SUR LA STRUCTURE DES ENSEMBLES LINÉAIRES DÉFINIS PAR UNE CERTAINE PROPRIÉTÉ MINIMALE.

PAR

L. TCHAKALOFF

à SOFIA.

La formule des accroissements finis, celle de Taylor, certaines formules dans la théorie de l'interpolation etc. renferment un nombre indéterminé ξ dont on ne connaît au cas général que les limites entre lesquelles il peut varier. Comme j'ai démontré ailleurs[1], l'intervalle de variabilité du nombre ξ peut être réduit à un intervalle plus petit que celui donné par la théorie générale, lorsqu'il s'agit de l'application de ces formules aux polynomes réels d'un certain degré. Ainsi dans le cas de la formule des accroissements finis,

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi) \tag{1}$$

on peut affirmer que, α_n désignant le plus grand zéro du polynome de Legendre

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

à tout polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq 2n$ correspond au moins un ξ de l'intervalle

$$\frac{a+b}{2}-\alpha_n\frac{b-a}{2}\leqq x\leqq\frac{a+b}{2}+\alpha_n\frac{b-a}{2} \tag{2}$$

[1] Sur le théorème des accroissements finis. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. *192*, 1931, p. 32; Sur l'intervalle de variabilité de ξ dans la formule

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)dx=\varphi(\xi)\int_a^b p(x)dx.$$

Id., t. *192*, 1931, p. 330; Sur une propriété des polynomes trigonométriques. Id., t. *195*, 1932, p. 411.

satisfaisant à (1); de plus, c'est le plus petit intervalle jouissant de la même propriété. On peut donc dire que, étant donnés a, $b > a$ et n, l'intervalle (2) de variabilité de ξ dans la formule (1) représente un *intervalle minimum* par rapport à la classe des polynomes réels de degré $\leqq 2n$. Au lieu de chercher un tel intervalle on pourrait poser le problème d'une façon plus générale en demandant s'il existe un *ensemble minimum* jouissant de propriétés analogues. Il s'agit donc de l'existence et de la structure d'un ensemble M_k de nombres réels tel que 1° à tout polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq k$ correspond un nombre ξ de M_k satisfaisant à (1) et 2° aucune partie propre de M_k ne possède pas la propriété 1°. La même question se pose aussi pour la formule de Taylor et pour les autres formules analogues appliquées aux polynomes réels d'un certain degré. Dans ce qui suit je me propose de résoudre ce problème dans toute sa généralité en appropriant convenablement ma méthode que j'ai déjà appliquée au problème des intervalles minima.

Dans le § 1 je rappelle quelques définitions et propriétés relatifs à une chaîne de polynomes de Tchébycheff correspondant à une certaine fonction croissante $\psi(x)$ et j'énonce le problème général à résoudre. Les trois paragraphes suivants sont consacrés aux démonstrations de trois théorèmes qui nous donnent la résolution complète du problème posé. Enfin dans le § 5 je m'occupe de quelques applications des théorèmes généraux comprenant comme des cas particuliers les résultats que j'ai obtenus aux notes cités.

Ici je publie pour la première fois les démonstrations des théorèmes en question dont je me suis borné de donner seulement les énoncés dans une note[2] présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 21 août 1933.

§ 1.

1. Soit $\psi(x)$ une fonction monotone non décroissante, définie pour toute valeur de la variable réelle x. Supposons de plus que les $k+1$ intégrales de Stieltjes

$$I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu d\psi(x), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, k$$

convergent[3] et que $\psi(x)$ a au moins $n = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ points de croissance. On

[2] Sur un problème de minimum concernant une certaine classe de polynomes. C. R. t. *197*, p. 572.

[3] Pour cela il faut et il suffit que $\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\psi = \lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b x^k d\psi$ existe.

démontre facilement qu'il existe une chaîne de $n+1$ polynomes (polynomes de Tchébycheff généralisés)

$$P_0 = c_0,\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x) \tag{3}$$

tels que

1° $P_\nu(x)$ est de degré ν;

2° le coefficient de x^ν dans $P_\nu(x)$ est égal à un nombre positif c_ν donné d'avance;

3° $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_\mu(x) P_\nu(x) d\psi = 0$ pour $\mu \neq \nu$ et $\mu + \nu \leqq k$.

Les polynomes (3) sont d'ailleurs complètement déterminés par les conditions 1°, 2° et 3° à l'exception du polynome $P_n(x)$ lorsque k est pair; dans ce cas $P_n(x)$ peut être remplacé par tout polynome de la famille $P_n(x) + cP_{n-1}(x)$ où c désigne une constante réelle et arbitraire. Signalons les propriétés suivantes des polynomes $P_\nu(x)$:

a) Les coefficients de $P_\nu(x)$ sont réels;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_\nu(x) Q(x) d\psi = 0$ pour tout polynome $Q(x)$ de degré μ tel que $\mu < \nu$ et $\mu + \nu \leqq k$;

c) $P_\nu(x)$ a tous ses zéros réels et simples;

d) Quel que soit le nombre réel c, les zéros du polynome $P_\nu + cP_{\nu-1}$ sont aussi réels et simples; pour $\nu \geqq 2$ entre deux zéros consécutifs de ce polynome est compris un et un seul zéro de $P_{\nu-1}(x)$. Soient α' et β' les zéros extrêmes de $P_{\nu-1}(x)$ $(\alpha' \leqq \beta')$ et α et $\beta > \alpha$ les zéros extrêmes de $P_\nu(x) + cP_{\nu-1}(x)$; lorsque c croît de $-\infty$ à $+\infty$, α et β sont des fonctions continues et décroissantes de c dont la première diminue constamment de α' à $-\infty$ et la seconde de $+\infty$ à β'.

e) Si la fonction $\psi(x)$ est constante pour $x < a$ et pour $x > b$, tous les zéros de $P_\nu(x)$ sont compris dans l'intervalle fini $a \leqq x \leqq b$, une exception éventuelle pouvant avoir lieu pour $P_n(x)$ lorsque k est pair $(k = 2n-2)$.

2. Envisageons la classe C_k de tous les polynomes réels $\varphi(x)$ de degré $\leqq k$ satisfaisant à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\psi(x) = 0. \tag{4}$$

Il est évident que tout polynome $\varphi(x)$ de la classe C_k s'annule au moins pour une valeur réelle ξ de x qui varie en général avec $\varphi(x)$. Je me propose de restreindre autant que possible le champ de variabilité des nombres ξ ainsi obtenus. Je vais tout de suite préciser le sens que j'attribue aux mots »autant que possible». Convenons de dire qu'un ensemble E_k de nombres réels est un *ensemble minimum par rapport à la classe* C_k lorsqu'il remplit les conditions suivantes:

1° à tout polynome $\varphi(x)$ de C_k correspond au moins un ξ de E_k tel que $\varphi(\xi) = 0$;

2° aucune partie propre (c'est à dire aucun sous-ensemble vrai) de E_k ne jouit pas de la propriété 1°; en d'autres termes, quel que soit le nombre ξ de E_k, on peut lui faire correspondre un polynome $\varphi(x)$ de C_k qui ne s'annule dans E_k que pour $x = \xi$.

Notre but est de déterminer effectivement tous les ensembles minima correspondant à la classe C_k de polynomes.

Dans nos recherches nous nous servirons souvent de deux remarques qui découlent immédiatement de la définition ci-dessus et qu'on peut énoncer ainsi:

a) Si E' et E sont deux ensembles minima par rapport à C_k, tels que $E' \subset E$, on a $E' = E$.

b) Si le polynome $\varphi(x)$ de C_k n'a qu'un seul zéro réel ξ, le nombre ξ appartient à tout ensemble minimum E_k.

Considérons d'autre part la classe $\bar{C}_k$ de tous les polynomes réels $f(x)$ de degré $\leqq k$ et appelons l'ensemble $\bar{\bar{E}}_k$ de nombres réels un *ensemble minimum par rapport à la classe* $\bar{\bar{C}}_k$ lorsqu'il jouit des propriétés suivantes:

1^{bis} à tout polynome $f(x)$ de $\bar{C}_k$ correspond au moins un ξ de $\bar{E}_k$, tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\psi = f(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} d\psi; \tag{5}$$

2^{bis} aucune partie propre de $\bar{\bar{E}}_k$ ne possède pas la propriété 1^{bis}.

Je dis que l'ensemble des ensembles E_k est identique avec l'ensemble des ensembles $\bar{E}_k$. En d'autres termes, un ensemble minimum E_k est en même temps un ensemble minimum $\bar{\bar{E}}_k$ et réciproquement. Soit en effet E_k un ensemble minimum par rapport à la classe C_k. Si $f(x)$ est un polynome quelconque de la classe $\bar{C}_k$ et si l'on définit le nombre A par l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\psi = A\int_{-\infty}^{\infty} d\psi,$$

on voit que $\varphi(x) = f(x) - A$ appartient à C_k et que, par conséquent, il existe un ξ de E_k tel que $f(\xi) = A$; l'équation (5) est donc toujours vérifiée par un ξ de E_k, et cela quel que soit le polynome $f(x)$ de $\bar{C}_k$. Soit d'autre part ξ_0 un nombre quelconque de E_k. D'après la condition 2° il existe un polynome $\varphi(x)$ de C_k qui ne s'annule dans E_k que pour $x = \xi_0$. Or cela signifie que, si l'on pose dans (5) $f(x) = \varphi(x)$, cette équation n'est pas satisfaite par aucune valeur de ξ appartenant à E_k sauf par $\xi = \xi_0$. Donc les conditions 1^{bis} et 2^{bis} sont satisfaites si l'on y remplace $\bar{E}_k$ par E_k.

On démontre aisément par la voie réciproque que tout ensemble $\bar{E}_k$ est en même temps un ensemble E_k.

L'analyse précédente nous montre que le problème de l'existence et de la structure des ensembles $\bar{E}_k$ est le même que celui des ensembles E_k.

§ 2.

Premier cas: k impair $(k = 2n - 1)$.

Désignons par x_0 le zéro de $P_1(x) = c_1(x - x_0)$. Si k est égal à 1, on voit sans peine que E_1 ne peut contenir que le seul nombre $\xi = x_0$ et que l'ensemble formé de cet élément unique est en effet un ensemble minimum par rapport à C_1.

Supposons maintenant que $n = \dfrac{k+1}{2}$ est supérieur à 1 et désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros de $P_n(x)$, rangés par ordre de grandeur croissante. Soit ε un nombre positif et tachons de déterminer le nombre réel ξ de sorte que le polynome de degré k

$$\varphi(x) = (x - \xi)\left\{\varepsilon + \frac{P_n^2}{(x - x_n)^2}\right\} \tag{6}$$

appartienne à C_k. La condition (4) appliquée à ce polynome nous donne, après quelques réductions faciles, l'équation linéaire en ξ

$$(x_n - \xi)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n^2}{(x - x_n)^2}\,d\psi + \varepsilon(x_0 - \xi)I_0 = 0.$$

x_0 étant compris entre x_1 et x_n, on en conclut que ξ diminue de $x_n - 0$ à $x_0 + 0$ lorsque ε croît de $+0$ à $+\infty$. À tout nombre ξ satisfaisant aux inégalités $x_0 < \xi < x_n$ on peut donc faire correspondre un nombre positif ε tel que le polynome (6) appartienne à C_k et ne s'annule pas pour aucune valeur réelle de x sauf pour $x = \xi$. On démontre de même l'existence d'un polynome de la forme

$$\varphi(x) = (x - \xi)\left\{\varepsilon + \frac{P_n^2}{(x - x_1)^2}\right\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

appartenant à C_k et ne possédant qu'un seul zéro ξ choisi d'avance entre x_1 et x_0. En tenant compte du fait que $P_1(x) = c_1(x - x_0)$ est aussi un polynome de C_k qui ne s'annule que pour $x = x_0$, nous pouvons affirmer, d'après la remarque b) du paragraphe précédent (p. 80), que *tout ensemble minimum E_k contient les nombres de l'intervalle ouvert $x_1 < x < x_n$.*

Nous allons d'autre part démontrer que, si $\frac{k+1}{2} = n$ est supérieur à 2, un polynome arbitraire de C_k s'annule au moins une fois à l'intérieur du même intervalle. Soit $\varphi(x)$ un tel polynome. Je dis que le polynome

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu)\left(\frac{P_n(x)}{(x - x_\nu)P_n'(x_\nu)}\right)^2$$

de degré $\leqq k - 1$ appartient aussi à C_k. En effet, la différence $\Phi(x) - \varphi(x)$ s'annulant pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a identiquement

$$\Phi(x) = \varphi(x) + P_n(x)Q(x),$$

où $Q(x)$ désigne un polynome de degré $\leqq n - 1$. On en déduit en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi + \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)Q(x)\,d\psi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \varphi(x_\nu) = 0, \quad \text{où} \quad A_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_\nu)P_n'(x_\nu)}\right)^2 d\psi. \tag{7}$$

Les coefficients A_ν étant positifs, la formule (7) montre que, si tous les nombres $\varphi(x_\nu)$ ne sont pas nuls, il y en a deux de signes contraires. En tous cas $\varphi(x)$

s'annule donc au moins une fois à l'intérieur de l'intervalle $x_1 < x < x_n$. Cet intervalle faisant partie de tout ensemble minimum, il est évident, d'après la remarque a) du § 1 (p. 80), qu'il représente, dans le cas considéré, le seul ensemble minimum.

Le raisonnement n'est plus applicable au cas $n = 2$ ($k = 3$) puisqu'il pourrait arriver que $\varphi(x)$ ait deux zéros qui coïncident avec x_1 et $x_2 = x_n$ sans en avoir un troisième entre x_1 et x_2. Mais, dans ce cas exceptionnel, les polynomes de C_3 qui ne s'annulent pas entre x_1 et x_2 ont la forme spéciale $\varphi(x) = QP_2(x)$, Q désignant un polynome du premier degré ou bien une constante, et il suffit de joindre à l'intervalle $x_1 < x < x_2$ une de ses extrémités pour obtenir un ensemble minimum par rapport à C_3; on obtient ainsi deux intervalles semi-fermés qui représentent les seuls ensembles minima par rapport à C_3.

Nous pouvons énoncer les résultats ci-dessus comme suit:

Théorème I. *Soit k un nombre naturel impair, $k = 2n - 1$, et désignons par x_1 et x_n les zéros extrêmes du polynome de Tchébycheff $P_n(x)$. Si k est supérieur à 3, le seul ensembleminimum par rapport à la classe C_k est l'intervalle ouvert $x_1 < x < x_n$; dans le cas $k = 3$ il existe deux ensembles minima coïncidant avec les deux intervalles semi-ouverts $x_1 \leqq x < x_2$ et $x_1 < x \leqq x_2$, où x_1 et x_2 sont les zéros de $P_2(x)$; enfin il existe un seul ensemble minimum par rapport à la classe C_1 qui ne contient qu'un nombre x_0, zéro du polynome $P_1(x)$.*

§ 3.

Deuxième cas: $k > 2$ et pair ($k = 2n - 2$, $n > 2$).

Les zéros du polynome

$$Q(x) = P_n(x) + cP_{n-1}(x) \tag{8}$$

étant réels et simples quel que soit le coefficient réel c, convenons de dire que les nombres α et $\beta > \alpha$ sont *conjugués* lorsqu'ils coïncident avec les zéros extrêmes d'un polynome de la forme (8). En désignant par α' et β' les zéros extrêmes de $P_{n-1}(x)$, on a les inégalités

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$$

et l'on voit sans peine qu'on peut choisir arbitrairement l'un des nombres conjugués α et β en dehors de l'intervalle $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$; l'autre est alors complètement déterminé. De plus, lorsque α croît de $-\infty$ à α', le nombre conjugué β croît aussi de β' à $+\infty$. — Nous allons utiliser dans ce qui suit le lemme suivant:

Lemme I. *Désignons par α et β deux nombres conjugués et par λ et $\mu > \lambda$ les zéros de $P_2(x)$. Si les nombres ξ_1 et ξ_2 satisfont aux inégalités*

$$\alpha \leqq \xi_1 \leqq \lambda, \quad \mu \leqq \xi_2 \leqq \beta, \quad \mu - \lambda < \xi_2 - \xi_1 < \beta - \alpha, \tag{9}$$

il existe un polynome $\varphi(x)$ de la classe C_{2n-2} n'ayant que les deux zéros réels ξ_1 et ξ_2.

Il suffit de démontrer que, $Q(x)$ étant le polynome (8) dont les zéros extrêmes sont α et β, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que le polynome

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\left\{\varepsilon + \frac{Q^2(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}\right\} \tag{10}$$

appartienne à C_{2n-2}. Dans ce but nous écrirons le produit $(x-\xi_1)(x-\xi_2)$ sous les deux formes suivantes:

$$(x-\xi_1)(x-\xi_2) = A(x-\alpha)^2 + B(x-\alpha)(x-\beta) + C(x-\beta)^2,$$
$$(x-\xi_1)(x-\xi_2) = L(x-\lambda)^2 + M(x-\lambda)(x-\mu) + N(x-\mu)^2,$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{(\beta-\xi_1)(\beta-\xi_2)}{(\beta-\alpha)^2} \geqq 0, \quad C = \dfrac{(\alpha-\xi_1)(\alpha-\xi_2)}{(\beta-\alpha)^2} \geqq 0, \\[2ex] L = \dfrac{(\mu-\xi_1)(\mu-\xi_2)}{(\mu-\lambda)^2} \leqq 0, \quad N = \dfrac{(\lambda-\xi_1)(\lambda-\xi_2)}{(\mu-\lambda)^2} \leqq 0, \\[2ex] \qquad A + C > 0, \quad L + N < 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

En tenant compte des relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^2(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} d\psi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x-\lambda)(x-\mu)\, d\psi = 0,$$

la condition (4), appliquée au polynome (10), nous donne l'équation linéaire en ε

$$A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^2(x)}{(x-\beta)^2} d\psi + C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^2(x)}{(x-\alpha)^2} d\psi + \varepsilon\left\{L\int_{-\infty}^{\infty}(x-\lambda)^2 d\psi + N\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 d\psi\right\} = 0$$

dont la racine est bien positive et finie, d'après les inégalités (11).

Nous sommes maintenant en état de montrer que l'intervalle ouvert $\alpha < x < \beta$, dont les extrémités sont des nombres conjugués, représente un ensemble minimum par rapport à C_{2n-2}. En désignant par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les zéros du polynome correspondant (8) ($x'_1 = \alpha$, $x'_n = \beta$), et par $\varphi(x)$ un polynome arbitraire de C_{2n-2}, on démontre comme au paragraphe précédent que le polynome de degré $\leqq 2n-2$

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x'_\nu) \left(\frac{Q(x)}{(x - x'_\nu)\, Q'(x'_\nu)} \right)^2$$

appartient à la classe C_{2n-2}. On a en effet $\Phi(x'_\nu) = \varphi(x'_\nu)$, de sorte que la différence $\Phi(x) - \varphi(x)$ représente le produit de $Q(x)$ par un polynome $R(x)$ de degré $\leqq n-2$. D'après les propriétés connus des polynomes $\varphi(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\psi + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) R(x)\, d\psi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=1}^{n} A'_\nu \varphi(x'_\nu) = 0, \quad \text{où} \quad A'_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q(x)}{(x - x'_\nu)\, Q'(x'_\nu)} \right)^2 d\psi. \tag{12}$$

Les intégrales A'_ν étant positives, on conclut de (12) que, si tous les $\varphi(x'_\nu)$ ne sont pas nuls, il y en a deux de signes contraires. Le polynome $\varphi(x)$ s'annule donc nécessairement au moins une fois à l'intérieur de l'intervalle $\alpha < x < \beta$.

Soit d'autre part ξ_0 un nombre quelconque du même intervalle. Pour que cet intervalle soit un ensemble minimum par rapport à C_{2n-2}, il faut encore qu'il existe un polynome $\varphi(x)$ de C_{2n-2} qui ne devient pas nul pour aucune valeur de x entre α et β sauf pour $x = \xi_0$.

Lorsque ξ_0 est compris entre les zéros extrêmes α' et β' de $P_{n-1}(x)$, nous avons déjà établi au paragraphe précédent la possibilité de construire un polynome de la classe C_{2n-3} (appartenant, par conséquent, aussi à la classe C_{2n-2}) qui a le seul zéro ξ_0.

Supposons maintenant que ξ_0 appartienne à l'intervalle semi-ouvert $\beta' \leqq x < \beta$. Vu les inégalités $\alpha < \alpha' \leqq \lambda < \mu \leqq \beta' < \beta$ les hypothèses du lemme I sont remplies si l'on pose $\xi_1 = \alpha$, $\xi_2 = \xi_0$; il existe donc un polynome $\varphi(x)$ de C_{2n-2} ne possédant que le seul zéro ξ_0 entre α et β. On démontre de même que, si ξ_0 satisfait aux inégalités $\alpha < \xi_0 \leqq \alpha'$, il existe un polynome de C_{2n-2} qui ne s'annule sur l'axe réel que pour $x = \xi_0$ et $x = \beta$. On peut donc toujours construire un polynome de C_{2n-2} qui ne s'annule que pour une seule valeur de x dans l'intervalle $\alpha < x < \beta$, choisie d'avance, c. q. f. d.

Nous avons ainsi établi que tout intervalle ouvert dont les extrémités sont deux nombres conjugués représente un ensemble minimum par rapport à C_{2n-2}. Un tel intervalle étant déterminé complètement par la valeur de la constante réelle c dans la combinaison linéaire (8), il existe une infinité non dénombrable d'ensembles minima par rapport à C_{2n-2}.

Lorsque le nombre réel c tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, le plus grand zéro du polynome (8) tend vers β' ou $+\infty$ et le plus petit tend vers $-\infty$ ou α'. Nous allons montrer rigoureusement que les deux intervalles infinis $\alpha' < x < \infty$ et $-\infty < x < \beta'$ représentent aussi des ensembles minima par rapport à C_{2n-2}. Considérons dans ce but un polynome $\varphi(x)$ de C_{2n-2} qui n'est pas identiquement nul. Nous pouvons alors supposer, sans restreindre la généralité, que $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ pour $x \to +\infty$. Choisissons la constante $\varrho \geqq 0$ de manière que le degré de $\varphi(x) - \varrho P_{n-1}^2(x)$ soit inférieur à $2n-2$. En désignant par a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ les zéros de $P_{n-1}(x)$, on a

$$\varphi(x) - \varrho P_{n-1}^2(x) - \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(a_\nu) \left(\frac{P_{n-1}(x)}{(x-a_\nu) P'_{n-1}(a_\nu)} \right)^2 = P_{n-1} \cdot R,$$

où $R(x)$ est un polynome en x de degré $\leqq n-2$, de sorte que

$$\varrho \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}^2 \, d\psi + \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(a_\nu) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{P_{n-1}(x)}{(x-a_\nu) P'_{n-1}(a_\nu)} \right)^2 d\psi = 0.$$

Les coefficients des $n-1$ quantités $\varphi(a_\nu)$ étant positifs, la dernière équation ne peut subsister que lorsque au moins une de ces quantités est négative, ou bien lorsque $\varrho = 0$ et $\varphi(a_\nu) = 0$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$. Dans tout cas le polynome $\varphi(x)$ doit s'annuler pour un x supérieur au plus petit zéro α' de $P_{n-1}(x)$.

Soit d'autre part ξ_0 un nombre supérieur à α' et supposons d'abord que $\xi_0 < \beta'$. Comme nous avons déjà montré au § 2, on peut déterminer un polynome de la classe C_{2n-3} n'ayant que le zéro réel unique $x = \xi_0$. Dans le cas où $\xi_0 \geqq \beta'$ nous pouvons choisir les nombres conjugués α et β de manière que $\beta > \xi_0$, et construire ensuite un polynome de la classe C_{2n-2} ayant la forme

$$(x-\alpha)(x-\xi_0)\left\{\varepsilon + \frac{Q^2(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}\right\}, \quad \text{où} \qquad \varepsilon > 0.$$

Il est évident que, dans les deux cas, il existe un polynome de C_{2n-2} qui possède dans l'intervalle infini $\alpha' < x < \infty$ le zéro unique et choisi d'avance $x = \xi_0$, ce qui prouve que cet intervalle représente bien un ensemble minimum par rapport à C_{2n-2}.

On démontre par une modification convenable des raisonnements ci-dessus que l'intervalle infini $-\infty < x < \beta'$ est aussi un ensemble minimum.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des ensembles minima par rapport à la classe C_{2n-2} qui représentent des intervalles ouverts (finis ou infinis). Pour nous faire une idée de la structure d'un ensemble minimum *quelconque*, envisageons un tel ensemble E et supposons qu'il ne coïncide pas avec l'un des intervalles infinis $\alpha' < x < \infty$ et $-\infty < x < \beta'$. Nous savons déjà que E contient tous les nombres de l'intervalle ouvert $\alpha' < x < \beta'$. Mais cet intervalle ne pourrait pas représenter un ensemble minimum même si l'on lui ajoute l'un ou les deux de ses extrémités α' et β', puisqu'il est partie propre de tout intervalle $\alpha < x < \beta$ dont les extrémités sont des nombres conjugués. Or il est facile de voir qu'au moins un des nombres α', β' doit appartenir à E; en effet, on peut déterminer, d'après le lemme I, le nombre positif ε de sorte que le polynome

$$(x-\alpha')(x-\beta')\left\{\varepsilon + \frac{Q^2(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}\right\}$$

soit de la classe C_{2n-2}; ici α et β désignent deux nombres conjugués quelconques et $Q(x)$ — le polynome correspondant. Supposons par exemple que β' est un nombre de E. L'ensemble complémentaire $\overline{E}$ de E possède alors au moins un nombre β supérieur à β' puisque, dans le cas contraire, tous les nombres supérieurs à α' devraient appartenir à E et cet ensemble coïnciderait avec l'intervalle $\alpha' < x < \infty$, contrairement à notre hypothèse. Désignons par α le nombre conjugué de β et par ξ un nombre quelconque satisfaisant aux inégalités $\alpha < \xi \leqq \alpha'$. Les hypothèses du lemme I étant satisfaites si l'on pose $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \beta$, il est évident que ξ est nécessairement un nombre de E. En d'autres termes, tout nombre de l'intervalle $\alpha < x \leqq \alpha'$ appartient à E. D'autre part tous les nombres $< \beta'$ ne pouvant pas appartenir à E, l'ensemble complémentaire $\overline{E}$ contient des nombres $\leqq \alpha$. Soit α_0 la limite supérieure exacte de ces nombres. D'après sa définition, α_0 est caractérisé par les propriétés suivantes: 1° l'intervalle $\alpha_0 < x \leqq \alpha'$ fait partie de E; 2° dans tout voisinage de α_0 il-y-a des nombres (éventuellement le nombre α_0 même) qui n'appartiennent pas à E. Soit β_0 le nombre conjugué de α_0. Je dis que l'ensemble E est identique avec l'intervalle ouvert $\alpha_0 < x < \beta_0$. Il suffit pour cela de montrer que tout nombre de l'intervalle $\beta' < x < \beta_0$ est un nombre de E. En désignant par ξ un tel nombre, nous pouvons choisir le nombre α_1 de l'ensemble $\overline{E}$ aussi rapproché de α_0 que le nombre conjugué correspondant β_1 soit supérieur à ξ. Le lemme I assure l'existence d'un polynome de la classe C_{2n-2} n'ayant que les deux zéros réels α_1 et ξ dont le premier appartient à $\overline{E}$ et, par conséquent, le second fait nécessairement partie de E. Donc tout nombre de l'intervalle $\alpha_0 < x < \beta_0$ est un nombre de E, ce qui prouve que E coïncide avec cet intervalle.

Les résultats de l'analyse précédente peuvent être énoncés ainsi:

Théorème II. *n étant un nombre naturel > 2, tout ensemble-minimum par rapport à la classe C_{2n-2} représente un intervalle ouvert, fini ou infini. Pour que l'intervalle $\alpha < x < \beta$ soit un tel ensemble, il faut et il suffit que ses extrémités α, β soient les zéros extrêmes d'un polynome de la forme*

$$Q(x) = P_n(x) + cP_{n-1}(x),$$

c étant une constante réelle et arbitraire. Il y a de plus deux intervalles infinis jouissant de la même propriété, à savoir les intervalles $-\infty < x < \beta'$ et $\alpha' < x < \infty$, où α' et $\beta' > \alpha'$ désignent les zéros extrêmes de $P_{n-1}(x)$.

§ 4.

Troisième cas: $k = 2$.

Soit E un ensemble minimum par rapport à la classe C_2. On voit sans peine que tout polynome du premier degré appartenant à C_2 coïncide à un facteur constant près avec $P_1(x)$; le zéro unique x_0 de $P_1(x)$ est évidemment un nombre de E. Le lemme suivant caractérise complètement les polynomes du second degré de la classe C_2:

Lemme II. *Pour que le polynome $\varphi(x)$ du second degré appartienne à la classe C_2, il faut et il suffit qu'il ait deux zéros réels α et β liés par la relation*

$$(13) \qquad -(\alpha - x_0)(\beta - x_0) = \tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 d\psi : \int_{-\infty}^{\infty} d\psi.$$

En effet, $\varphi(x)$ peut être mis sous la forme

$$\varphi(x) = c(x-x_0)^2 + c'(x-x_0) + \varphi(x_0) \qquad (c \neq 0)$$

et la condition (4) devient

$$c\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2 d\psi + \varphi(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} d\psi = 0,$$

c'est-à-dire $\varphi(x_0) = -c\tau^2$.

La dernière relation combinée avec $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x^2} = c$ montre bien que $\varphi(x)$ a deux zéros réels α et β liés par (13).

Deux nombres réels α et $\beta > \alpha$ satisfaisant à la relation (13) — bref deux nombres conjugués — vérifient toujours les inégalités $\alpha < x_0 < \beta$ et l'un d'eux, par exemple α, peut être pris arbitrairement dans l'intervalle $-\infty < x < x_0$; l'autre est alors complètement déterminé.

Soit A l'ensemble des nombres de E inférieurs à x_0 et A' l'ensemble complémentaire de A par rapport à l'intervalle infini I: $-\infty < x < x_0$, de sorte que

$$A + A' = I, \quad AA' = 0.$$

À tout nombre a' de A' correspond un nombre conjugué $b > x_0$. L'ensemble B des nombres b ainsi obtenus est un sous-ensemble de E. En effet, à tout nombre b de B correspond un nombre conjugué a' de A' et un polynome $\varphi(x) = (x-a')(x-b)$ de la classe C_2 dont le plus petit zéro a' n'appartient pas à E; donc b doit être un élément de E. Or l'ensemble $E' = A + (x_0) + B$ est un ensemble minimum par rapport à C_2 puisque de deux nombres conjugués un et un seul appartient à E'. E' étant un sous-ensemble de E, on en conclut que ces deux ensembles sont identiques.

L'analyse précédente nous montre en même temps qu'à tout ensemble A de nombres $< x_0$ correspond de la manière indiquée plus haut un ensemble B de nombres supérieurs à x_0 de sorte que $A + (x_0) + B$ est un ensemble minimum par rapport à C_2. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème III. *Posons* $\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2 d\psi : \int_{-\infty}^{\infty} d\psi$ *et partageons tous les nombres inférieurs à* x_0 *en deux ensembles complémentaires* A *et* A'[4]. *La formule*

---

[4] Un des ensembles A et A' peut être vide.

$$b = x_0 + \frac{\tau^2}{x_0 - a'}$$

fait correspondre à tout nombre a' de A' un nombre b supérieur à x_0. En désignant par B l'ensemble des nombres b ainsi obtenus, l'ensemble $A + (x_0) + B$ représente l'ensemble minimum le plus général par rapport à la classe C_2.

§ 5.

Applications.

1. Considérons comme premier exemple le cas où $\psi(x)$ n'a qu'un nombre fini de points de croissance. Étant donnés les m nombres positifs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et les m nombres réels et différents

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m,$$

définissons $\psi(x)$ de la manière suivante:

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < a_1;$$
$$\psi(x) = A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu \quad \text{pour} \quad a_\nu \leqq x < a_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-1;$$
$$\psi(x) = A_1 + A_2 + \cdots + A_m \quad \text{pour} \quad x \geqq a_m.$$

La condition (4) devient alors

$$A_1\varphi(a_1) + A_2\varphi(a_2) + \cdots + A_m\varphi(a_m) = 0. \tag{14}$$

Pour $\nu \leqq m$ le polynome $P_\nu(x)$ est donné par

$$(-1)^\nu P_\nu(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots x^\nu \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots p_\nu \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots p_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\nu-1} & p_\nu & p_{\nu+1} & \cdots p_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad p_r = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu a_\nu^r.$$

On a spécialement

$$P_m(x) = c_m(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m), \quad c_m = A_1 A_2 \cdots A_m \prod_{\substack{\mu,\,\nu=1 \\ \mu>\nu}}^{n} (a_\mu - a_\nu)^2.$$

Si l'on entend par C_k la classe de tous les polynomes réels $\varphi(x)$ de degré $\leqq k$ soumis à la condition (14), en démontre facilement par une analyse directe que pour $k \geqq 2m - 1 \geqq 3$ il n'existe qu'un ou deux ensembles minima représentant des intervalles ouverts ou semi-ouverts dont les extrémités coïncident avec a_1 et a_m. Au contraire, lorsque k est inférieur à $2m-1$, les théorèmes généraux I, II et III sont applicables au cas spécial considéré puisque le nombre m des points de croissance de $\psi(x)$ est alors $\geqq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

On obtient ainsi le tableau suivant:

1° $k \geqq 2m - 1 > 3$. L'intervalle ouvert $a_1 < x < a_m$ représente le seul ensemble minimum.

2° $k \geqq 2m - 1 = 3$. Il existe deux ensembles minima coïncidant avec les intervalles semi-ouverts $a_1 \leqq x < a_2$ et $a_1 < x \leqq a_2$.

3° $k = 2n - 1$, $2 < n < m$. En désignant par x_1 et x_n les zéros extrêmes du polynome $P_n(x)$, l'intervalle ouvert $x_1 < x < x_n$ représente le seul ensemble minimum.

4° $k = 3$, $m > 2$. Il n'y a que deux ensembles minima: $x_1 \leqq x < x_2$ et $x_1 < x \leqq x_2$, où x_1 et x_2 sont les zéros de $P_2(x)$.

5° $k = 2n - 2$, $m \geqq n > 2$. Chaque ensemble minimum E_{2n-2} représente un intervalle ouvert (fini ou infini); pour que l'intervalle fini $\alpha < x < \beta$ soit un ensemble minimum, il faut et il suffit que α et β soient les zéros extrêmes d'un polynome de la forme

$$P_n(x) + cP_{n-1}(x),$$

où c est une constante réelle et arbitraire. En désignant par α' et $\beta' > \alpha'$ les zéros extrêmes de $P_{n-1}(x)$, les intervalles infinis

$$-\infty < x < \beta' \quad \text{et} \quad \alpha' < x < +\infty$$

représentent aussi deux ensembles minima.

6° $k = 2$, $m > 1$. Partageons tous les nombres inférieurs à $x_0 = \dfrac{\Sigma A_\nu a_\nu}{\Sigma A_\nu}$ en deux ensembles complémentaires A et A' et faisons correspondre à tout nombre a' de A' un nombre b supérieur à x_0, tel que

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu (a_\nu - a')(a_\nu - b) = 0.$$

En désignant par B l'ensemble des nombres b ainsi obtenus, la somme $A + (x_0) + B$ représente l'ensemble minimum E_2 le plus général.

2. **Théorème des accroissements finis.**

Si l'on définit $\psi(x)$ par les conditions

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -1 \quad \text{pour} \quad x < -1, \\ \psi(x) &= x \quad \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 1, \\ \psi(x) &= 1 \quad \text{pour} \quad x > 1, \end{aligned}$$

l'équation (4) se transforme en

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx = 0 \tag{15}$$

et les polynomes $P_n(x)$ deviennent les polynomes de Legendre. La classe C_k des polynomes réels $\varphi(x)$ de degré $\leqq k$ satisfaisant à (15) est identique, comme on le voit sans peine, avec celle des polynomes de la forme

$$\varphi(x) = 2f'(x) - f(1) + f(-1),$$

où $f(x)$ parcourt tous les polynomes réels de degré $\leqq k + 1$. Un ensemble minimum E_k n'est autre chose qu'un ensemble de nombres réels jouissant des propriétés suivantes:

1° à tout polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq k + 1$ correspond au moins un ξ de E_k vérifiant la formule des accroissements finis

$$f(1) - f(-1) = 2f'(\xi); \tag{16}$$

2° ξ_0 étant un nombre quelconque de E_k, il existe un polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq k + 1$ tel que la formule (16) n'est pas satisfaite par aucun nombre ξ de E_k différent de ξ_0.

3. **Formule de Taylor.**

a et $b > a$ étant deux nombres réels et m un nombre naturel, posons

$$\psi(x) = -\frac{1}{m}(b-a)^m \quad \text{pour} \quad x < a,$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{m}(b-x)^m \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq b,$$

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x > b.$$

L'équation (4) devient

$$\int_a^b (b-x)^{m-1} \varphi(x)\, dx = 0 \tag{17}$$

et la classe C_k des polynomes réels $\varphi(x)$ satisfaisant à (17) est identique avec la classe des polynomes de la forme

$$\varphi(x) = -f(b) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(b-a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(x),$$

où $f(x)$ parcourt tous les polynomes réels de degré $\leqq m+k$. Quant aux polynomes $P_\nu(x)$, ils coïncident, dans le cas considéré, avec les polynomes hypergéométriques définis pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ par la formule

$$P_\nu(x) = (x-b)^{-m+1} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \{(x-a)^\nu (x-b)^{\nu+m-1}\}.$$

Un ensemble-minimum E_k par rapport à C_k est caractérisé par les propriétés suivantes:

1° à tout polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq m+k$ correspond un ξ de l'ensemble E_k satisfaisant à la formule de Taylor

$$f(b) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(b-a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(\xi); \tag{18}$$

2° quel que soit le nombre ξ_0 de E_k il existe un polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq m+k$ et tel que la formule (18) n'est pas vérifiée par aucun ξ de E_k différent de ξ_0.

4. Formule de Cavalieri-Simpson.

$f(x)$ étant une fonction définie et possédant des dérivées continues jusqu'au quatrième ordre dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, on a identiquement[5]

[5] Voir p. ex. G. PEANO, Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson. Enseignement mathématique, XVIII (1916), p. 124.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\{f(-1) + 4f(0) + f(1)\} - \frac{1}{72}\int_{-1}^{1} u(x) f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx, \tag{19}$$

où $u(x) = (1 - |x|)^3 (1 + 3|x|)$, $-1 \leqq x \leqq 1$.

La fonction continue $u(x)$ ne changeant pas de signe dans l'intervalle $-1 < x < 1$, on peut poser $\int_{-1}^{1} u(x) f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx = f^{\mathrm{IV}}(\xi)\int_{-1}^{1} u(x)\,dx = \frac{4}{5} f^{\mathrm{IV}}(\xi)$ avec $-1 < \xi < 1$, de sorte que le dernier terme (ou le reste) dans la formule (19) prend la forme $R = -\frac{1}{90} f^{\mathrm{IV}}(\xi)$. Les théorèmes généraux établis plus haut nous permettent de restreindre le champ de variabilité du nombre ξ lorsqu'il s'agit de l'application de la formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\{f(-1) + 4f(0) + f(1)\} - \frac{1}{90} f^{\mathrm{IV}}(\xi) \tag{20}$$

aux polynomes réels. Il suffit pour cela de poser $u(x) = 0$ en dehors de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ et $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)\,dt$. La suite des polynomes de Tchébycheff attachés à la fonction croissante ainsi définie $\psi(x)$ commence par

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{2}{21}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{1}{4}x, \ldots$$

E_k désignant un ensemble minimum par rapport à la classe C_k des polynomes $\varphi(x)$ de degré $\leqq k$ soumis à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi = \int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

le même ensemble jouit des deux propriétés suivantes qui le caractérisent complètement:

1° à tout polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq k + 4$ correspond au moins un ξ de E_k satisfaisant à la formule (20);

2° quel que soit le nombre ξ_0 de E_k il existe un polynome réel $f(x)$ de degré $\leqq k+4$ tel que la formule (20) n'est pas exacte pour aucune valeur ξ de E_k différente de ξ_0.

Par exemple le nombre ξ dans la formule (20) peut être enfermé dans l'intervalle $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ lorsque $f(x)$ désigne un polynome réel de degré $\leqq 9$ et cette limitation pour ξ est la meilleure possible.

5. Polynomes trigonométriques.

Considérons la classe D_{n-1} des polynomes trigonométriques

$$T(\Theta)=a_1\cos\Theta+b_1\sin\Theta+\cdots+a_{n-1}\cos(n-1)\Theta+b_{n-1}\sin(n-1)\Theta$$

d'ordre $\leqq n-1$, à coefficients réels et sans terme constant. Nous appellerons par analogie un ensemble M_{n-1} de nombres appartenant à l'intervalle $-\pi<\Theta<\pi$ un *ensemble minimum par rapport à* D_{n-1} lorsqu'il jouit des deux propriétés:

1° tout polynome de D_{n-1} s'annule au moins pour un Θ de M_{n-1};

2° Θ_0 étant un nombre quelconque de M_{n-1}, il existe un polynome de la classe D_{n-1} ne s'annulant pas pour aucune valeur Θ de M_{n-1} différente de Θ_0.

La transformation $x=\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$ établit une correspondance biunivoque entre les intervalles $-\pi<\Theta<\pi$ et $-\infty<x<\infty$ conservant l'ordre naturel de leurs points. Un polynome trigonométrique $T(\Theta)$ se transforme ainsi en une fonction rationnelle de la forme $\frac{\varphi(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$, où $\varphi(x)$ est un polynome algébrique réel de degré $\leqq 2n-2$ soumis à la condition

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}T(\Theta)\,d\Theta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{(1+x^2)^n}\,dx=0. \tag{21}$$

Inversement, à tout polynome algébrique $\varphi(x)$ de degré $\leqq 2n-2$ satisfaisant à la condition (21) correspond par la transformation $x=\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$ un polynome trigonométrique $T(\Theta)$ d'ordre $\leqq n-1$ et sans terme constant. Le problème des ensembles minima M_{n-1} est ainsi ramené au problème analogue de la classe C_{2n-2} de polynomes réels $\varphi(x)$ de degré $\leqq 2n-2$ assujetis à la condition (21). En posant

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

la résolution complète de ce problème est donnée par les théorèmes II et III des paragraphes précédents. La chaîne des polynomes de Tchébycheff attachés à la fonction $\psi(x)$ définie plus haut contient $n+1$ termes; elle commence par $P_0 = 1$, $P_1(x) = 2x$ et termine par

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{2i}\{(x+i)^n - (x-i)^n\}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2}\{(x+i)^n + (x-i)^n\}.$$

En adoptant pour $n > 2$ les notations du § 3, un calcul facile nous montre que les zéros extrêmes des polynomes

$$Q(x) = P_n(x) + cP_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad P_{n-1}(x)$$

sont donnés par

$$\alpha = -\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{n}, \quad \beta = \operatorname{cotg}\frac{\pi-\gamma}{n}, \quad \text{où} \quad c = \operatorname{cotg}\gamma, \quad 0 < \gamma < \pi;$$

$$\alpha' = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}, \quad \beta' = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\cdot$$

La transformation $x = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$, $(-\pi < \Theta < \pi)$ fait correspondre aux trois intervalles $\alpha < x < \beta$, $-\infty < x < \beta'$, $\alpha' < x < \infty$ respectivement les intervalles $-\pi + \frac{2\gamma}{n} < \Theta < \pi - \frac{2\pi - 2\gamma}{n}$, $-\pi < \Theta < \pi - \frac{2\pi}{n}$, $-\pi + \frac{2\pi}{n} < \Theta < \pi$.

Le nombre γ pouvant désigner un nombre quelconque entre 0 et π, nous pouvons donc affirmer, d'après le théorème II, que pour $n > 2$ un ensemble-minimum M_{n-1} n'est autre chose qu'un intervalle ouvert de longueur $2\pi - \frac{2\pi}{n}$ faisant partie de l'intervalle $-\pi < \Theta < \pi$.

Le cas $n = 2$ peut être traité soit en appliquant le théorème III du § 4, soit par une voie directe en observant que les polynomes trigonométriques de la classe considérée ont alors la forme $T(\Theta) = a\sin(\Theta - \Theta_0)$ où a et Θ_0 sont des constantes réelles et arbitraires.

Pour obtenir un ensemble minimum M_1, il suffit de partager tous les nombres de l'intervalle $-\pi < \Theta < 0$ en deux ensembles complémentaires A et A';

en désignant par B l'ensemble des nombres de A' augmentés de π, la somme $A + (0) + B$ représente l'ensemble minimum M_1 le plus général.

Remarque. Il est plus naturel de modifier un peu la définition d'un ensemble minimum M_{n-1} en admettant que les nombres de M_{n-1} appartiennent à l'intervalle semi-ouvert $-\pi \leqq \Theta < \pi$ qui représente un système complet de nombres non-congrus par rapport au module 2π. On démontre facilement, en adoptant cette nouvelle définition, qu'un ensemble minimum par rapport à la classe D_{n-1} $(n > 2)$ n'est autre chose qu'un sous-intervalle ouvert de longueur $2\pi - \frac{2\pi}{n}$, faisant partie de l'intervalle primitif, ou bien la somme des deux intervalles

$$-\pi \leqq \Theta < -\pi + \gamma - \frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad -\pi + \gamma < \Theta < \pi,$$

où γ désigne une constante quelconque comprise entre $\frac{2\pi}{n}$ et 2π.