ROBERT HJALMAR MELLIN.

Am 5. April 1933 ist in Helsingfors Professor Hjalmar Mellin im Alter von 78 Jahren gestorben. Er war lange Jahre Mitarbeiter und seit 1908 auch Redaktionsmitglied dieser Zeitschrift.

Mellin wurde im Kirchspiel Tyrnävä in der Nähe von Uleåborg am 19. Juni 1854 geboren. Nach dem Besuch des Lyzeums in Tavastehus wurde er 1875 Student, bestand 1880 das Examen für Kandidaten der Philosophie und wurde 1882 Doktor der Philosophie. In den Jahren 1881/82 studierte er an der Universität Berlin, im Frühjahrssemester 1884 an Stockholms Högskola. In diesem Jahre wurde er auch zum älteren Lehrer der Mathematik am Polytechnischen Institut in Helsingfors ernannt; als dieses 1908 in eine Technische Hochschule umgewandelt wurde, erhielt er eine Professur, die er bis zum Herbst 1926 innehatte, wo er in Ruhestand trat.

Während seiner Studienzeit im Heimatlande wurde Mellin von Mittag-Leffler, damals Professor an der Universität Helsingfors, in die Funktionentheorie eingeführt, vornehmlich in die Weierstrassschen Geistes. In Berlin konnte er Weierstrass selbst hören; offenbar fasste er dabei den Gedanken zu seiner Doktorarbeit (1881), in der er sich die Aufgabe stellte, eine Darstellung der Haupteigenschaften der algebraischen Funktionen auf rein Weierstrassscher Grundlage zu geben.

Mellin wandte sich dann zu Untersuchungen über die Gammafunktion, die sich wie ein roter Faden durch sein ganzes mathematisches Schaffen zieht. Im Anschluss an Arbeiten von Prym und Scheeffer stellte er gewisse neue Klassen transzendenter Funktionen auf, deren Eigenschaften mit denen der Gammafunktion eng zusammenhängen, und widmete ihnen eingehende Untersuchungen. In diesem Arbeiten bewegte er sich noch ganz im Rahmen der Weierstrassschen Funktionentheorie und benutzte als wichtigstes Hilfsmittel den Mittag-Lefflerschen Satz.

Doch schon bei diesen Untersuchungen wurde seine Aufmerksamkeit auf den nahen Zusammenhang zwischen linearen Differential- und Differenzengleichungen gelenkt. Diese Frage vollständig zu erörtern, war das Ziel einer langen Reihe der folgenden Arbeiten Mellins. Dabei beeinflussten ihn zwei Arbeiten S. Pincherles aus den Jahren 1886 und 1888, und es scheint, dass er unter diesem Einfluss zur Einsicht kam, die wirksamsten Hilfsmittel für seine Untersuchungen seien in der Cauchyschen Funktionentheorie zu finden. Dies zeigt sich in überzeugender Weise aus der umfassenden und grundlegenden Abhandlung »Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen».

Als Hauptresultat dieser Untersuchungen ergab sich, dass jede hypergeometrische Differentialgleichung mithilfe der Gammafunktion vollständig integriert werden kann; die allgemeine Lösung der Gleichung wird durch ein Integral der Form

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L F(z)\,x^{-z}\,dz$$

dargestellt, wo $F(z)$ eine aus Γ-Produkten bzw. Γ-Quotienten gebildete Summe bedeutet und wo der Integrationsweg L passend zu wählen ist. Dieses Ergebnis liess sich auch auf gewisse lineare Systeme gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen erweitern.

Etwas später kam Mellin auf ein anderes allgemeines und in formaler Hinsicht besonders elegantes Ergebnis. Im Anschluss an eine frühere Arbeit von W. Heymann untersuchte er die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung, und fand, dass die Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung, sowie ihre Potenzen, mittels eines über Gammafunktionen erstreckten mehrfachen Integrals dargestellt werden können, in dem die Koeffizienten der Gleichung in Potenzform als Parameter eingehen. Zugleich ergaben sich für die Wurzeln sowohl mehrfache wie auch einfache Reihenentwicklungen sehr eleganter Gestalt.

Die Dirichletschen Reihen bildeten ein andres Hauptgebiet für Mellins Forschung. Er widmete der verallgemeinerten Riemannschen Funktion $\zeta(s, w)$ eine gründliche Untersuchung und war der erste, der genauere Resultate über das asymptotische Verhalten von ihr und andren Zetareihen im kritischen Streifen erhielt. Auf Dirichletsche Reihen viel allgemeinerer Art stiess er in seinen Untersuchungen über die asymptotischen Eigenschaften unendlicher Produkte, worüber er mehrere hervorragende Arbeiten geschrieben hat. Ist $\Pi(x)$ ein sog. kanonisches Produkt vom Geschlechte p und mit den Nullstellen $-a_1, -a_2, \ldots,$ so ergibt sich eine Formel folgenden Aussehens:

$$\log \Pi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z} dz;$$

dabei bezeichnet $S(z)$ die Dirichletsche Reihe

$$S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^z}.$$

Um das Verhalten von $\Pi(x)$ im Unendlichen zu untersuchen, bedarf es einer Kenntnis des Verhaltens der Funktion $S(z)$ ausserhalb des Konvergenzgebiets der Reihe. Mellin wurde so darauf geführt, die Frage nach der analytischen Fortsetzung Dirichletscher Reihen anzugreifen und stellte in dieser Richtung viele wichtige Sätze von grosser Tragweite auf. Mit deren Hilfe erhielt er sowohl für unendliche Produkte wie auch für Dirichletsche Reihen ebenso allgemeine wie genaue asymptotische Entwicklungen. Viele davon betreffen die wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen und deren summatorische Funktionen. Diese Untersuchungen Mellins sind von andern Forschern mehrfach verwertet worden; trotzdem scheinen sie aber noch heute nicht so allgemein bekannt zu sein, wie sie es verdienen.

In methodischer Hinsicht wird Mellins reiche wissenschaftliche Produktion durch einen allgemeinen Satz zusammengehalten, durch den er zeigen konnte, unter welchen Bedingungen zwei Funktionenklassen (F) und (Φ) zueinander in dem durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\, x^{-z}\, dz, \\[2ex] F(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(x)\, x^{z-1}\, dx \end{cases}$$

angegebenen Reziprozitätsverhältnis stehen. Auf reziproke Funktionen einer etwas andren Art war schon Fourier gestossen, und Cauchy hatte zahlreiche

Anwendungen von ihnen gemacht. Auch waren einige Spezialfälle der von Mellin betrachteten reziproken Funktionen schon früher bekannt gewesen, darunter als einfachstes Beispiel Exponential- und Gammafunktion, zwischen denen die Beziehungen bestehen:

$$\begin{cases} e^{-x} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, x^{-z}\, dz, & (a > 0,\ \Re(x) > 0) \\ \Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{z-1}\, dx. & \end{cases}$$

Aber Mellin war der erste, der diese Fragen einer allgemeinen funktionentheoretischen Untersuchung unterzog und durch genaue Bedingungen die beiden reziproken Funktionenklassen abgrenzte.

Der genannte allgemeine Satz zeigt sich besonders fruchtbar in den verschiedenen Forschungsgebieten, wo Mellin sich betätigte. Vor allem wurde er unter Mellins Händen zu einem geradezu idealen Hilfsmittel für die Erforschung asymptotischer Eigenschaften von Funktionen. Er wirft auch ein klares Licht über den Zusammenhang, der statthat zwischen den primitiven Transzendenten, der Gammafunktion, der Riemannschen Zetafunktion und ihrer Verallgemeinerung $\zeta(s, w)$, sowie gewissen in der analytischen Zahlentheorie und der Theorie der Modulfunktion auftretenden höheren Transzendenten. Mellin konnte darum in der Einleitung einer seiner späteren Arbeiten mit vollem Rechte sagen: »Die Theorie der reziproken Funktionen und Integrale ist ein zentrales Gebiet, welches manche andre Gebiete der Analysis miteinander verbindet».

Mellin hat selbst in meisterhafter Weise die Hauptergebnisse seiner Untersuchungen zusammengefasst, teils in der Abhandlung »Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen», teils in einem Vortrage »Die Theorie der asymptotischen Reihen vom Standpunkte der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale», den er beim fünften Skandinavischen Mathematikerkongress in Helsingfors hielt und der in den Verhandlungen des Kongresses erschienen ist.

Verzeichnis von Professor Hjalmar Mellins mathematischen Arbeiten.

1. De algebraiska funktionerna af en oberoende variabel. 79 S. Doktorsdissertation. Helsingfors (1881).

2. Om gammafunktionen. 20 S. *Öfvers. Vet.-ak. Stockholm.* Årg. 40 (1883).
3. Ueber die transcendente Function $Q(x)=\Gamma(x)-P(x)$. 2 S. *Acta math.* Bd. 2 (1883).
4. Eine Verallgemeinerung der Gleichung $\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{\sin \pi x}$. 3 S. *Acta math.* Bd. 3 (1883).
5. Ueber gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte. 3 S. *Acta math.* Bd. 3 (1883).
6. Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen. I, 33 S. *Acta Soc. Scient. Fenn.* Bd. 14 (1884); II, 44 S. *Ibid.* Bd. 15 (1884).
7. Om ett slag af oändliga produkter, hvilka kunna bestämmas genom gammafunktionen. 7 S. *Öfvers. af Finska Vet. Soc. förh.* Bd. 26 (1884).
8. En grupp af transcendenta funktioner, hvilka besitta egenskaper liknande den, som tillkommer det reciproka värdet af den oändliga produkten $\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n x)$. 17 S. *Öfvers. Vet.-ak. Stockholm.* Årg. 41 (1884).
9. Zur Theorie der Gammafunction. 44 S. *Acta math.* Bd. 8 (1886).
10. Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. 30 S. *Acta math.* Bd. 9 (1886).
11. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. 68 S. *Acta math.* Bd. 15 (1891).
12. Om definita integraler, hvilka för obegränsadt växande värden af vissa heltaliga parametrar hafva till gränser hypergeometriska funktioner af särskilda ordningar. 39 S. *Acta Soc. Scient. Fenn.* Bd. 20 (1893).
13. Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen. 115 S. *Ibid.* Bd. 20 (1895).
14. Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. 57 S. *Ibid.* Bd. 21 (1896).
15. Zur Theorie zweier allgemeiner Klassen bestimmter Integrale. 75 S. *Ibid.* Bd. 22 (1896).
16. Über hypergeometrische Reihen höherer Ordnungen. 10 S. *Ibid.* Bd. 23 (1897).
17. Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function $\zeta(s)$. 50 S. *Ibid.* Bd. 24 (1898).
18. Über die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale. 22 S. *Acta math.* Bd. 22 (1898).
19. Über die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale. 14 S. *Acta math.* Bd. 22 (1898).

20. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. 26 S. *Acta math.* Bd. 25 (1901).
21. Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Functionen von endlichem Geschlecht. 50 S. *Acta Soc. Scient. Fenn.* Bd. 29 (1900). Eine verkürzte Darstellung derselben Arbeit in *Acta math.* Bd. 25 (1901).
22. Die Dirichletschen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht. 48 S. *Acta Soc. Scient. Fenn.* Bd. 31 (1902). Eine kürzere Darstellung derselben Arbeit in *Acta math.* Bd. 28 (1903).
23. Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen. 54 S. *Annales Ac. Scient. Fenn.* Ser. A. Bd. 1 (1909). Dasselbe etwas verkürzt in *Math. Annalen.* Bd. 68 (1910).
24. Zur Theorie der trinomischen Gleichungen. 32 S. *Annales Ac. Scient. Fenn.* Ser. A. Bd. 7 (1915).
25. Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen. 44 S. *Ibid.* Bd. 7 (1915).
26. Über die Nullstellen der Zetafunktion. 18 S. *Ibid.* Bd. 10 (1917).
27. Ein Satz über Dirichletsche Reihen. 16 S. *Ibid.* Bd. 11 (1917).
28. Bemerkungen im Anschluss an den Beweis eines Satzes von Hardy über die Zetafunktion. 17 S. *Ibid.* Bd. 11 (1917).
29. Über die Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Formen. 8 S. *Ibid.* Bd. 16 (1920).
30. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. 3 S. *C. R. Acad. Sciences, Paris.* Bd. 172 (1921).
31. Die Theorie der asymptotischen Reihen vom Standpunkte der Theorie der Reziproken Funktionen und Integrale. 108 S. *Annales Ac. Scient. Fenn.* Ser. A. Bd. 18 (1922).
32. Abriss einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der asymptotischen Reihen. 17 S. *5. Skand. math.-kongr., Helsingfors* (1922).
33. Anwendung einer allgemeinen Methode zur Herleitung asymptotischer Formeln. 44 S. *Annal. Ac. Scient. Fenn.* Ser. A. Bd. 20 (1923).
34. Über die analytische Fortsetzung von Funktionen, welche durch gewisse allgemeine Dirichletsche Reihen definiert sind. 60 S. *Ibid.* Bd. 20 (1923).

Hierzu kommen noch zehn Arbeiten, in denen Mellin vor allem der Relativitätstheorie auf rein logischem Wege widerlegen will. Sie wurden 1925—1933 in den Bänden 24, 26, 28, 30, 34 und 37 von Ser. A der *Annales Academiae Scientiarum Fennicae* veröffentlicht.

Ernst Lindelöf.