ÜBER EINEN ASYMPTOTISCHEN AUSDRUCK.

Von

OTTO HÖLDER

in Leipzig.

Es sei mit $\varrho(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primzahlen bezeichnet, aus denen die natürliche Zahl n sich aufbaut, so dass also

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{\varrho(n)}^{\alpha_{\varrho(n)}}$$

und $\varrho(1) = 0$ ist. Ich werde beweisen, dass die summatorische Funktion

$$\sum_{n \leq x} 2^{\varrho(n)} \tag{1}$$

für grosse x asymptotisch dargestellt werden kann.

Man kann die hiermit gestellte Aufgabe auch als ein Teilerproblem auffassen. Bestimmt man nämlich die *quadratfreien* Teiler der Zahl n, so kann man jede der verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{\varrho(n)}$ in einen solchen Teiler entweder einmal oder gar nicht aufnehmen, so dass sich $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{\varrho(n)}$ verschiedene quadratfreie Teiler ergeben. Unsere Aufgabe ist also analog dem von Dirichlet gelösten Teilerproblem. Bekanntlich hat Dirichlet, falls unter $t(n)$ die Anzahl *aller* Teiler der Zahl n verstanden wird, die summatorische Funktion

$$\sum_{n \leq x} t(n) = \sum_{(n)} \left[\frac{x}{n}\right] \tag{2}$$ [1]

[1] $[\xi]$ soll in bekannter Weise die grösste in ξ enthaltene ganze Zahl vorstellen, und die Summe ist soweit zu führen, bis die Glieder von selbst gleich Null werden.

durch die Formel

$$x(\log x + 2C - 1) + O(x^N) \tag{3}$$

zur Darstellung gebracht, in der C die Eulersche Konstante bedeutet. Dirichlet hat dabei gezeigt, dass $N = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann.[1] van der Corput hat die Abschätzung des Restgliedes dahin verschärft, dass man $N = M$ setzen kann, wo M eine bestimmte Konstante $< \frac{33}{100}$ bedeutet[2]; natürlich kann man also auch $N = \frac{33}{100}$ setzen.

Ich werde im folgenden statt des Problems der quadratfreien Teiler gleich das allgemeinere Problem der durch keine $k$te Potenz ($k \geqq 2$) teilbaren Teiler behandeln.

§ 1. Die durch keine $k$te Potenz teilbaren Zahlen.

Zunächst muss ich die Formel in Erinnerung bringen für die Anzahl der im Intervall $1 \cdots x$ gelegenen, durch keine $k$te Potenz teilbaren Zahlen. Es mag für diese bekannte Formel hier ein elementar arithmetischer Beweis eingefügt werden. Dieser Beweis ist allerdings für $k = 2$ bereits von Landau durchgeführt worden.[3]

Jede Zahl n kann nur auf eine einzige Weise als Produkt einer $k$ten Potenz und einer nicht durch eine $k$te Potenz teilbaren Zahl dargestellt werden. Es sei nämlich

$$n = a^k b \tag{4}$$

und b durch keine $k$te Potenz teilbar. Ist nun die Primzahl p in n genau l-mal als Teiler enthalten und ist r der Rest der Division, wenn mit k in l dividiert wird, so dass

---

[1] Werke, Bd. 2, S. 56.

[2] Math. Ann., Bd. 87, S. 39 ff.; schon vorher hatte Voronoï (Journ. f. Math., Bd. 126, S. 241 ff.) bewiesen, dass das Restglied nicht von höherer Ordnung als $x^{\frac{1}{3}} \log x$ ist.

[3] Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 2, S. 580/1 ff. Gegenbauer, der jene Formel bereits 1885 für ein allgemeines k aufgestellt hat (Denkschriften d. Wiener Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Cl., Bd. 49, I, S. 46), benutzt beim Beweis in einer auch jetzt vielfach in ähnlichen Fällen üblichen Weise den Eindeutigkeitssatz der Dirichletschen Reihen.

$$l = km + r$$

und $0 \leqq r < k$ ist, so muss a den Primfaktor p gerade m-mal und b ihn r-mal enthalten. Es bestimmen sich also die beiden Zahlen a und b aus der Zerlegung der Zahl n in Primzahlpotenzen. Zugleich erkennt man, dass eine Zahl, deren $k$te Potenz in n als Teiler enthalten ist, keine Primzahl häufiger enthalten kann, als sie in a enthalten ist, dass also a^k die grösste in n enthaltene $k$te Potenz ist.

Im folgenden soll nun $[\xi]_k$ *die Anzahl der ganzen Zahlen* $\leqq \xi$ *bedeuten, die durch keine* $k$te *Potenz* (*ausser* 1) *teilbar sind.* Denkt man sich jetzt eine ganz beliebige Zahlgrösse x und nimmt unter den ganzen Zahlen des Intervalls $1 \cdots x$ diejenigen zusammen, welche durch dieselbe $k$te Potenz a^k als grösste $k$te Potenz teilbar sind, so ist ihre Zahl gleich der Anzahl der durch keine $k$te Potenz teilbaren Zahlen b, für die $a^k b \leqq x$ ist, d. h. gleich $\left[\frac{x}{a^k}\right]_k$. Ordnet man weiter die Zahlen $1, 2, 3, \ldots [x]$ nach den grössten $k$ten Potenzen $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$, die sie als Teiler enthalten, so ergibt sich ihre Zahl gleich

$$(5) \qquad [x] = \left[\frac{x}{1^k}\right]_k + \left[\frac{x}{2^k}\right]_k + \left[\frac{x}{3^k}\right]_k + \cdots.$$

Diese Gleichung gibt durch Umkehrung[1]

$$(6) \qquad [x]_k = \sum_{(n)} \mu(n) \left[\frac{x}{n^k}\right],$$

wobei $\mu(n)$ die bekannte Möbiussche zahlentheoretische Funktion bedeutet, die für jedes n, das durch ein Quadrat teilbar ist, gleich 0 und für jedes aus ϱ einfachen Primzahlen bestehende n gleich $(-1)^\varrho$ ist.

§ 2. Die Grundformeln.

Es sollen jetzt

$$h_k', \; h_k'', \; h_k''', \ldots$$

[1] Setzt man in (5) die Potenz x^k anstelle von x ein, so kann man die ganz gewöhnliche Umkehrungsformel anwenden, und man erhält dann aus dem Ergebnis, wenn x^k wieder durch x ersetzt wird, die Gleichung (6).

die der Grösse nach geordneten, durch keine $k$te Potenz teilbaren positiven ganzen Zahlen bedeuten. Ich bilde das Schema

$$\begin{array}{c} h'_k\cdot 1,\ h'_k\cdot 2,\ h'_k\cdot 3,\ \ldots \\ h''_k\cdot 1,\ h''_k\cdot 2,\ h''_k\cdot 3,\ \ldots \\ h'''_k\cdot 1,\ h'''_k\cdot 2,\ h'''_k\cdot 3,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \tag{7}$$

in dem jedoch die horizontalen und vertikalen Reihen nur soweit fortgesetzt werden sollen, als die Bedingung

$$h_k^{(n)}\cdot m \leqq x \tag{8}$$

erfüllt ist. Die in dem Schema (7) wirklich vorkommenden Produkte lassen sich nun auf dreierlei Arten abzählen. In der $n$ten Horizontalreihe stehen die Produkte

$$h_k^{(n)}\cdot 1,\ h_k^{(n)}\cdot 2,\ h_k^{(n)}\cdot 3,\ \ldots,\ h_k^{(n)}\cdot \mathfrak{n},$$

wobei

$$\mathfrak{n} = \left[\frac{x}{h_k^{(n)}}\right] \tag{9}$$

ist; in der $m$ten Vertikalreihe stehen jedoch die Produkte

$$h'_k\cdot m,\ h''_k\cdot m,\ h'''_k\cdot m,\ \ldots,\ h_k^{(\mathfrak{m})}\cdot m,$$

und es bedeutet hier $\mathfrak{m}$ die Anzahl der Zahlen h_k, die $\leqq \frac{x}{m}$ sind, d. h. es ist

$$\mathfrak{m} = \left[\frac{x}{m}\right]_k. \tag{10}$$

Zählt man also die Produkte (7) einmal zuerst in den Horizontal- und ein anderes Mal zuerst in den Vertikalreihen, so ergeben sich aus (9) und (10) für ihre Anzahl zwei Ausdrücke

$$\sum_{(h_k)}\left[\frac{x}{h_k}\right] = \sum_{(m)}\left[\frac{x}{m}\right]_k; \tag{11}$$

in der linken Summe durchläuft h_k die durch keine $k$te Potenz teilbaren Zahlen.

Die dritte Art, die Produkte (7) abzuzählen, ergibt sich aus der Erwägung, dass eine durch $h_k^{(n)}$ teilbare Zahl a, die kleiner als x ist, in der $n$ten Horizontalreihe unseres Schemas *einmal* vorkommt. Es kommt also jede Zahl $a \leqq x$ in (7) gerade $t_k(a)$-mal vor, wenn $t_k(a)$ die Anzahl derjenigen in a enthaltenen Teiler bedeutet, die durch keine $k$te Potenz teilbar sind.[1] Die beiden Summen (11) sind also der summatorischen Funktion

$$\sum_{a \leqq x} t_k(a) \tag{12}$$

gleich.

Mit Rücksicht auf (6) ergibt sich aus (11) und (12) noch

$$\sum_{a \leqq x} t_k(a) = \sum_{(m)} \sum_{(n)} \mu(n) \left[\frac{x}{mn^k}\right]. \tag{13}$$

Wegen der Umformung dieser und ähnlicher mehrfacher Summen bedenke man, dass zu einem vorgegebenen x nur eine endliche Zahl von Indexsystemen m, n gehört, für welche die Glieder von Null verschieden sind, weshalb diese Glieder auch beliebig geordnet werden dürfen. Man kann deshalb auch von (13) zu der Formel

$$\sum_{a \leqq x} t_k(a) = \sum_{(n)} \left\{\mu(n) \sum_{(m)} \left[\frac{x}{mn^k}\right]\right\} \tag{14}$$

übergehen.

§ 3. **Abschätzungen.**

Das im Ausdruck (3) niedergelegte Ergebnis von Dirichlet, bzw. von van der Corput soll jetzt in der Form

$$\sum_{(m)} \left[\frac{x}{m}\right] = x \log x + (2C - 1)x + A\vartheta(x)x^N \tag{15}$$

benutzt werden. Man kann für jeden der hier zulässigen Exponenten N die absolute Konstante A so wählen, dass die Formel für $x \geqq 1$ mit

$$-1 \leqq \vartheta(x) \leqq +1$$

giltig ist. Um hieraus den Ausdruck (14) zu bekommen, hat man in (15) für x

[1] Geometrisch kann man das auch so ausdrücken, dass auf der Hyperbel $\xi\eta = a$ (a ganz) gerade $t_k(a)$ Punkte liegen, deren Koordinate η ganzzahlig und deren Koordinate ξ eine durch keine $k$te Potenz teilbare Zahl ist.

den Bruch $\frac{x}{n^k}$ zu setzen, mit $\mu(n)$ zu multiplizieren und über n zu summieren, wobei wir uns aber auf die Werte 1, 2, 3, ... $[\sqrt[k]{x}]$ des Index n beschränken werden, da die linke Seite von (15) gleich 0 wird, wenn man für x einen Wert, der kleiner als 1 ist, einsetzt. Es ergibt sich

$$\sum_{a \leqq x} t_k(a) = \left(\sum_{n=1}^{[\sqrt[k]{x}]} \frac{\mu(n)}{n^k}\right) x \log x - k \left(\sum_{n=1}^{[\sqrt[k]{x}]} \frac{\mu(n) \log n}{n^k}\right) x$$

$$+ (2C - 1) x \sum_{n=1}^{[\sqrt[k]{x}]} \frac{\mu(n)}{n^k} + R(x),$$

(16)
$$= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k} - \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}\right\} x \log x$$

$$+ \left\{(2C-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k} - \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}\right) - k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^k} - \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^k}\right)\right\} x$$

$$+ R(x),$$

wobei $R(x)$ aus dem Restglied von (15) entsteht, und jedenfalls

(17)
$$|R(x)| \leqq A x^N \sum_{n=1}^{[\sqrt[k]{x}]} \frac{1}{n^{kN}}$$

ist. k bedeutet hier eine ganze Zahl $\geqq 2$, weshalb auch die in (16) eingeführten unendlichen Summen konvergieren.

Zunächst will ich auf Grund der Formel (17) das letzte Restglied abschätzen. Es ist für grosse x

(18)
$$\frac{1}{A} |R(x)| < x^N + x^N \int_1^{[\sqrt[k]{x}]} \frac{du}{u^{kN}} = \begin{cases} x^N + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) & \text{für } kN < 1, \\ O(x^N \log x) & \text{für } kN = 1, \\ O(x^N) & \text{für } kN > 1. \end{cases}$$

Wenn nun der Einfachheit wegen $N = \frac{33}{100}$ gesetzt wird (s. o. bei (3)), so ergibt sich

(19)
$$R(x) = \begin{cases} O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) & \text{für } k = 2, \\ O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) & \text{für } k = 3, \\ O\left(x^{\frac{33}{100}}\right) & \text{für } k \geqq 4. \end{cases}$$

Die in Formel (16) vorkommenden, von $[\sqrt[k]{x}]+1$ bis ∞ erstreckten Summen sollen zuerst auf eine gröbere Weise, die keine besonderen Vorkenntnisse verlangt, abgeschätzt werden. Es ist für grosse x

$$(20)\qquad \left|\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n^k}\right| \leqq \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \int_{[\sqrt[k]{x}]}^{\infty} \frac{du}{u^k} = \frac{1}{k-1}\,\frac{1}{[\sqrt[k]{x}]^{k-1}}$$

$$= O\left(x^{-1+\frac{1}{k}}\right)$$

und

$$(21)\qquad \left|\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n^k}\right| \leqq \sum_{[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\log n}{n^k}$$

$$< \int_{[\sqrt[k]{x}]}^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^k} = \frac{\log[\sqrt[k]{x}] + \dfrac{1}{k-1}}{(k-1)[\sqrt[k]{x}]^{k-1}}$$

$$= O\left(x^{-1+\frac{1}{k}} \log x\right).$$

Aus den Relationen (19), (20), (21) kann man bereits erkennen, dass der aus den verschiedenen Teilen von (16) sich ergebende Gesamtrest $\Re(x)$ der unten stehenden Schlussformel (27) für $k=2$, $k=3$, $k\geqq 4$ höchstens von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}\log x$, bez. $x^{\frac{1}{3}}\log x$, bez. $x^{\frac{33}{100}}$ sein kann.

Um nun anstelle der Relationen (20) und (21) genauere Abschätzungen zu setzen, führe ich die summatorische Funktion

$$\sum_{n\leqq x}\mu(n) = M(x)$$

ein. Landau hat bewiesen, dass

$$(22)\qquad M(x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^q}\right),$$

wo für q eine beliebige Zahlgrösse gesetzt werden darf.[1]

---

[1] Vgl. Landau, a. a. O., S. 594, wo zugleich noch eine schärfere Abschätzung gegeben wird.

Es ergibt sich jetzt

$$\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k} = \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^k}. \tag{23}$$

Da $k \geqq 2$ ist, lässt sich die rechte Seite infolge der Relation (22) in zwei konvergente Summen auseinandernehmen, wodurch man dann wieder

$$\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} M(n) \left(\frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k}\right) - \frac{M(\sqrt[k]{x})}{([\sqrt[k]{x}]+1)^k} \tag{24}$$

erhält. Der erste Teil des letzten Ausdrucks gibt, wenn man für $M(n)$ die Relation (22) und für die in Klammer gesetzte Differenz ihre Entwicklung bedenkt, als grösstmögliche Ordnung

$$O\left(\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \left(\frac{n}{(\log n)^q} \cdot \frac{k}{n^{k+1}}\right)\right) = O\left(\int_{[\sqrt[k]{x}]}^{\infty} \frac{du}{u^k (\log u)^q}\right).$$

Bedenkt man noch, dass

$$\frac{d}{du} \frac{1}{u^{k-1} (\log u)^q} = -\frac{k-1}{u^k (\log u)^q} (1 + \varepsilon_u)$$

ist, wo ε_u eine mit $u \rightarrow \infty$ verschwindende Grösse bedeutet, so findet man für das letzte Integral die Ordnung von

$$\frac{1}{[\sqrt[k]{x}]^{k-1} (\log [\sqrt[k]{x}])^q} = O\left(\frac{x^{-1+\frac{1}{k}}}{(\log x)^q}\right).$$

Da ausserdem die Ordnung des zweiten Gliedes von (24) nicht grösser ist, ergibt sich aus (23), dass auch

$$\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k} = O\left(\frac{x^{-1+\frac{1}{k}}}{(\log x)^q}\right) \tag{25}$$

ist.

Durch dieselbe Art der Rechnung findet man

$$\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n^k} = \sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty} M(n)\left(\frac{\log n}{n^k} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^k}\right) - \frac{M(\sqrt[k]{x})\log([\sqrt[k]{x}]+1)}{([\sqrt[k]{x}]+1)^k}$$

$$(26) \qquad = O\left(\sum_{n=[\sqrt[k]{x}]+1}^{\infty}\left(\frac{n}{(\log n)^q}\cdot\frac{k\log n}{n^{k+1}}\right)\right) - \frac{M(\sqrt[k]{x})\log([\sqrt[k]{x}]+1)}{([\sqrt[k]{x}]+1)^k}$$

$$= O\left(\frac{x^{-1+\frac{1}{k}}}{(\log x)^{q-1}}\right).$$

Da für q eine beliebig grosse positive Zahl gesetzt werden kann, unterscheiden sich die für die beiden Summen (25) und (26) gewonnenen Ergebnisse nicht wesentlich von einander.

Aus (16), (19), (25) und (26) setzt sich nun die Schlussformel

$$(27) \qquad \sum_{a \leqq x} t_k(a) = \frac{x\log x}{\zeta(k)} + \frac{(2C-1)\zeta(k) - k\zeta'(k)}{(\zeta(k))^2}x + \Re(x)$$

zusammen, wobei

$$\Re(x) = \begin{cases} O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) & \text{für } k = 2, \\ O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) & \text{für } k = 3, \\ O\left(x^{\frac{33}{100}}\right) & \text{für } k \geqq 4. \end{cases}$$

Die in der Einleitung erwähnte Summe (1) bestimmt sich mit $k = 2$ bis auf Grössen der Ordnung $\sqrt{x}$.

Wenn wir die Doppelsumme, um die es sich hier handelt, in der Summationsordnung von (13) auf Grund eines, leicht zu findenden asymptotischen Ausdrucks der Grösse (6)

$$[x]_k = \sum_{(n)} \mu(n)\left[\frac{x}{n^k}\right]$$

gebildet hätten, so würde sich nur das erste Glied der Formel (27) ergeben haben.

13—3298. *Acta mathematica.* 59. Imprimé le 3 mai 1932.