

SUR UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DES POLYNOMES DE LEGENDRE.

PAR

NICOLAS CIORĂNESCU

à BUCAREST.

1. On définit le plus souvent les polynomes de Legendre $X_n(x)$ soit par leur fonction génératrice:

$$(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} r^n X_n(x)$$

soit par leur propriété d'orthogonalité:

$$\int_{-1}^1 X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

C'est en partant de ces deux propriétés fondamentales qu'on a généralisé les polynomes de Legendre, par conséquent soit en considérant une fonction génératrice plus générale¹, soit en considérant des polynomes satisfaisant à une relation d'orthogonalité de la forme:

$$\int_a^b p(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$p(x)$ étant une fonction positive; les polynomes satisfont aussi à une équation linéaire du second ordre, de la forme:

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$$

¹ Voir A. Angelesco: Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermité... (Thèse Paris 1916).

$A_p(x)$ étant un polynome de degré p . C'est de cette manière qu'on peut obtenir les polynomes de Jacobi, de Tchebitcheff, de Laguerre, d'Hermite etc. qui, à ce point de vue, sont autant de généralisations des polynomes de Legendre.

Mais, on peut observer, ce qui n'est pas chose nouvelle, que la formule d'Olinde Rodrigue:

$$(1.1) \quad X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

peut aussi servir comme définition pour les polynomes de Legendre. D'une manière plus précise, nous allons interpréter la formule (1.1) ou celle plus générale:

$$(1.1') \quad P_n(x; a, b) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x - a)^n (x - b)^n]$$

comme un algorithme permettant d'attacher à tout polynome du second degré (polynome-base):

$$(x - a)(x - b) = x^2 + px + q$$

une suite de polynomes de degré $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ dont les propriétés sont étroitement liées avec celles du polynome-base. C'est en partant de cet algorithme que nous allons chercher à généraliser les polynomes de Legendre. Cette généralisation de l'algorithme de Rodrigue peut être conçue de plusieurs manières, savoir:

a) Tout en gardant l'opération de la dérivation comme opération fondamentale de l'algorithme, on cherche à attacher à tout polynome donnée, de degré ≥ 1 , une suite de polynomes de degré $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ se réduisant aux polynomes de Legendre lorsque le polynome-base est du second degré.

b) On cherche à remplacer l'opération de la dérivation par une opération plus générale, p. ex. la différence finie d'ordre correspondant à la dérivation, algorithme qui permet aussi d'attacher à tout polynome-base une suite de polynomes.

Nous allons considérer dans le présent travail le premier point de vue et par conséquent nous allons apprendre à attacher à tout polynome donné une suite de polynomes généralisant les polynomes de Legendre.

2. Soit $Q(x)$ un polynome donné de degré k , dont la décomposition en facteurs est:

$$(2.1) \quad Q(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) \equiv x^k + p_1 x^{k-1} + \dots + p_k.$$

Le polynome $Q(x)$ est le polynome-base, et nous allons définir, en partant de ce polynome, une suite de polynomes $P_n(x; a_1, a_2, \dots, a_k)$ ou plus court: $P_n(x; Q)$, définis par l'opération tout à fait pareille à l'opération (I, I') d'Olinde Rodrigue:

$$(2.2) \quad P_n(x; Q) = \frac{1}{A_n} \cdot \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} [Q^n(x)]$$

les A_n étant des constantes numériques. C'est cette suite de polynomes que nous allons considérer. Nous disons que les polynomes $P_n(x; Q)$ sont d'ordre k , k étant le degré de $Q(x)$. Pour $k = 1$, les polynomes de la suite (2.2) se réduisent, à part un facteur numérique, aux polynomes $(x - a_1)^n$; (polynomes qu'on peut appeler: de Newton).

Les polynomes d'ordre deux, sont les polynomes de Legendre attachés à l'intervalle (a_1, a_2) .

Nous allons par conséquent considérer les polynomes (2.2) pour $k > 2$, ce que nous allons supposer dorénavant.

Tout d'abord, les seuls polynomes, à notre connaissance, qui aient une certaine liaison avec les polynomes (2.1) sont les polynomes définis par Appell¹:

$$(2.3) \quad R_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [x^n(1 - x^2)^n].$$

On voit que ces polynomes sont liés à nos polynomes (2.2) par:

$$\frac{d^n R_{2n}}{dx^n} = A_n P_n(x; Q) \text{ avec } k = 3 \text{ et } Q(x) = x(1 - x^2)$$

mais Appell ne met pas en évidence la liaison qui nous intéresse avec les polynomes de Legendre, et ce n'est qu'à cause du fait que $R_{2n}(x)$ est un polynome d'ordre trois, c.-à-d. satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre trois, que nous citons ce travail d'Appell.

3. Il est facile de s'assurer que $P_n(x; Q)$ est effectivement un polynome de degré n . Pour obtenir son expression, nous allons considérer le polynome $Q(x)$ sous la dernière forme (2.1) ce qui donne:

$$(3.1) \quad Q^n(x) = \sum \frac{n!}{\alpha_0! \alpha_1! \dots \alpha_k!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} x^n$$

¹ P. Appell: Sur une suite de polynomes ayant toutes leurs racines réelles. Archiv der Mathematik und Physik. 1901. p. 69.

la somme étant étendue à tous les entiers α_i tels que :

$$(3.2) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$$

et où :

$$s = k\alpha_0 + (k - 1)\alpha_1 + (k - 2)\alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}.$$

Mais, comme il faut prendre la dérivée d'ordre $(k - 1)n$ de $Q^n(x)$, il faut considérer dans (3.1) seulement les termes pour lesquels

$$s = nk - [\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (k - 1)\alpha_{k-1} + k\alpha_k] \geq (k - 1)n$$

c.-à.-d. les α_i doivent satisfaire à l'inégalité :

$$(3.3) \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + k\alpha_k \leq n$$

ce qui diminue le nombre des solutions entières de l'équation (3.2). On trouve ainsi :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 P_1(x; Q) = (k - 1)! [kx + p_1] \\ A_2 P_2(x; Q) = (2k - 2)! [k(2k - 1)x^2 + 2(2k - 1)p_1x + p_1^2 + 2p_2] \\ A_3 P_3(x; Q) = (3k - 3)! \left[k \frac{(3k - 1)(3k - 2)}{2} x^3 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (3k - 1)(3k - 2)p_1x^2 + 3(3k - 2)(p_1^2 + p_2)x + 3(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) \right] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Par application répétée du théorème de Rolle, on voit sans peine que si l'équation $Q(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même pour l'équation $P_n(x; Q) = 0$ et que de plus, les racines de cette dernière équation sont toutes situées dans le poly-intervalle (a_1, a_2, \dots, a_k) . On peut considérer les racines de l'équation: $P_n(x; Q) = 0$, et à cela on est guidé par le fait que la racine de $P_1(x; Q) = 0$ est: $\frac{\sum \alpha_i}{k}$, comme réalisant la distribution uniforme de n points entre k points fixes donnés.

4. Considérons deux polynomes (2.2) successifs, soient $P_{n+1}(x; Q)$ et $P_n(x; Q)$. Proposons nous de trouver une relation entre $P'_{n+1}(x; Q)$ et $P_n(x; Q)$ et ses dérivées. Partons pour cela de l'expression :

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad A_{n+1} P'_{n+1}(x; Q) &= (n + 1) \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [Q^n(x) \cdot Q'(x)] \right\} = \\
 &= (n + 1) \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} \left[Q^{(k)}(x) Q^n(x) + C_{k-1}^1 Q^{(k-1)}(x) \frac{dQ^n}{dx} + \right. \\
 &\quad \left. + C_{k-1}^2 Q^{(k-2)}(x) \frac{d^2 Q^n}{dx^2} + \dots + Q'(x) \frac{d^{k-1} Q^n}{dx^{k-1}} \right].
 \end{aligned}$$

En dérivant chaque terme de la paranthèse $(k - 1)n$ fois d'après la formule de Leibnitz, en tenant compte de l'expression (2.2) des polynomes $P_n(x; Q)$ on obtient, après avoir groupé les termes, la relation :

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad A_{n+1} P'_{n+1}(x; Q) &= (n + 1) A_n [C_{(k-1)(n+1)}^{k-1} Q^{(k)}(x) P_n + \\
 &\quad + C_{(k-1)(n+1)}^{k-2} Q^{(k-1)}(x) P'_n + \dots + Q'(x) P_n^{(k-1)}].
 \end{aligned}$$

Par conséquent $P'_{n+1}(x; Q)$ peut s'exprimer linéairement à l'aide de $P_n(x; Q)$ et de ses $(k - 1)$ premières dérivées.

Si nous déterminons les constantes A_n par la relation de récurrence :

$$(4.3) \quad A_{n+1} = k! C_{(k-1)(n+1)}^{k-1} A_n; \quad A_0 = 1,$$

on a pour A_n l'expression suivante :

$$(4.4) \quad A_n = k^n [(k - 1)n]!.$$

Pour $k = 2$ on a le coefficient qui entre dans la formule (1.1) d'O. Rodrigue. Avec ce choix des constantes A_n , la relation (4.2) nous donne pour $Q(x) = x^2 - 1$ une relation bien connue pour les polynomes de Legendre.

On peut obtenir une autre expression pour $P'_{n+1}(x; Q)$, en partant de l'expression suivante, équivalente à celle du (4.1) :

$$(4.5) \quad A_{n+1} P'_{n+1}(x; Q) = \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} \left\{ \frac{d^k}{dx^k} [Q^n(x) \cdot Q(x)] \right\}$$

et effectuer les deux dérivations successives d'après la formule de Leibnitz. En comparant ces deux expressions de $A_{n+1} P'_{n+1}(x; Q)$ on obtient l'équation différentielle que satisfait $P_n(x; Q)$. Mais, on arrive plus vite à cette équation en posant :

$$(4.6) \quad u = Q^n(x); \quad y = A_n P_n(x; Q) = \frac{d^{(k-1)n} u}{dx^{(k-1)n}}$$

et en dérivant $(k-1)(n+1)$ fois la relation évidente:

$$(4.7) \quad Q(x)u' = nQ'(x)u.$$

Cette équation différentielle est:

$$(4.8) \quad \begin{cases} Q(x)y^{(k)} + C_{(k-1)(n+1)}^1 Q'(x)y^{(k-1)} + \dots + C_{(k-1)(n+1)}^k Q^{(k)}y = \\ = n[Q'(x)y^{(k-1)} + C_{(k-1)(n+1)}^1 Q''(x)y^{(k-2)} + \dots + C_{(k-1)(n+1)}^{k-1} Q^{(k)}y]. \end{cases}$$

C'est une équation linéaire d'ordre k ; pour $Q(x) = 1 - x^2$, $k = 2$ on obtient l'équation que satisfont les polynomes de Legendre.

Soit p. ex. $Q(x) = x(1 - x^2)$. Les polynomes correspondant $P_n(x; Q)$ satisfont à l'équation:

$$(4.9) \quad x(1 - x^2)y''' + (n+2)(1 - 3x^2)y'' - 6(n+1)xy' + 2n(n+1)(2n+1)y = 0.$$

Les polynomes (2.3) d'Appell sont solutions de l'équation:

$$(4.10) \quad x(1 - x^2)z''' + 2(1 - 3x^2)z'' + 3(n-1)(n+2)xz' + 2n(n+1)(n+2)z = 0$$

et par conséquent cette équation est l'équation de Didon de l'équation (4.9).¹

5. Considérons un cas particulier de nos polynomes $P_n(x; Q)$, intéressant à un tout autre titre. Dans ce cas, les polynomes sont apparemment d'ordre k , mais il sont réductibles à des polynomes d'ordre inférieur, (les polynomes hypergéométriques) ce qui nous donne l'occasion d'envisager tous les cas lorsqu'il en est ainsi.

Prenons comme polynome-base le polynome: $Q(x) = x^p(x-1)$ et supposons $p > 1$ de sorte que $k = p + 1 > 2$.

L'équation (4.8) que satisfont les polynomes $P_n(x; Q)$ attachés à $Q(x)$, est:

$$(5.1) \quad x^p(x-1)y^{(p+1)} + [(n+1)p - n][(p+1)x - p]x^{p-1}y^{(p)} + \dots + (p+1)! [C_{p(n+1)}^{p+1} - n C_{p(n+1)}^p] y = 0.$$

On voit que cette équation est de la forme suivante

¹ Voir pour cela: P. Humbert: Sur les équations de Didon. Nouvelles Annales de Math. 1919, p. 443.

ce qui montre que la fonction hypergéométrique d'ordre $p + 1$, (5.3) se réduit à la fonction hypergéométrique de Gauss, et que les polynômes (5.5) $P_n(x; Q)$ sont des polynômes hypergéométriques particuliers. En effet, on a :

$$(5.7) \quad P_n(x; Q) = F(-n, pn + 1, 1, x)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ étant la fonction hypergéométrique de Gauss. Mais, le polynôme hypergéométrique: $F(-n, \alpha + n, \gamma, x)$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$(5.8) \quad F(-n, \alpha + n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma, n)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\gamma-1}(1-x)^{n+\gamma-\alpha}]$$

formule classique (Jacobi).

Par conséquent, il résulte que l'on a la relation curieuse:

$$(5.9) \quad \frac{1}{(pn)!} \cdot \frac{d^{pn}}{dx^{pn}} [x^{pn}(x-1)^n] = \frac{(x-1)^{-(p-1)n}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [x^n(x-1)^{pn}]$$

quels que soient les entiers p et n , relation qui peut d'ailleurs être vérifiée facilement. Il en résulte que les polynômes $P_n[x; x^p(x-1)]$ peuvent être définis comme dérivée d'ordre pn d'une certaine fonction, mais aussi, à part un facteur, comme dérivée d'ordre n , ce qui explique en quelque sorte pourquoi ils sont apparemment d'ordre $p + 1$, en réalité étant d'ordre deux. Nous avons ainsi mis en évidence une classe particulière de polynômes hypergéométriques, susceptibles d'être représentés de deux manières différentes, par les formules (5.9).

6. Le problème particulier envisagé précédemment nous engage à déterminer dans quel cas l'ordre du polynôme $P_n(x; Q)$ est inférieur au degré k du polynôme-base $Q(x)$, ce qui veut dire que $P_n(x; Q)$ tout en vérifiant l'équation (4.8), peut aussi être solution d'une équation linéaire de la même forme, (c.à.d. à coefficients polynômes) mais d'ordre inférieur. Dans le cas précédent, les polynômes $P_n[x; x^p(x-1)]$ s'exprimant à l'aide des polynômes hypergéométriques ordinaires vérifie aussi l'équation:

$$(6.1) \quad x(x-1)y'' + [(pn - n + 2)x - 1]y' - n(pn + 1)y = 0.$$

Par conséquent, il se pose la question de savoir dans quel cas l'équation (4.8) est irréductible au sens de Frobenius, c.à.d. que la suite des polynômes $P_n(x; Q)$ ne vérifie pas une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes de degré indépendant de n , et d'ordre inférieur.

$\lambda(x)$ étant un polynome de degré $k - 1$. La première relation:

$$(6.6) \quad Q_k(x)[R'_m(x) + R_{m-1}(x)] \equiv [cQ'_k(x) - \lambda(x)]R_m(x)$$

nous montre que $Q_k(x)$ et $R_m(x)$ ont en commun au moins un facteur du premier degré, car $cQ'_k(x) - \lambda(x)$ est de degré $k - 1$.

Soit $T(x)$ le polynome de degré $i \geq 1$ qui est le plus grand commun diviseur de $Q_k(x)$ et $R_m(x)$. La dernière relation (6.5) nous montre que $\lambda(x)$ admet aussi le diviseur $T(x)$, car $R_{m-k+1}(x)$ est prime avec $R_m(x)$. Posons:

$$(6.7) \quad Q_k(x) \equiv T(x)U(x); \quad R_m(x) \equiv T(x)V(x); \quad \lambda(x) \equiv T(x)\mu(x)$$

$U(x)$ et $V(x)$ étant primes entre eux.

La relation (6.6) devienne alors:

$$(6.8) \quad U(x)[R'_m(x) + R_{m-1}(x)] \equiv V(x)[cQ'_k(x) - T(x)\mu(x)]$$

$U(x)$ et $V(x)$ étant primes entre eux, il résulte que l'on doit avoir:

$$(6.9) \quad cQ'_k(x) - \mu(x)T(x) \equiv S(x)U(x)$$

$S(x)$ étant un polynome de degré $i - 1$. En remplaçant $Q'_k(x)$ par son expression, cette relation nous donne:

$$(6.10) \quad [cU'(x) - \mu(x)]T(x) \equiv [S(x) - cT'(x)]U(x).$$

Comme $U(x)$ est un polynome de degré $k - i$ et le polynome $cU'(x) - \mu(x)$ est de degré $k - i - 1$, il en résulte que $U(x)$ doit avoir en commun avec $T(x)$ au moins un facteur du premier degré ce qui entraîne que $Q_k(x) = T(x)U(x)$ admet au moins un facteur multiple d'ordre deux.

Par conséquent, si l'équation (6.2), et par cela même l'équation (4.8), est réductible à une équation d'ordre $k - 1$ au sens précisée plus haut, l'équation $Q_k(x) = 0$, admet des racines multiples au moins d'ordre deux de multiplicité.

Il en résulte que si le polynome-base $Q(x)$ a tous ses facteurs simples il n'est pas possible que les polynomes $P_n(x; Q)$ soient aussi solutions d'une équation d'ordre inférieur à k , l'équation (4.8) étant dans ce cas irréductible dans le sens précisé.

7. Une première généralisation des polynomes $P_n(x; Q)$, toujours définis à l'aide du même algorithme, peut s'obtenir de la manière suivante: Soit le

même polynome-base $Q(x)$ (2.1) et un autre polynome également donné $R(x)$, de degré m . Considérons les polynomes définis par l'opération:

$$(7.1) \quad P_n(x; Q, R) = \frac{1}{A_n} \cdot \frac{d^N}{dx^N} [Q^n(x)R(x)]$$

où $N = (k - 1)n + m$. On voit sans peine que $P_n(x; Q, R)$ est aussi un polynome de degré n , et qu'il a toutes ses racines réelles si $Q(x) = 0$, $R(x) = 0$ ont leurs racines réelles.

$P_n(x; Q, R)$ s'exprime facilement à l'aide des polynomes $P_n(x; Q)$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m . En effet, en écrivant la formule (7.1) sous la forme:

$$(7.1') \quad P_n(x; Q, R) = \frac{1}{A_n} \cdot \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} [Q^n(x) \cdot R(x)] \right\}$$

et en reprenant les mêmes calculs qu'au § 4, on trouve:

$$(7.2) \quad P_n(x; Q, R) = C_N^m R^{(m)}(x) P_n(x; Q) + C_N^{m-1} R^{(m-1)}(x) P'_n(x; Q) + \dots + R(x) P_n^{(m)}(x; Q).$$

D'ailleurs, cette formule généralise la formule (4.2) car à un facteur constant près $P_n(x; Q, Q') = P'_{n+1}(x; Q)$. Comme:

$$P_n(x; Q, R_1 + R_2) = P_n(x; Q, R_1) + P_n(x; Q, R_2)$$

il suffit de considérer les polynomes: $P_n(x; Q, x^p)$ ($p > 1$) pour pouvoir exprimer linéairement tout polynome $P_n(x; Q, R)$ à l'aide des combinaisons linéaires à coefficients constants des polynomes $P_n(x; Q, x^p)$.

Pour trouver l'équation différentielle que satisfont les polynomes $P_n(x; Q, R)$, posons: $v = Q^n(x)R(x)$. On a:

$$(7.3) \quad Q(x)R(x)v' = [nQ'(x)R(x) + Q(x)R'(x)]v = S(x)v.$$

Dérivons cette relation $N + m + k - 1 = M$ fois et soit $y = v^{(N)}$. On obtient l'équation:

$$(7.4) \quad \begin{cases} QRy^{(k+m)} + C_M^1(QR)y^{(k+m-1)} + \dots + C_M^{m+k}(QR)^{(m+k)}y = \\ = Sy^{(k+m-1)} + C_M^1S'y^{(k+m-2)} + \dots + C_M^{m+k-1}S^{(m+k-1)}y. \end{cases}$$

Par conséquent les polynomes $P_n(x; Q, R)$ sont d'ordre $m + k$, quoiqu'il peut se faire que certains polynomes particuliers soient d'ordre inférieur (p. ex. $P_n(x; Q, Q)$, $P_n(x; Q, Q')$...).

8. D'une manière générale, supposons donnés p polynomes-bases: $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... $Q_p(x)$ de degré respectivement égal à: k_1, k_2, \dots, k_p , et soient aussi p polynomes entiers: $f_1(\alpha), f_2(\alpha) \dots f_p(\alpha)$ dont les valeurs, pour les valeurs entières $\alpha, 1, 2, \dots$ de l'argument α , sont des entiers positifs.

Par un algorithme de la même nature que précédemment, on peut attacher à ces polynomes une suite de polynomes, $P_n(x; Q_1, Q_2, \dots, Q_p)$ définis par:

$$(8.1) \quad P_n(x; Q_1, Q_2, \dots, Q_p) = \frac{1}{A_{N_1 N_2 \dots N_p}} \cdot \frac{d^N}{dx^N} [Q_1^{N_1}(x) Q_2^{N_2}(x) \dots Q_p^{N_p}(x)]$$

où:

$$N_1 = f_1(n), N_2 = f_2(n), \dots, N_p = f_p(n) \text{ et } N + n = \sum_1^p k_i N_i.$$

Le polynome (8.1) est un polynome de degré n , et l'équation $P_n(x; Q_1, Q_2, \dots, Q_p) = 0$ a toutes ses racines réelles si les équations $Q_i = 0$ ont toutes leurs racines réelles. Ce polynome est en général d'ordre $k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$ comme on peut voir facilement en établissant l'équation qu'il vérifie. Posons pour cela:

$$v = Q_1^{N_1} Q_2^{N_2} \dots Q_p^{N_p}; \quad Q_1 Q_2 \dots Q_p = Q; \quad Q \frac{v'}{v} = S(x).$$

En dérivant $N + k_1 + k_2 + \dots + k_p - 1 = N + k - 1$ fois la relation:

$$(8.2) \quad Q(x) v' = S(x) v$$

et si l'on pose: $y = A_{N_1 \dots N_p} P_n(x; Q_1, Q_2, \dots, Q_p) = v^{(N)}$, on arrive à l'équation que satisfont les polynomes (8.1) savoir:

$$(8.3) \quad \begin{cases} Q(x)y^{(k)} + C_{N+k-1}^1 Q'(x)y^{(k-1)} + C_{N+k-1}^2 Q''(x)y^{(k-2)} + \dots + C_{N+k-1}^k Q^{(k)}(x)y = \\ = S(x)y^{(k-1)} + C_{N+k-1}^1 S'(x)y^{(k-2)} + \dots + C_{N+k-1}^{k-1} S^{(k-1)}(x)y \end{cases}$$

équation de la même forme que l'équation (7.4) qu'elle généralise.

Par conséquent, l'ordre des polynomes $P_n(x; Q_1, \dots, Q_p)$ ne dépend que du degré des polynomes-bases et nullement de celui des polynomes f_i . Par exemple, les polynomes:

$$(8.4) \quad \frac{d^{n^2}}{dx^{n^2}} \left[(x^2 - 1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right]$$

sont d'ordre deux; ils sont solutions de l'équation:

$$(8.5) \quad (x^2 - 1)y'' + (n^2 - n + 2)xy' - n(n^2 + 1)y = 0$$

ce qui montre qu'ils sont des polynomes de Jacobi, particuliers. L'équation (8.3) peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$(8.6) \quad \left\{ \begin{aligned} & Q(x)y^{(k)} - \left[\frac{\lambda - k}{1} Q'(x) + S(x) \right] y^{(k-1)} + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\lambda - k}{1} \left[\frac{\lambda - k + 1}{2} Q''(x) + S'(x) \right] y^{(k-2)} - \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{(\lambda - k)(\lambda - k + 1) \dots (\lambda - 2)}{(k - 1)!} \left[\frac{\lambda - 1}{k} Q^{(k)}(x) + S^{(k-1)}(x) \right] y = 0 \end{aligned} \right.$$

où $\lambda = -N + 1$. Écrite sous cette forme, elle peut être rapprochée de l'équation considérée par Pochhammer¹ comme généralisant l'équation de Gauss que satisfait la fonction hypergéométrique. Cette équation de Pochhammer est de la forme:

$$(8.7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(x)y^{(k)} - \left[\frac{\lambda - k}{1} \varphi'(x) + \psi(x) \right] y^{(k-1)} + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\lambda - k + 1}{1} \left[\frac{\lambda - k}{2} \varphi''(x) + \psi'(x) \right] y^{(k-2)} - \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)}{(k - 1)!} \left[\frac{\lambda - k}{k} \varphi^{(k)}(x) + \psi^{(k-1)}(x) \right] y = 0 \end{aligned} \right.$$

où:

$$\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) \text{ et } \psi(x) = \left[\frac{\alpha_1}{x - c_1} + \frac{\alpha_2}{x - c_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{x - c_k} \right] \varphi(x)$$

c.-à.-d. qu'ils sont de la même forme que $Q(x)$ et $S(x)$, la seule différence entre les deux équations étant relative aux coefficients numérique de $\psi^{(p)}(x)$. Nous nous contentons de signaler ici cette analogie des deux équations (8.1) et (8.7) sans insister d'avantage sur l'étude de l'équation (8.6).

¹ L. Pochhammer: Ueber hypergeometrischen Funkt. *n*^{ter} Ordnung. (Journ. für reine und angew. Math. B. LXXI 1870, p. 316).

9. On sait que la formule (1.1) a son analogue pour plusieurs variables, définissant des polynomes de plusieurs variables considérés par F. Didon¹ et Ch. Hermite² comme extension des polynomes de Legendre. En poursuivant cette même voie, il est possible d'étendre notre algorithme général (8.1) au cas des polynomes de plusieurs variables et de définir des suites de polynomes attachés à un système de p polynomes-bases donnés.

¹ F. Didon: Étude de certaines fonctions analogues aux fonc. X_n de Legendre. (Annales Sc. de l'École Normale S. tome V. 1868, p. 241, 269).

² Ch. Hermite: Œuvres t. II, p. 309 et suiv.

