DIE ORDNUNGSZAHLEN LINEARER DIFFERENZEN-GLEICHUNGSSYSTEME.

Von

TA LI.

Research Fellow of China Foundation for the Promotion of Education and Culture.

Einleitung.

In dieser Arbeit wollen wir Differenzengleichungssysteme der Form

$$(1) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

betrachten, wobei t die positiven ganzen Zahlen, $0, 1, 2, 3, \ldots$ durchläuft, während für die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ und die Integrale $x_\nu(t)$ beliebige komplexe Werte zugelassen sind; die $f_{\nu\mu}(t)$ seien ausserdem beschränkt. Die Existenz und Eindeutigkeit eines Integrals $x_\nu(t)$ mit willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerten $x_\nu(0)$ ist dann für $t = 0, 1, \ldots$ gesichert.[1]

[1] Man kann nämlich auf unendlich viele Weise eine Matrix $P(t)$ angeben, deren Elemente und die Elemente ihrer Reziproken lauter beschränkte Funktionen von t sind, so dass die Elemente von

$$P(t+1) F(t) P^{-1}(t) = G(t)$$

$g_{\lambda\mu}(t)$ für $\mu \leqq \lambda$ beschränkt und $g_{\lambda\mu}(t)$ für $\mu > \lambda$ Null sind. (vgl. Ta Li: Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen, Dissertation, München 1933). Durch die Transformation $(x_1, \ldots, x_n) = P^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$ wird das System (1) überführt in

$$(1') \qquad y_\nu(t+1) = g_{\nu\nu}(t) y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \qquad \text{mit } \sum_1^0 = 0,$$

dessen Integral leicht anzugeben ist.

Für die Grössenordnung eines Integrals bei unbegrenzt wachsendem t gibt der obere Limes

$$(2) \qquad \gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|}$$

einen Massstab. Offenbar ist auch:

$$(3) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|} = \gamma.$$

Falls die Koeffizienten konstant sind, also $f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$, so ist γ gleich dem absoluten Betrag einer Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \quad \ldots a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Daher darf γ nur n Werte annehmen. Dasselbe gilt in dem allgemeinen Fall, wo die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$ existieren; die charakteristische Gleichung ist dabei wie oben.[1]

In der Tat haben die Resultate gar nichts mit der speziellen Form der Koeffizienten zu tun. Vielmehr auch im allgemeinsten Fall sind nie mehr als n Werte möglich, und wenn man ihnen passende Multiplizitäten beilegt, sind es genau n. Wir nennen sie die Ordnungszahlen des Differenzengleichungssystems und wollen einige ihrer Eigenschaften untersuchen.

§ 1.

Definition der Ordnungszahlen.

Wegen der Beschränktheit von $f_{\nu\mu}(t)$, ist $|f_{\nu\mu}(t)| \leqq c$. Aus dem gegebenen Differenzengleichungssystem folgt, wenn man beiderseits den absoluten Betrag nimmt,

[1] O. Perron: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen. Journal f. d. reine u. angewandte Math. Bd. 161, 1929, Berlin.

$$|x_\nu(t+1)| \leqq c\sum_{\mu=1}^{n}|x_\mu(t)|,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t+1)| \leqq cn\sum_{\mu=1}^{n}|x_\mu(t)|.$$

Wendet man die letze Formel der Reihenfolge nach für $t = 0, 1, 2, \ldots, t-1$ an, so ergibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)| \leqq cn\sum_{\mu=1}^{n}|x_\nu(t-1)| \leqq \cdots \leqq (cn)^t\sum_{\mu=1}^{n}|x_\mu(0)| \leqq (cn)^t K,$$

wobei K eine positive Konstante ist. Anderseits ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)| \geqq 0.$$

Hieraus erkennt man sofort, dass

$$0 \leqq \underline{\lim}_{t\to\infty}\sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)|} \leqq \overline{\lim}_{t\to\infty}\sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)|} \leqq cn. \tag{4}$$

Somit ist für jede Lösung γ eine endliche positive Zahl. Wir behaupten dass für γ höchstens n verschiedene Werte möglich sind. Zum Beweis machen wir die Annahme des Gegenteils, es seien mehr als n verschiedene Werte möglich. Nun greifen wir aus diesen $n+1$ heraus, die wir der Grösse nach ordnen:

$$0 \leqq \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \cdots < \gamma_{n+1}. \tag{5}$$

Sei etwa $x_\nu(t) = x_{\nu\lambda}(t)$ eine Lösung, für welche $\gamma = \gamma_\lambda$, also

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n}|x_{\nu\lambda}(t)|} = \gamma_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{6}$$

ist. Zwischen den $n+1$ Lösungen $x_{\nu 1}(t), x_{\nu 2}(t), \ldots, x_{\nu, n+1}(t)$ muss dann eine lineare Abhängigkeit

$$C_1 x_{\nu 1}(t) + C_2 x_{\nu 2}(t) + \cdots + C_{n+1} x_{\nu, n+1}(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Sei C_{p+1} das letzte von Null verschiedene C_λ, wobei natürlich $p + 1 > 1$ ist, dann dürfen wir $C_{p+1} = -1$ annehmen und erhalten:

$$(7) \qquad x_{\nu, p+1}(t) = \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda x_{\nu\lambda}(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun folgt, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, aus (6) und (5) für $\lambda \leqq p$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu\lambda}(t)| < (\gamma_\lambda + \varepsilon)^t \leqq (\gamma_p + \varepsilon)^t$$

für alle hinreichend grossen t. Mit Rücksicht hierauf schliesst man aus (7)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu, p+1}(t)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{p} |C_\lambda| (\gamma_p + \varepsilon)^t$$

für alle hinreichend grossen t, und daher

$$\gamma_{p+1} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu, p+1}(t)|} \leqq \gamma_p + \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein sein darf, folgt hieraus $\gamma_{p+1} \leqq \gamma_p$. Wegen dieses Widerspruchs mit (5) war unsere Annahme falsch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nunmehr seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die von einander verschiedenen möglichen Werte für γ; wir nennen sie die Ordnungszahlen des Differenzengleichungssystems und ordnen sie der Grösse nach

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m.$$

Nach dem Bewiesenen ist $m \leqq n$. Von einem Integral $x_\nu(t)$, für welches

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|} = \gamma_\lambda$$

ist, sagen wir, es gehöre zur Ordnungszahl γ_λ, oder auch, γ_λ sei die Ordnungszahl des Integrals $x_\nu(t)$.

Die Ordnungszahl eines Integrals, welches aus endlich vielen Integralen, deren Ordnungszahlen $\leqq \gamma_\lambda$ sind, zusammengesetzt ist, ist offenbar wieder $\leqq \gamma_\lambda$;

was aus Formel (7) leicht abzulesen ist. Hiernach können wir die folgenden bedeutungsvollen Begriffsbildungen einführen.

Es sei e_1 die Anzahl der linear unabhängigen Integrale derart, dass für sie und ihre linearen Zusammensetzungen die Ordnungszahl γ_1 ist; dann schreiben wir der Ordnungszahl γ_1 die Vielfachheit e_1 zu. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale, für welche die Ordnungszahl und diejenige ihrer Zusammensetzungen entweder gleich γ_1 oder gleich γ_2 ist, ist augenscheinlich grösser, etwa $e_1 + e_2$; dann schreiben wir der Ordnungszahl γ_2 die Vielfachheit e_2 zu. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale, für welche die Ordnungszahl und diejenige ihrer linearen Zusammensetzungen gleich γ_1 oder γ_2 oder γ_3, muss wieder grösser sein, etwa gleich $e_1 + e_2 + e_3$; dann schreiben wir der Ordnungszahl γ_3 die Vielfachheit e_3 zu. So fortfahrend erhalten wir zu jeder Ordnungszahl γ_λ eine Vielfachheit e_λ, und offenbar ist $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m = n$; also gilt der

Satz 1. *Die Anzahl der Ordnungszahlen des linearen Differenzengleichungssystems* (1), *wenn jede ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird, ist genau gleich* n.

Wir werden hiernach immer von den n Ordnungszahlen reden, die dann teilweise oder auch alle einander gleich sein können. Die so definierten Ordnungszahlen ändern sich nicht, wenn man auf das Differenzengleichungssystem eine lineare Transformation

$$x_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu}(t) y_\mu(t), \quad \lim_{t \to \infty} g_{\nu\mu}(t) = c_{\nu\mu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

deren Determinante natürlich $\neq 0$ (für $t = 0, 1, 2, \ldots$) sein muss, ausübt, weil ja

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(t)|}.$$

Wenn für die Koeffizienten des Systems (1) die Beziehungen

$$\lim_{t \to \infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$$

statthaben, so sind die Ordnungszahlen einfach die absoluten Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \quad \ldots a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

und zwar jede mit der richtigen Vielfachheit.[1]

Für das Produkt der Ordnungszahlen gibt der folgende Satz eine Nützliche Abschätzung:

Satz 2. *Sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ die Ordnungszahlen des Differenzengleichungssystems* (1), *so gilt für ihr Produkt folgende Abschätzung nach unten:*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=0}^{t-1} |\Phi(\tau)|},$$

wobei

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

ist.

Beweis: Nach der Definition der Ordnungszahlen kann man n linear unabhängige Integrale $x_\nu(t) = x_{\nu1}(t), x_{\nu2}(t) \ldots, x_{\nu n}(t)$ angeben derart, dass das Integral $x_{\nu\lambda}(t)$ zur Ordnungszahl γ_λ gehört. Dann ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend grosse t

$$|x_{\nu\lambda}(t)| < \left(\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon}{n}\right)^t.$$

Setzt man nun

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} = v(t),$$

so ist

$$v(t+1) = \begin{vmatrix} x_{11}(t+1) \ldots x_{1n}(t+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}(t+1) \ldots x_{nn}(t+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Wendet man diese Formel der Reihe nach für $t = 0, 1, 2, \ldots, t-1$ an, so folgt

[1] S. 82, N. 1.

$$v(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \Phi(\tau) v(0).$$

Anderseits ist

$$|v(t)| < n! \prod_{\lambda=1}^{n} \left(\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon}{n}\right)^t.$$

Daher ist

$$\prod_{\lambda=1}^{n} \left(\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon}{n}\right)^t > \frac{|v(t)|}{n!} = \frac{|v(0)|}{n!} \prod_{\tau=0}^{t-1} |\Phi(\tau)|.$$

Folglich ist

(8)
$$\prod_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=0}^{t-1} |\Phi(\tau)|}.$$

§ 2.

Abweichendes Verhalten des unteren Limes.

Falls die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ Konstanten sind, so kann das in die Definition der Ordnungszahlen eingehende Zeichen »$\overline{\lim}$» (Formeln (2), (3)) ersetzt werden durch »lim». Denn aus der bekannten Form der Integrale ersieht man leicht, dass der Grenzwert existiert. Dasselbe gilt auch in dem allgemeineren Fall, wo die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben. Jedoch wäre es falsch, wenn man glaubt, dass es in jedem Fall so sein müsse. Denn aus der Form (4) sieht man leicht, dass die beiden Limites zwischen gewissen Grenzen liegen. Sie brauchen aber nicht zusammenzufallen und die Anzahl der möglichen Werte für den unteren Limes kann sogar grösser als n sein. Ein solches Verhalten zeigt das folgende Beispiel.

Das System[1]

---

[1] Dieses Beispiel verdanke ich Herrn O. Perron. Dass die Koeffizienten beschränkt sind, sieht man aus der folgenden Überlegung. Der Ausdruck

$$t \sin \log (t + 1) - t \sin \log t = 2t \sin \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cos \frac{1}{2} \log t(t + 1)$$

hat für $t \to \infty$ den Limes

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot \sin \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{t}\right)}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{1}{2} \text{ w. z. b. w.}$$

$$x_1(t+1) = 2^{2(t+1)\sin\log(t+1) - 2t\sin\log t} x_1(t),$$

$$x_2(t+1) = 2^{-(t+1)\sin\log(t+1) + t\sin\log t} x_2(t)$$

hat die Lösung

$$x_1(t) = C_1 2^{2t\sin\log t}, \quad x_2(t) = C_2 2^{-t\sin\log t}.$$

Zur Bestimmung der Ordnungszahlen brauchen wir den oberen Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|C_1| 2^{2t\sin\log t} + |C_2| 2^{-t\sin\log t}}.$$

Man sieht sofort, für $C_1 = 0$ ist er gleich 2, für $C_2 = 0$ ist er gleich 4; die Ordnungszahlen sind also 2 und 4. Der untere Limes

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|C_1| 2^{2t\sin\log t} + |C_2| 2^{-t\sin\log t}}$$

dagegen nimmt drei verschiedene Werte an; nämlich für $C_1 = 0$ den Wert $\frac{1}{2}$, für $C_2 = 0$ den Wert $\frac{1}{4}$, für $C_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$ den Wert 1.

§ 3.

Das adjungierte System.

Wir wollen in diesem und dem folgenden Paragraphen voraussetzen, dass die Determinante der Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ des Systems

$$(9) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$ dauernd von Null verschieden ist. Dann existiert bekanntlich für $t = 0, 1, 2, \ldots$ ein System von Integralen

$$x_1(t) = x_{1\lambda}(t), \ldots, x_n(t) = x_{n\lambda}(t) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, dass die Determinante von $x_{\nu\mu}(t)$ dauernd von Null verschieden ist. Nach (9) ist also

$$(10) \qquad x_{\nu\lambda}(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_{\mu\lambda}(t) \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun bilden wir die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} x_{\mu\lambda}(t) y_\mu(t) = c_\lambda \quad \text{mit } c_\lambda = \text{constant} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

und lösen sie nach $y_\nu(t)$ auf

$$y_\nu(t) = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \Xi_{\nu\lambda}(t)}{\Xi(t)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

wobei

$$\Xi(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

und $\Xi_{\nu\lambda}(t)$ das algebraische Komplement von $x_{\nu\lambda}(t)$ ist. Aus (12), (11) und (10) folgt, indem man mit $\sum\limits_{\mu_\lambda \neq \mu_\nu}^{(\varrho)}$ die Summe $\sum\limits_{\mu_\lambda \neq \mu_\nu}^{1, n} f_{\lambda \mu_\lambda}(t) x_{\mu_\lambda \varrho}(t)$ andeutet,

$$y_\nu(t+1) = \frac{1}{\Phi(t)\Xi(t)} \begin{vmatrix} x_{11}(t+1), \ldots x_{\nu-1,1}(t+1), c_1, x_{\nu+1,1}(t+1), \ldots x_{n1}(t+1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{1n}(t+1), \ldots x_{\nu-1,n}(t+1), c_n, x_{\nu+1,n}(t+1), \ldots x_{nn}(t+1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Phi(t)\,\Xi(t)} \sum_{\mu_\nu} y_{\mu_\nu}(t) \begin{vmatrix} \sum\limits_{\mu_1 \neq \mu_\nu}^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\mu_{\nu-1} \neq \mu_\nu}^{(1)} & x_{\mu_\nu 1}(t) & \sum\limits_{\mu_{\nu+1} \neq \mu_\nu}^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\mu_n \neq \mu_\nu}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{\mu_1 \neq \mu_\nu}^{(n)} & \ldots & \sum\limits_{\mu_{\nu-1} \neq \mu_\nu}^{(n)} & x_{\mu_\nu n}(t) & \sum\limits_{\mu_{\nu+1} \neq \mu_\nu}^{(n)} & \ldots & \sum\limits_{\mu_n \neq \mu_\nu}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\mu_\nu} y_{\mu_\nu}(t) \Phi_{\nu\mu_\nu}(t)}{\Phi(t)\Xi(t)} \Xi(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\mu_\nu} y_{\mu_\nu}(t) \Phi_{\nu\mu_\nu}(t),$$

wobei

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \ldots & f_{n1}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n}(t) & \ldots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

und $\Phi_{\nu\mu_\nu}(t)$ das algebraische Komplement von $f_{\nu\mu_\nu}(t)$ ist. Hieraus ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\mu_\nu}(t) y_\nu(t+1) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_{\nu\mu_\nu}(t)}{\Phi(t)} \sum_{\mu_\nu} y_{\mu_\nu}(t) \cdot \Phi_{\nu\mu_\nu}(t)$$

$$= \frac{y_{\mu_\nu}(t)}{\Phi(t)} \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\mu_\nu}(t) \Phi_{\nu\mu_\nu}(t) = y_{\mu_\nu}(t)$$

$$(\mu_\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

oder

$$y_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\mu\nu}(t) y_\mu(t+1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Die Systeme (9) und (13) heissen zueinander *adjungiert*. Für ihre Ordnungszahlen gilt der folgende

Satz 3. *Sind die Ordnungszahlen des Systems* (9) *nach abnehmender Grösse geordnet:*

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots \geqq \gamma_n,$$

und sind die Ordnungszahlen δ_ν *des adjungierten Systems* (13) *nach zunehmender Grösse geordnet:*

$$\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_n,$$

so ist stets $\gamma_\nu \delta_\nu \geqq 1$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis: Es sei

$$x_1(t) = x_{1\lambda}(t), \quad x_2(t) = x_{2\lambda}(t), \ \ldots, \quad x_n(t) = x_{n\lambda}(t)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen des Systems (9) derart, dass das Integral $x_\nu(t) = x_{\nu\lambda}(t)$ zur Ordnungszahl γ_λ gehört. Wir bilden damit die Matrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

deren Determinante natürlich $\neq 0$ ist. Setzen wir weiter

$$\begin{pmatrix} f_{11}(t) \dots f_{1n}(t) \\ \dots\dots \\ f_{n1}(t) \dots f_{nn}(t) \end{pmatrix} = F(t), \tag{15}$$

so folgt aus (9) die Matrixgleichung

$$X(t+1) = F(t)\,X(t). \tag{16}$$

Sei nun

$$y_1(t) = y_{\lambda 1}(t), \dots, y_n(t) = y_{\lambda n}(t) \qquad (\lambda = 1, \dots, n)$$

ein Fundamentalsystem des Systems (13) derart, dass das Integral $y_\nu(t) = y_{\lambda\nu}(t)$ zur Ordnungszahl δ_λ gehört, so kann man wieder die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \dots y_{1n}(t) \\ \dots\dots \\ y_{n1}(t) \dots y_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

bilden, deren Determinante auch wieder $\neq 0$ ist. Aus (13) folgt dann

$$Y(t) = Y(t+1) F(t). \tag{18}$$

Multipliziert man (16) linkseitig mit $Y(t+1)$, und (18) rechtseitig mit $X(t)$, so ergibt sich durch Vergleich:

$$Y(t+1)\,X(t+1) = Y(t)\,X(t) = \Omega, \tag{19}$$

wobei Ω eine Matrix von Konstanten ist:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} \dots \omega_{1n} \\ \dots\dots \\ \omega_{n1} \dots \omega_{nn} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Da die Determinanten von $X(t)$, $Y(t)$ von Null verschieden sind, ist die Determinante von Ω ebenfalls $\neq 0$. Ausführlich geschrieben besagt dann die Gleichung (19)

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_{\lambda\nu}(t) x_{\nu\mu}(t) = \omega_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n). \tag{21}$$

Insbesondere ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_{\lambda\nu}(t) x_{\nu\lambda}(t) = \omega_{\lambda\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \tag{22}$$

Nun gehört das Integral $x_{\nu\lambda}(t)$ zur Ordnungszahl γ_λ und $y_{\lambda\nu}(t)$ gehört zur Ordnungszahl δ_λ. Daher ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend grosse t

$$|x_{\nu\lambda}(t)| \leqq (\gamma_\lambda + \varepsilon)^t, \quad |y_{\lambda\nu}(t)| \leqq (\delta_\lambda + \varepsilon)^t \qquad (\lambda, \nu = 1, \ldots, n).$$

Wegen (22) ist also

$$|\omega_{\lambda\lambda}| \leqq \sum_{\nu=\lambda}^{n} |y_{\lambda\nu}(t)|\,|x_{\lambda\nu}(t)| \leqq n(\gamma_\lambda\delta_\lambda + \varepsilon')^t,$$

wenn $\varepsilon \to 0$ wandert.

Hieraus folgt sofort, dass $\gamma_\lambda\delta_\lambda \geqq 1$ sein muss, wenn die Konstante $\omega_{\lambda\lambda} \neq 0$ ist. Nun kann man aber, wie mein Lehrer Herr Prof. O. Perron gezeigt hat[1], die Fundamentalsysteme $x_{\nu\lambda}(t)$ und $y_{\lambda\nu}(t)$ auf mannigfache Arten so wählen, dass die durch (22) definierten Konstanten $\omega_{\lambda\lambda}$ alle $\neq 0$ werden. Daraus folgt unmittelbar unsre Behauptung.

§ 4.

Weiteres über das adjungierte System.

Wenn die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ Konstanten sind oder wenigstens für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben, sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des adjungierten Systems reziprok gleich den Wurzeln der charakteristischen Gleichung des ursprünglichen Systems. Daher sind auch die Ordnungszahlen des einen Systems reziprok gleich denen des andern Systems, und folglich gelten in Satz 3 lauter Gleichheitszeichen: $\gamma_\lambda\delta_\lambda = 1$. Dasselbe wird auch in andern Fällen eintreten können. Jedoch darf man nicht glauben, dass es immer so sein muss. Beispielsweise hat schon die eine Differenzengleichung

$$x(t+1) = 2^{(t+1)\sin\log(t+1) - t\sin\log t}\, x(t)$$

das Integral $x(t) = C2^{t\sin\log t}$ und also die Ordnungszahl 2; die adjungierte Gleichung

$$y(t) = 2^{(t+1)\sin\log(t+1) - t\sin\log t}\, y(t+1)$$

hat das Integral $y(t) = C2^{-t\sin\log t}$ und ebenfalls die Ordnungszahl 2. Das Produkt ist also nicht 1, sondern 4.

[1] Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, Math. Zeitschrift, Bd. 31 (1930), S. 756—758.

Die Frage, wann in Satz 3 lauter Gleichheitszeichen gelten, wird beantwortet durch den

Satz 4. *In Satz 3 gelten dann und nur dann lauter Gleichheitszeichen:* $\gamma_\lambda \delta_\lambda = 1$, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt[t]{\prod_{\tau=0}^{t-1} |\Phi(\tau)|}$$

existiert und gleich $\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu$ *ist; wobei* $\Phi(t)$ *die Determinante von* $F(t)$ *bedeuten soll.*

Nach Satz 2 sieht man leicht, dass dieser Grenzwert nie grösser als $\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu$ sein kann. Nun setzen wir unter Beibehaltung der Bezeichnung von § 3

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) \dots x_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n1}(t) \dots x_{nn}(t) \end{vmatrix} = v(t), \quad \begin{vmatrix} y_{11}(t) \dots y_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1}(t) \dots y_{nn}(t) \end{vmatrix} = w(t),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} \dots \omega_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_{n1} \dots \omega_{nn} \end{vmatrix} = \omega,$$

so ist nach (21) $v(t) w(t) = \omega$. Daher gelten die Formeln (vgl. (8))

(23) $$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{|v(t)|} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu,$$

(24) $$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{|w(t)|} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} \delta_\nu,$$

(25) $$v(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \Phi(\tau) v(0).$$

Sobald durchweg $\gamma_\nu \delta_\nu = 1$, so muss notwendig

(26) $$\underline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{|v(t)|} \geqq \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu$$

sein, weil aus der gegenteiligen Annahme und der Formel (24) die unmögliche Relation

$$1 = \lim_{t \to \infty} \sqrt[t]{|\omega|} = \lim_{t \to \infty} \sqrt[t]{|v(t) w(t)|} < \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \delta_\nu = 1$$

folgen würde. Aus den Formeln (23) und (26) ergibt sich sogleich

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt[t]{|v(t)|} = \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \qquad (\neq 0, \text{ wegen } |v(t)| > 0) \tag{27}$$

oder, wenn man die Formel (25) berücksichtigt,

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt[t]{\prod_{\tau=0}^{t-1} |\Phi(t)|} = \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \tag{28}$$

als die notwendige Folgerung der Annahme $\gamma_\lambda \delta_\lambda = 1$.

Umgekehrt, wenn diese Gleichung statthat, so gilt zunächst wegen (25) auch (27).

Aus der Matrixgleichung

$$X(t+1) = F(t) X(t)$$

folgt aber

$$X^{-1}(t) = X^{-1}(t+1) F(t),$$

d. h. $X^{-1}(t)$ ist eine Lösung des adjungierten Systems. Bezeichnet man diese Lösung mit $Z(t)$ und den Minor von $x_{\nu\lambda}(t)$ in der Determinante $v(t)$ mit $\xi_{\nu\lambda}(t)$, so ist

$$Z(t) = X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & \dots & z_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1}(t) & \dots & z_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

und $z_{\lambda\nu}(t) = \dfrac{\xi_{\nu\lambda}(t)}{v(t)}$. Mit Rücksicht auf (27) erkennt man sogleich, dass für genügend grosse t

$$|z_{\lambda\nu}(t)| = \frac{|\xi_{\nu\lambda}(t)|}{|v(t)|} < \left(\frac{1}{\gamma_\lambda - \varepsilon}\right)^t$$

ist, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Folglich ist

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |z_{\lambda\nu}(t)|} \leqq \frac{1}{\gamma_\lambda}. \tag{29}$$

Daher ist nach Satz 3 die Ordnungszahl des adjungierten Systems, zu welcher das Integral $z_\nu(t) = z_{\lambda\nu}(t)$ gehört, genau gleich $\frac{1}{\gamma_\nu}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Damit ist Satz 4 bewiesen; ausserdem erkennt man, dass in § 3 anstatt $y_{\lambda\nu}(t)$ auch $z_{\lambda\nu}(t)$ in Betracht gezogen werden kann, wodurch die Matrix Ω offenbar in die Einheitsmatrix übergeht.

§ 5.

Die Stabilität und Instabilität der Ordnungszahlen.

Wir betrachten neben dem Differenzengleichungssystem (1) ein abgeändertes System

$$(30) \qquad x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} [f_{\nu\mu}(t) + \varphi_{\nu\mu}(t)] x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Wenn die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für hinreichend grosse Werte von t, etwa für $t = t_0$, $t_0 + 1$, $t_0 + 2, \ldots$, wobei t_0 eine ganze positive Zahl ist, verschwindet, so ist jedes Integral des abgeänderten Systems für $t = t_0$, $t_0 + 1, \ldots$ auch ein Integral des ursprünglichen Systems und umgekehrt. Nach der Definition von Ordnungszahlen sieht man leicht, dass wenn die $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für genügend grosse t nur hinreichend klein sind, die Ordnungszahlen des abgeänderten Systems sich nur wenig von denen des ursprünglichen Systems unterscheiden, und dass sie überhaupt dieselben sind, wenn $\lim \varphi_{\nu\mu}(t) = 0$ ist.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt aber das folgende Beispiel. Das System:

$$(31) \qquad \begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ x_2(t+1) = 2^{2(t+1)\sin\log(t+1) - 2t\sin\log t} x_2(t) \end{cases}$$

hat das allgemeine Integral

$$x_1(t) = C_1, \quad x_2(t) = C_2 2^{2t\sin\log t}.$$

Daraus erkennt man, dass die Ordnungszahlen 1 und 4 sind. Dagegen hat das abgeänderte System

$$(32) \qquad \begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ x_2(t+1) = b\,2^{-t} x_1(t) + 2^{2(t+1)\sin\log(t+1) - 2t\sin\log t} x_2(t), \end{cases}$$

wobei $|b|$ eine kleine Konstante ist, das allgemeine Integral

$$x_1(t) = C_1, \quad x_2(t) = 2^{2t \sin \log t} \left(C_2 + 2\, C_1 b \sum_{\tau=0}^{t-1} 2^{-(\tau+1)[2 \sin \log (\tau+1)+1]} \right)$$

und die Ordnungszahlen sind gleich den verschiedenen Werten des oberen Limes

$$(33) \qquad \gamma = \overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{|C_1| + 2^{2t \sin \log t} \left| C_2 + 2\, C_1 b \sum_{\tau=0}^{t-1} 2^{-2(\tau+1) \sin \log (\tau+1) - (\tau+1)} \right|}.$$

Für $C_1 = 0$ ergibt sich $\gamma = 4$, also die eine Ordnungszahl ist 4. Für $C_2 = 0$ ergibt sich dagegen aus (33)

$$(34) \qquad \gamma \geqq \overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt[t]{2^{2t \sin \log t} \sum_{\tau=0}^{t-1} 2^{-2(\tau+1) \sin \log (\tau+1) - (\tau+1)}}.$$

Dieser Limes ist also von b unabhängig. Wir wollen ihn abschätzen. Ist $T = 24t = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon}$, wobei n eine passende sogar beliebig grosse natürliche Zahl bedeutet und ε durch die Ungleichungen:

$$\log 24 - \pi - \arccos \frac{49}{50} < \varepsilon < \arccos \frac{49}{50}, \qquad 0 < \arccos \frac{49}{50} < \frac{\pi}{2}$$

beschränkt wird, so habe ich

$$2^{2T \sin \log T} = 2^{48t \cos \varepsilon}.$$

Nun sei ε' eine andere kleine Zahl, die der Gleichung

$$\varepsilon' - \varepsilon = \pi - \log 24$$

und folglich auch der Ungleichung

$$\cos \varepsilon' > \frac{49}{50}$$

genügt; dann ist

$$t = e^{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon'}.$$

Für ein solches t ist

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} 2^{-(\tau+1)[2 \sin \log (\tau+1)+1]} > 2^{-t[2 \sin \log t + 1]} = 2^{2t \cos \varepsilon' - t}.$$

Hiernach folgt aus (34)

$$\gamma > \overline{\lim_{T\to\infty}} \sqrt[T]{2^{2T}} = 4.$$

Während also die Ordnungszahlen des Systems (31) gleich 1 und 4 sind, sind die des beliebig wenig abgeänderten Systems (32) gleich 4 und γ, wo $\gamma > 4$ ist.

Dieses eigentümliche Verhalten gibt Veranlassung zu einer neuen Begriffsbildung. Wir ordnen die Ordnungszahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des Systems (1) der Grösse nach:

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots \geqq \gamma_n.$$

Ebenso ordnen wir die Ordnungszahlen $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ des abgeänderten Systems (30) der Grösse nach:

$$\gamma'_1 \geqq \gamma'_2 \geqq \cdots \geqq \gamma'_n.$$

Dann nennen wir die Ordnungszahl γ_λ *stabil*, wenn jedem positiven ε ein positives δ so zugeordnet werden kann, dass für $|\varphi_{\nu\mu}(t)| \leqq \delta$ stets $|\gamma'_\lambda - \gamma_\lambda| \leqq \varepsilon$ ist; natürlich genügt es, die Ungleichung $|\varphi_{\nu\mu}(t)| \leqq \delta$ nur für genügend grosse t zu verlangen. Andernfalls heisst die Ordnungszahl γ_λ *instabil*.

Aus der Definition der Stabilität folgt sofort, dass, falls γ_λ stabil ist, für $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_{\nu\mu}(t) = 0$ stets $\gamma'_\lambda = \gamma_\lambda$ sein wird.

Bei dem System (31) sind nach dem Bewiesenen beide Ordnungszahlen instabil.

§ 6.

Berechnung von Ordnungszahlen.

Da nach § 5 kleine Änderungen der Koeffizienten grosse Änderungen der Ordnungszahlen zur Folge haben können, so ist die numerische Berechnung der Ordnungszahlen aus den Koeffizienten gewiss keine leichte Aufgabe. Wir wollen jetzt einige Fälle angeben, in denen eine brauchbare Abschätzung oder sogar eine genaue formelmässige Berechnung möglich ist.

Satz 5. *Wenn die Koeffizienten des Differenzengleichungssystems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für genügend grosse Werte von t, etwa $t = t_0,\ t_0 + 1, \ldots,$ *den Ungleichungen*[1]*:*

$$|f_{11}(t)| \geqq P(t) + 2(n-1)\,Q(t)$$

genügen, wobei

$$P(t) = \operatorname*{Max}_{\lambda=2}^{n} |f_{\lambda\lambda}(t)|, \quad Q(t) = \operatorname*{Max}_{\nu\neq\mu}^{1,\,n} |f_{\nu\mu}(t)|$$

ist, so ist die grösste Ordnungszal γ *zwischen den folgenden Grenzen eingeschlossen*

$$\gamma \begin{cases} \leqq \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod\limits_{\tau=t_0}^{t-1} [\,|f_{11}(\tau)| + (n-1)\,Q(\tau)]} \\ \geqq \underline{\lim\limits_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod\limits_{\tau=t_0}^{t-1} [\,|f_{11}(\tau)| - (n-1)\,Q(\tau)]}. \end{cases}$$

Beweis: Aus dem Differenzengleichungssystem ergibt sich für $t = t_0,$ $t_0 + 1, \ldots .$

$$|x_\nu(t+1)| \leqq |f_{\nu\nu}(t)|\,|x_\nu(t)| + Q(t) \sum_{\mu\neq\nu} |x_\mu(t)|.$$

Daraus folgt

$$(35) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t+1)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |f_{\nu\nu}(t)|\,|x_\nu(t)| + (n-1)\,Q(t) \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|$$

$$\leqq \{|f_{11}(t)| + (n-1)\,Q(t)\} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|,$$

wenn man die Ungleichung beiderseits nach ν von 1 bis n summiert, und

$$\sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t+1)| \leqq P(t) \sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t)| + Q(t) \left\{(n-2) \sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t)| + (n-1)\,|x_1(t)|\right\},$$

wenn man sie nach ν von 2 bis n summiert.

Zieht man nun die letzte Ungleichung von der folgenden Ungleichung

[1] Falls ein von den $f_{\lambda\lambda}(t)$, etwa $f_{kk}(t)$, diesen Bedingungen genügt, so kann man durch Umnumerierung $f_{kk}(t)$ mit $f_{11}(t)$ bezeichnen.

$$|x_1(t+1)| \geqq |f_{11}(t)|\,|x_1(t)| - Q(t)\sum_{\mu=2}^{n}|x_\mu(t)|$$

ab, so ergibt sich

$$(36)\quad |x_1(t+1)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t+1)| \geqq$$

$$\geqq |f_{11}(t)|\,|x_1(t)| - P(t)\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)| - (n-1)\,Q(t)\sum_{\mu=1}^{n}|x_\mu(t)|$$

$$= [|f_{11}(t)| - (n-1)Q(t)]\,|x_1(t)| - [P(t) + (n-1)\,Q(t)]\sum_{\mu=2}^{n}|x_\mu(t)|$$

$$\geqq [|f_{11}(t)| - (n-1)\,Q(t)]\left(|x_1(t)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)|\right),$$

wenn man die Ungleichung

$$|f_{11}(t)| \geqq P(t) + 2(n-1)\,Q(t)$$

berücksichtigt.

Aus (35) folgt aber

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)| \leqq C\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| + (n-1)\,Q(\tau)\} \qquad C > 0.$$

Analog folgt aus (36)

$$|x_1(t)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)| \geqq \prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| - (n-1)\,Q(\tau)\}\left\{|x_1(t_0)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t_0)|\right\}.$$

Wählt man nun die Anfangswerte eines Integrals so, dass die Funktion

$$|x_1(t)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)|$$

für $t = t_0$ positiv ist, so bleibt sie auch für $t = t_0 + 1,\ t_0 + 2, \ldots$ nach (36) dauernd positiv; wegen

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)| \geqq |x_1(t)| - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)|,$$

ist dann für dieses Integral

$$(37)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| + (n-1)Q(\tau)\}} \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)|} \geqq$$

$$\geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| - (n-1)\,Q(\tau)\}}\cdot$$

und damit der Satz 5 bewiesen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5 ist der

Satz 6. *Wenn die Koeffizienten des Differenzengleichungssystems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

den Bedingungen genügen

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = 0 \qquad (\text{für } \mu \neq \nu),$$

so ist die grösste Ordnungszahl stabil und hat den Wert

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}|f_{11}(\tau)|}.$$

Nach Satz 5 ist nämlich, wenn $\lim\limits_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = 0$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(t)| + \delta\}} \geqq \gamma \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(t)| - \delta\}},$$

wo δ eine beliebig kleine positive Konstante sein darf. Daher gilt unsre Behauptung. Die Stabilität folgt sofort, indem man die Koeffizienten ein klein wenig abändert und dann die neue grösste Ordnungszahl wieder nach Satz 5 abschätzt.

Satz 7. *Genügen die Koeffizienten des Differenzengleichungssystems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für $t = t_0,\ t_0 + 1, \ldots,$ *den folgenden Bedingungen*

$$|f_{11}(t)| = \operatorname*{Min}_{\lambda=1}^{n} |f_{\lambda\lambda}(t)|, \quad |f_{11}(t)| - (n-1)\,Q(t) > 0$$

wobei $Q(t) = \operatorname*{Max}_{\nu \neq \mu}^{1,n} |f_{\nu\mu}(t)|$ *ist, und setzt man* $\operatorname*{Max}_{\lambda=1}^{n} |f_{\lambda\lambda}(t)| = P(t)$, *so sind die Ordnungszahlen* $\gamma_\varkappa$ *zwischen den folgenden Grenzen eingeschlossen*

$$\gamma_\varkappa \begin{cases} \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} \{|f_{11}(\tau)| - (n-1)\,Q(\tau)\}} \\ \leqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} \{P(\tau) + (n-1)\,Q(\tau)\}}. \end{cases}$$

Sind dazu noch die Bedingungen

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = 0$$

erfüllt, so liegen $\gamma_\varkappa$ *zwischen den Grenzen*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} |f_{11}(\tau)|} \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_n \leqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} P(\tau)}.$$

Beweis: Aus dem Differenzengleichungssystem folgt nämlich

$$|x_\nu(t+1)| \geqq |f_{11}(t)|\,|x_\nu(t)| - Q(t) \sum_{\mu\neq\nu} |x_\mu(t)|.$$

Summiert man diese Ungleichung nach ν von 1 bis n, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t+1)| \geqq \{|f_{11}(t)| - (n-1)\,Q(t)\} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|. \tag{38}$$

Analog ergibt sich:

$$\sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t+1)| \leqq P(t) \sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t)| + Q(t)\left\{(n-2) \sum_{\nu=2}^{n} |x_\nu(t)| + (n-1)\,|x_1(t)|\right\}.$$

Addiert man sie zu der Ungleichung

$$|x_1(t+1)| \leqq |f_{11}(t)|\,|x_1(t)| + Q(t)\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu(t)|,$$

so ergibt sich

$$(39)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t+1)| \leqq \{P(t) + (n-1)Q(t)\}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)|.$$

Nach (38) und (39) ist für $t = t_0 + 1,\ t_0 + 2, \ldots$

$$(40)\qquad C_1\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{P(\tau) + (n-1)Q(\tau)\} \geqq \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t)| \geqq C\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| - (n-1)Q(\tau)\},$$

wobei C und C_1 zwei positive Konstante sind. Damit ist der erste Teil von Satz 7 bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus dem ersten, wenn man dieselbe Überlegung, die beim Beweis von Satz 6 angegeben wurde, anwendet.

Auf Grund der Sätze 5 und 2 gilt offenbar der

Satz 8. *Sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ die Ordnungszahlen des Differenzengleichungssystems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)x_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dessen Koeffizienten den in Satz 5 gegebenen Ungleichungen genügen, so gilt für ihr Produkt die Abschätzung:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\{|f_{11}(\tau)| + (n-1)Q(\tau)\}^n} \geqq \prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1}|\Phi(\tau)|},$$

wobei $f_{11}(t)$, $Q(t)$ die in Satz 5, $\Phi(t)$ die in Satz 2 gegebene Bedeutung haben sollen.

Satz 9. *Wenn die Koeffizienten des Differenzengleichungssystems*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

den Bedingungen genügen

(A) $$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = 0 \qquad \text{(für } \nu \neq \mu\text{)},$$

(B) $$|f_{\nu-1,\,\nu-1}(t)| - |f_{\nu\nu}(t)| > 0 \qquad \text{(für } t = t_0,\ t_0+1, \ldots;\ \nu = 2, 3, \ldots, n\text{)},$$

und wenn

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} |f_{\nu\nu}(\tau)|} = \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird, so sind die Ordnungszahlen einfach die Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Um Satz 9 zu beweisen benutzen wir den folgenden

Hilfssatz. *Das in Satz 9 angegebene Differenzengleichungssystem hat unter den dort angegebenen Voraussetzungen n linear unabhängige Integralsysteme*

$$x_1(t) = x_{1\lambda}(t), \quad x_2(t) = x_{2\lambda}(t), \ldots, \quad x_n(t) = x_{n\lambda}(t),$$

für welche die Beziehungen gelten:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{\mu\lambda}(t)}{x_{\lambda\lambda}(t)} = 0 \qquad \text{für } \mu \neq \lambda,$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{x_{\lambda\lambda}(t+1)}{x_{\lambda\lambda}(t)} - f_{\lambda\lambda}(t)\right) = 0.$$

Den Beweis dieses Hilfssatzes hat mein hochgeehrter Lehrer, Herr Prof. Perron in einer seiner Arbeiten gegeben[1], wobei allerdings $\lim_{t\to\infty} f_{\lambda\lambda}(t) = \varrho_\lambda$ zu setzen sind.

Jetzt wenden wir uns dem Beweis von Satz 9 zu. Wir bemerken zunächst, dass auf Grund der Voraussetzungen gewiss

(41) $$\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$$

ist. Nun besagt der Hilfssatz, dass es unter den Voraussetzungen von Satz 9 zu jedem λ ein Integral $x_{\nu\lambda}(t)$ gibt, für welches

(42) $$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{\mu\lambda}(t)}{x_{\lambda\lambda}(t)} = 0 \qquad \text{für } \mu \neq \lambda,$$

(43) $$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{x_{\lambda\lambda}(t+1)}{x_{\lambda\lambda}(t)} - f_{\lambda\lambda}(t)\right) = 0$$

[1] Vgl. Satz 14. der in Fussnote S. 82 zitierten Arbeit.

ist. Aus (43) folgt, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend grosse t, etwa $t = t_0 + 1,\ t_0 + 2,\ \ldots,$

$$\left| x_{\lambda\lambda}(t_0) \prod_{\tau=t_0}^{t-1} f_{\lambda\lambda}(\tau) \right| - \varepsilon < |x_{\lambda\lambda}(t)| < \left| x_{\lambda\lambda}(t_0) \prod_{\tau=t_0}^{t-1} f_{\lambda\lambda}(\tau) \right| + \varepsilon,$$

und daher ist mit Rücksicht auf (42) auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu\lambda}(t)|} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\prod_{\tau=t_0}^{t-1} |f_{\lambda\lambda}(\tau)|} = \gamma_\lambda.$$

Damit ist Satz 9 bewiesen.