Abschätzung*

$$N \leqq b \iint\limits_{R} |f(s)|\, d\sigma\, dt + c.$$

Beweis. Wir wenden den Hilfssatz 3 auf die Funktion $f(s) - z$ an, nachdem wir ihn zuerst durch Weglassung des Logarithmuszeichens in der Ungleichung (10) vergröbert haben. Dann ergibt sich sofort die gesuchte Ungleichung, etwa mit $b = b_0(R, A, s_0, k)$ und $c = b_0(R, A, s_0, k)\,|z|\, mR + c_0(R, A, s_0, k)$, wobei mR den Inhalt von R bedeutet.

Der dritte der erwähnten Hilfssätze ist eine Verschärfung des Hilfssatzes 5.

Hilfssatz 14. *Sei a eine beliebige komplexe Zahl und $z = e^a$. Dann gibt es eine positive Zahl k und eine Zahl $\beta_0 > 1$ so gross, dass erstens auf der Geraden $\sigma = \beta_0$ sowohl die Funktion $|\zeta(s) - z|$ wie auch jede der Funktionen $|e^{F_N(s)} - z|$ grösser* *als oder gleich k ist, und zweitens in der Halbebene $\sigma > \beta_0$ weder die Funktion* $\log \zeta(s)$ *noch keine der Funktionen* $F_N(s)$ *den Wert a annimmt.*

Beweis. Ist $z = e^a$ von Eins verschieden, so wähle man β_0 so gross, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\log (1 - p_n^{-\beta_0})\right| < \left|\log z\right|,$$

wo $\log z$ den Hauptwert des Logarithmus bedeutet; ist dagegen $z = e^a$ gleich Eins, so wähle man β_0 so gross, dass erstens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\log (1 - p_n^{-\beta_0})\right| < 2\pi,$$

und zweitens für $\sigma \geqq \beta_0$ die Ungleichung

$$\log (1 + 2^{-\sigma}) - \sum_{n=2}^{\infty} \left|\log (1 - p_n^{-\sigma})\right| > 0$$

stattfindet. In beiden Fällen lässt sich zu dem gewählten β_0 ein entsprechendes k leicht angeben.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zu dem Beweis des Satzes C über.

Es sei $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ und d und η positive Zahlen; ferner sei a eine gegebene komplexe Zahl, und es sei $z = e^a$ gesetzt. Wir wählen $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \alpha_0$ und $\sigma_2 > \beta_0$, wobei $\beta_0 > 1$ die in dem Hilfssatz 14 auftretende Grösse bedeutet. Dann ist offenbar, wenn mit $R(d, t_0)$ und $A(d, t_0)$ dieselben Mengen bezeichnet werden wie in dem obigen Beweis des Satzes B, für jeden Wert von t_0 und für jeden Wert von N die Anzahl $n_a^N(d, t_0)$ der (in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Stellen von $F_N(s)$ in dem Halbstreifen $H(d, t_0)$ höchstens gleich der Anzahl der a-Stellen von $F_N(s)$ in der Menge $A(d, t_0)$, umsomehr also höchstens gleich der Anzahl der z-Stellen von $e^{F_N(s)}$ in der Menge $A(d, t_0)$. Durch Anwendung des Hilfssatzes 13 auf die Funktionen $e^{F_N(s+it_0)}$ in dem festen Rechteck $R(d, 0)$ ergibt sich demnach für jeden Wert von t_0 und für jeden Wert von N die Ungleichung

$$n_a^N(d, t_0) \leqq b \int\int_{R(d, t_0)} \left|e^{F_N(s)}\right| d\sigma\, dt + c,$$

wobei $b = b(R(d, 0), A(d, 0), \beta_0, z, k)$ und $c = c(R(d, 0), A(d, 0), \beta_0, z, k)$ ist; hier bedeutet k die in dem Hilfssatz 14 auftretende Grösse. In derselben Weise ist für jeden Wert von t_0 die Anzahl $n_a(d, t_0)$ der (ebenfalls in ihrer Vielfachkeit gezählten) a-Stellen von $\log \zeta(s)$ in demjenigen Teil von $H(d, t_0)$, der dem Gebiete G angehört, höchstens gleich der Anzahl der z-Stellen von $\zeta(s)$ in der Menge $A(d, t_0)$. Es gilt also für jeden Wert von t_0, ausserhalb des Intervalles $-d < t_0 < d$, die Ungleichung

$$n_a(d, t_0) \leqq b \iint\limits_{R(d, t_0)} |\zeta(s)|\, d\sigma\, dt + c.$$

Nunmehr bedeute $\chi(t_0)$ irgend eine in $-\infty < t_0 < +\infty$ stückweise konstante Funktion, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, und es sei

$$X = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi(t_0)\, dt_0$$

gesetzt. Dann ergibt sich für jeden Wert von N für die Grösse

$$B_N = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_a^N(d, t_0)\, \chi(t_0)\, dt_0$$

die folgende Abschätzung

$$B_N \leqq b\, \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \iint\limits_{R(d, t_0)} |e^{F_N(s)}|\, d\sigma\, dt \right\} \chi(t_0)\, dt_0 + cX$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$B_N \leqq b \left[\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \iint\limits_{R(d, t_0)} |e^{F_N(s)}|\, d\sigma\, dt \right\}^2 dt_0 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot X^{\frac{1}{2}} + cX$$

und durch nochmalige Anwendung dieser Ungleichung

$$B_N \leqq b\left[2\,d(\sigma_2-\sigma_1)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\,T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\iint\limits_{R(d,\,t_0)}|e^{F_N(s)}|^2\,d\sigma\,d\,t\right\}d\,t_0\right]^{\frac{1}{2}}\cdot X^{\frac{1}{2}}+c\,X$$

$$= b\cdot 2\,d\left[(\sigma_2-\sigma_1)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\,T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|e^{F_N(s)}|^2\,d\sigma\,d\,t\right]^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}+c\,X$$

und schliesslich, durch Anwendung des Hilfsatzes 12, 1, die Abschätzung

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\,T}\int\limits_{-T}^{T}n_a^N(d,\,t_0)\,\chi(t_0)\,d\,t_0 \leqq b\cdot 2\,d\,[(\sigma_2-\sigma_1)K]^{\frac{1}{2}}\,X^{\frac{1}{2}}+c\,X.$$

In genau derselben Weise ergibt sich für die Grösse

$$B=\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\,T}\int\limits_{-T}^{T}n_a(d,\,t_0)\,\chi(t_0)\,d\,t_0$$

die Abschätzung

$$B\leqq b\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\,T}\left(\int\limits_{-T}^{-1-d}+\int\limits_{1+d}^{T}\right)\left\{\iint\limits_{R(d,\,t_0)}|\zeta(s)|\,d\sigma\,d\,t\right\}\chi(t_0)\,d\,t_0+c\,X$$

$$\leqq b\left[\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\,T}\left(\int\limits_{-T}^{-1-d}+\int\limits_{1+d}^{T}\right)\left\{\iint\limits_{R(d,\,t_0)}|\zeta(s)|\,d\sigma\,d\,t\right\}^2 d\,t_0\right]^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}+c\,X$$

$$\leqq b\left[2\,d\,(\sigma_2-\sigma_1)\,\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\,T}\left(\int\limits_{-T}^{-1-d}+\int\limits_{1+d}^{T}\right)\left\{\iint\limits_{R(d,\,t_0)}|\zeta(s)|^2\,d\sigma\,d\,t\right\}d\,t_0\right]^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}+c\,X$$

$$= b\cdot 2\,d\left[(\sigma_2-\sigma_1)\,\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\,T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq -1,\ 1\leqq t\leqq T}}|\zeta(s)|^2\,d\sigma\,d\,t\right]^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}+c\,X$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes 12, 2 die Abschätzung

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2\,T}\int\limits_{-T}^{T}n_a(d,\,t_0)\chi(t_0)\,d\,t_0\leqq b\cdot 2\,d\,[(\sigma_2-\sigma_1)\,K]^{\frac{1}{2}}\,X^{\frac{1}{2}}+c\,X.$$

Hiermit ist aber der Satz C bewiesen; denn es ist offenbar möglich eine positive Zahl θ so zu wählen, dass für $X < \theta$ die Ungleichung

$$b \cdot 2\, d\, [(\sigma_2 - \sigma_1)\, K]^{\frac{1}{2}}\, X^{\frac{1}{2}} + c\, X < \eta$$

stattfindet.

Schlussbemerkung.

Vergleicht man die Darstellung im ersten und im zweiten Teil, so zeigt sich zwischen den Beweisen der beiden Hauptsätze ein wesentlicher Unterschied. Beide beruhen auf dem Vergleich von $\log \zeta(s)$ mit dem Abschnitt $F_N(s)$ der aus dem Eulerschen Produkt durch Logarithmieren entstehenden unendlichen Reihe. In dem ersten Teil ist aber dieser Vergleich so weit geführt worden, dass zunächst ein dem ersten Hauptsatz entsprechender Satz über die Funktionen $F_N(s)$ bewiesen worden ist; aus diesem Satz ergab sich dann der erste Hauptsatz durch Ausführung des Grenzüberganges $N \to \infty$. In Gegensatz hierzu sind wir in dem zweiten Teil direkt auf die Funktion $\log \zeta(s)$ losgegangen, und nur der aufmerksame Leser wird im Beweis des zweiten Hauptsatzes zwischen den Zeilen den Beweis des entsprechenden Satzes über die Funktionen $F_N(s)$ gelesen haben. Wie in der Einleitung berührt, wäre es aber sehr wohl möglich gewesen, und dies gilt auch für die erste Mitteilung, der ganzen Behandlung der Werteverteilung von $\log \zeta(s)$ eine Behandlung der Werteverteilung der Funktionen $F_N(s)$ zugrundezulegen; die übersichtlichere Darstellung, die man dadurch erhält, hätte auch den weiteren Vorteil gehabt, eine Berechnung der in den Hauptsätzen auftretenden Wahrscheinlichkeiten zu gestatten. Wenn die vorliegende kürzere Darstellung gewählt wurde, so geschah es darum, weil uns schliesslich die Existenz der betreffenden Wahrscheinlichkeiten das wichtigste schien. Zum Schluss sollen nur noch die erwähnten Sätze über die Funktionen $F_N(s)$ zusammengestellt und ihre Bedeutung für die Werteverteilung von $\log \zeta(s)$ klargelegt werden.

Erster Hauptsatz für die Funktionen $F_N(s)$. Sei $\sigma_0 > 0$ und N eine gegebene Zahl. Für jedes parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck $R\,(u_1 < u < u_2,\ v_1 < v < v_2)$ in der $z = u + iv$-Ebene existiert dann in dem durch den ersten Hauptsatz (Satz III) festgelegten Sinn eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $W_N(R)$ dafür, dass $F_N(\sigma_0 + it)$ dem Rechtecke angehört.

Diese Wahrscheinlichkeit $W_N(R)$ ist gleich dem Mass derjenigen (im Jordanschen Sinne messbaren) Teilmenge Ω_N des N-dimensionalen Einheitswürfels $Q_N(0 \leqq \theta_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots, N)$, in der die Funktion

$$S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

dem Rechtecke R angehört.

Für hinreichend grosse Werte von N lässt sich $W_N(R)$ als Integral einer beschränkten, stetigen Punktfunktion $F_N(z)$ darstellen; diese stellt also die Wahrscheinlichkeit dar, mit der $F_N(\sigma_0 + it)$ in der Nähe des Punktes z kommt.

Die Bedeutung dieses Satzes für die Werteverteilung von $\log\zeta(s)$ liegt nun in dem folgenden

Zusatz zum ersten Hauptsatz. Für $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ ist die in dem ersten Hauptsatz auftretende Wahrscheinlichkeit $F(z)$, mit der $\log\zeta(\sigma_0 + it)$ in der Nähe des Punktes z kommt, die Grenzfunktion für $N \to \infty$ der gleichmässig konvergenten Folge von Wahrscheinlichkeiten $F_N(z)$.

Insbesondere ist also für jedes Rechteck R die Wahrscheinlichkeit $W(R)$ dafür, dass $\log\zeta(\sigma_0 + it)$ diesem Rechteck angehört, der Grenzwert für $N \to \infty$ der konvergenten Folge von Wahrscheinlichkeiten $W_N(R)$.

Zweiter Hauptsatz für die Funktionen $F_N(s)$. Sei $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ und N eine hinreichend grosse Zahl. Ist dann a ein Wert, der von $F_N(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ angenommen wird, so gibt es in dem durch den zweiten Hauptsatz (Satz V) festgelegten Sinn eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $G_N(a)$ mit der $F_N(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ den Wert a annimmt.

Diese Wahrscheinlichkeit $G_N(a)$ ist gleich dem Integral über den N-dimensionalen Einheitswürfel $Q_N(0 \leqq \theta_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots, N)$ derjenigen (im Riemannschen Sinne integrierbaren) Funktion $n_a^N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, welche die Anzahl der dem Rechteck $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ angehörigen a-Punkte der Funktion

$$F_N(s; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = -\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - p_n^{-s} e^{i \cdot 2\pi\theta_n}\right)$$

darstellt.

Die Bedeutung dieses Satzes für die Werteverteilung von $\log\zeta(s)$ liegt in dem folgenden

Zusatz zum zweiten Hauptsatz. Für $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ ist die in dem zweiten Hauptsatz auftretende Wahrscheinlichkeit $G(a)$, mit der $\log\zeta(s)$ im Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$

den Wert a annimmt, der Grenzwert für $N \to \infty$ der konvergenten Folge von Wahrscheinlichkeiten $G_N(a)$.

Durch die angegebenen Sätze ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für $\log \zeta(s)$ zuerst auf die Berechnung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Abschnitte $F_N(s)$ zurückgeführt worden. Da sich diese durch die Untersuchung der von den freien Variabeln $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ abhängigen Funktionen $S_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ bzw. $F_N(s; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ bestimmen lassen, ist somit die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für $\log \zeta(s)$ von jedem Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung losgelöst worden.